

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Jean CERF et André GRAMAIN

LE THÉORÈME DU *h*-COBORDISME (SMALE)

Cours professé au printemps 1966
a la Faculté des Sciences d'Orsay

Secrétariat Mathématique
de l'École Normale Supérieure
45, rue d'Ulm – Paris 5e
1968

Le rôle respectif des auteurs est le suivant: en 1966, J. CERF a fait à la Faculté des Sciences d'Orsay un cours sur la théorie de SMALE. En 1968, A. GRAMAIN, en s'inspirant des notes prises à ce cours, a fait une série de conférences à l'École Normale Supérieure sur le même sujet. Les présentes notes constituent la rédaction de ces conférences.

J. C. et A. G.

INTRODUCTION

Soit W une variété compacte à bord dont le bord est la réunion de deux variétés V et V' ; on dit que W est un h -cobordisme entre V et V' si les injection de V et V' dans W sont de équivalences d'homotopie. S. Smale ([5]) a démontré que tout h -cobordisme simplement connexe de dimension au moins 6 est difféomorphe au produit $V \times [0, 1]$, et, par suite, que deux variétés simplement connexes de dimension au moins 5 qui sont h -cobordantes sont difféomorphes.

C'est l'objet de ce cours de démontrer ce théorème. On ne traitera ni des applications de ce théorème qui, pourtant, sont nombreuses et importantes (voir [1]) ni des généralisations (voir [3] pour le cas non simplement connexe). La méthode originale de démonstration utilisait une présentation des variétés par anses (méthode utilisée dans [1], [3], [5]); M. Cerf a préféré utiliser les fonctions de Morse sur les variétés (comme dans [4]) car ce procédé lui permet d'atteindre des résultats beaucoup plus fin que le théorème du h -cobordisme concernant le groupe des difféomorphismes d'une variété (ce chosse ne sont pas abordées dans ce cour).

Le lecture de ce cours suppose la connaissance des théorèmes de base de la topologie différentielle : principalement les théorèmes de transversalité (voir bibliographie du chapitre I), ensuite les théorèmes de fibration de J. Cerf (voir l'appendice de [2]), enfin un théorème (voir [4], [7]) dont voici l'énoncé :

Théorème du nombre d'intersection. *Soient M une variété, X et X' deux sous-variétés de M . On suppose M , X , et X' compactes, connexes, orientées et sans bord; on suppose en plus :*

- (a) $\pi_1(M) = 0$; $\pi_1(M \setminus X) = 0$;
- (b) dimension $M \geq 5$;
- (c) codimension $X \geq 2$; codimension $X' \geq 3$;
- (d) (dimension X) + (dimension X') = dimension M .

Soit b le nombre d'intersection de X et X' . Il existe un plongement f de X' dans M , qui soit isotope à l'injection de X' dans M , et qui vérifie la condition suivante: $f(X')$ coupe X en $|b|$ points, transversalement en chacun d'eux.

Parmi les conséquences des théorème de transversalité, on utilisera les théorème de plongement et de séparation de Whitney (voir [1], [6]).

[1] J. CERF La théorie de Smale sur le h -cobordisme des variétés.

Séminaire Cartan, 14ème année, 1961-62, n° 11.

[2] J. CERF Sur les difféomorphismes de la sphère de dimension 3 ($\Gamma_4 = 0$).
Lecture notes in mathematics, n° 53, Springer Verlag, 1968

[3] M. KERVAIRE Le théorème de Baden-Mazur-Stallings.
Commentarii Mathematici Helvetici 40, 1965, p. 31-42.

- [4] J. MILNOR *Lectures on the h-cobordism theorem.*
Princeton mathematical notes, 1965
- [5] S. SMALE On the structure of manifolds.
American Journal of Mathematics, 84, 1962, p. 387-399.
- [6] H. WHITNEY Differentiable manifolds.
Annals of Mathematics, 37, 1936, p. 645-680
- [7] H. WHITNEY The self-intersection of a smooth n -manifold in $2n$ -space.
Annals of Mathematics, 45, 1944, p. 220-245.

CHAPITRE I

TRANSVERSALITÉ

Ce chapitre ne contenant que des résultats classiques, nous nous abstenons de le rédiger. Une courte bibliographie renvoie à divers articles concernant les théorèmes de transversalité. Nous énonçons cependant l'unique théorème que nous utiliseront par la suite.

DÉFINITION. *On appelle **triade**¹ la donnée de trois variétés (W, V_0, V_1) où W est une variété à bord, et V_0 et V_1 deux variétés disjointes, ouvertes et fermées dont la réunion est le bord de W .*

Soit (W, V_0, V_1) une triade, on désigne par \mathbf{F} l'ensemble des applications différentiables $f: W \rightarrow [0, 1]$ telles que

$$f^{-1}(0) = V_0, f^{-1}(1) = V_1.$$

Sauf mention explicite du contraire, toute les variétés et applications considérées ici sont différentiables de classe C^∞ . L'espace \mathbf{F} est muni de la topologie C^∞ ; il n'est pas vide.

DÉFINITION. *On dit qu'une fonction $f \in \mathbf{F}$ est une **fonctions de Morse** si tous ses points critiques sont non-dégénérées, et toutes ses valeurs critiques distinctes.*

THÉORÈME. *Le sous-ensemble de \mathbf{F} formé des fonctions de Morse est un ouvert partout dense de \mathbf{F} pour la topologie C^∞ .*

Bibliographie du Chapitre I

- | | |
|--------------|--|
| R. THOM | Quelques propriétés globales des variétés différentiables.
Commentarii Mathematici Helvetici, 28, 1954, p. 17-86. |
| A. HAEFLIGER | Plongements différentiables de variétés dans variétés.
Commentarii Mathematici Helvetici, 36, 1961, p. 47-82. |
| C. MORLET | Le lemme de Thom et les théorèmes de plongement de Whitney.
Séminaire Cartan, 14ème année, 1961-1962, exposés n°s 4, 5, 6 et 7. |
| R. ABRAHAM | <i>Transverse mappings and flows.</i>
Benjamin Inc., 1967. |

¹ On utilise aussi le nom de cobordisme.

CHAPITRE II

FONCTIONS DE MORSE SUR UNE TRIADE

Ce chapitre est un chapitre de leçon de choses où nous étudierons les propriétés immédiates des triades (introduites dans le chapitre précédent) munies d'une fonctions de Morse. Nous étudierons d'abord les triades munies d'une fonctions sans point critique (paragraphe 1), puis au paragraphe 2, nous montrerons qu'il existe un modèle pour les points critiques d'une fonction de Morse ; enfin, nous introduirons les nappes d'un point critique dont nous donnerons quelques propriétés (paragraphe 3 et paragraphe 4).

Paragraphe 1. TRIADES SANS POINT CRITIQUE.

1. *Le théorème fondamental.*

THÉORÈME 1. *Soit (W, V_0, V_1) une tirade compacte, et $f: (W, V_0, V_1) \rightarrow ([a, b], \{a\}, \{b\})$ une fonction de Morse sans point critique, il existe un difféomorphisme $\varphi: V_0 \times [a, b] \rightarrow W$ tel que le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} V_0 \times [a, b] & \xrightarrow{\varphi} & W \\ p_2 \searrow & & \swarrow f \\ & [a, b] & \end{array}$$

soit commutatif.

Pour la démonstration de ce théorème, le lecteur consultera J. MILNOR, Morse theory, (Annals of mathematics studies, Princeton, n° 51, Part 3). La démonstration consiste à munir W d'une métrique riemannienne, et à appliquer la théorie des équations différentielles sur une variété au champ de vecteurs $X = \text{grad. } f / \|\text{grad. } f\|^2$.

Remarque. La restrictions de φ à $V_0 \times \{a\}$ définit un automorphisme θ de V_0 . En composant φ avec $\theta^{-1} \times \text{id}: V_0 \times [a, b] \rightarrow V_0 \times [a, b]$, on se ramène au cas où φ induit sur $V_0 \times \{a\}$ l'identité de V_0 .

Si \mathbf{H} est l'espace des difféomorphismes $\varphi: V_0 \times [a, b] \rightarrow W$ astreints à la condition du théorème, et dont la restrictions à $V_0 \times \{a\}$ est l'injections canonique $V_0 \rightarrow W$, il est clair que le groupe \mathbf{G} des isotopies de V_0 opère à gauche dans \mathbf{H} de façon simplement transitive.

Remarque. Si $y \in W$ est un point non-critique de la fonction $f: W \rightarrow \mathbb{R}$, il existe un plongement $\varphi: D^{n-1} \times [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow W$ (où n est la dimension de W et D^{n-1} la boule unité de \mathbb{R}^{n-1}) tel que $\varphi(0, 0) = y$ et $f \circ \varphi(x, t) = f(y) + t$. Il suffit, pour trouver φ , de choisir des coordonnées locales au voisinage de y pour lesquelles le champ $\text{grad. } f$ est égal au champ $(0, \dots, 0, 1)$.

2. *Sous-triades.*

Si N est une sous-variété compacte à bord de W , dont le bord bN est le réunion d'une sous-variété M_0 de V_0 et d'une sous-variété M_1 de V_1 , et si N est transversale à bW le long de bN , on dira que

(N, M_0, M_1) est une **sous-triade** de (W, V_0, V_1) .

THÉORÈME 2. *Soit (N, M_0, M_1) une sous-tirade de (W, V_0, V_1) , et f une fonction de Morse sans point critique sur W qui induise une fonction sans point critique sur N , alors toute "trivialisation" $\psi : M_0 \times [a, b] \rightarrow N$ (le théorème 1 en prouve l'existence) qui induit l'inclusion canonique sur $N_0 \times \{a\}$ peut se prolonger en une trivialisation $\varphi : V_0 \times [a, b] \rightarrow W$, induisant sur $V_0 \times \{a\}$ l'application canonique.*

Démonstration. Lorsqu'on a identifié N à $M_0 \times I$ (où I est l'intervalle $[a, b]$) par le difféomorphisme ψ , et W à $V_0 \times I$ par un difféomorphisme dont le théorème 1 affirme l'existence, choisi de façon qu'il induise l'application canonique sur $V_0 \times \{a\}$, le problème du prolongement de ψ devient celui de la recherche d'une isotopie de V_0 , dont la restriction à M_0 soit une isotopie de plongement de M_0 dans V_0 donné. D'après le théorème de fibration de Cerf (voir Séminaire CARTAN, n° 15, (1962-63) exposé 8, page 1), l'application de restriction $\text{Aut}(V_0) \rightarrow \text{Pl}(M_0, V_0)$ est une fibration localement triviale, et on peut donc relever tout chemin de l'espace $\text{Pl}(M_0, V_0)$ lorsqu'on s'est donné le relèvement de son origine. Ceci achève la démonstration.

Remarquons que, si ψ n'induit pas l'application canonique sur $M_0 \times \{a\}$, pour prolonger ψ il faut d'abord savoir si le difféomorphisme de M_0 défini par $\psi|_{M_0 \times \{a\}}$, se prolonge en un difféomorphisme de V_0 , c'est-à-dire si l'origine de l'isotopie de plongement admet un relèvement dans $\text{Aut}(V_0)$.

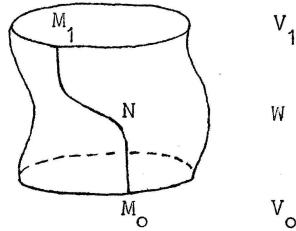


figure 1

3. Voisinages tubulaires de sous-triades.

Nous groupons dans ce numéro deux résultats techniques qui nous seront utiles par la suite.

PROPOSITION 1. *Soit (W, V_0, V_1) une triade, f une fonctions de Morse sur W , (avec points critiques éventuels), soit (N, M_0, M_1) une sous-triade sur laquelle f induit une fonctions de Morse sans point critique, alors N admet dans W un voisinage tubulaire dont les fibres sont à niveau constant.*

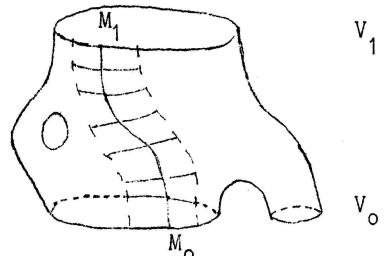


figure 2

Notons I le segment $[a, b]$ (où $a = f(V_0)$ et $b = f(V_1)$). Le théorème 1 prouve l'existence d'un plongement $\psi : M_0 \times I \rightarrow W$, dont l'image est N , et qui rende commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \psi & \\ M_0 \times I & \xrightarrow{\quad} & W \\ p_2 \searrow & & \swarrow f \\ & I & \end{array}$$

Si U est un voisinage tubulaire assez petit de M_0 dans V_0 , on sait que ψ se prolonge en un plongement $\theta : U \times I \rightarrow W$ qui induit l'application canonique sur $U \times \{a\}$, et qui réalise un voisinage tubulaire de N dans W (ceci d'après les propriétés des voisinages tubulaires). Mais θ ne respecte pas les niveaux sauf le niveau a et le niveau b . Nous aurons démontré la proposition lorsque nous aurons remplacé θ par un plongement $\varphi : S \times I \rightarrow W$ (où S est un voisinage tubulaire assez petit de M_0 dans V_0), qui prolonge ψ , qui induise l'application canonique sur $S \times \{a\}$, et qui respecte les niveaux, c'est-à-dire rende commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \varphi & \\ S \times I & \xrightarrow{\quad} & W \\ p_2 \searrow & & \swarrow f \\ & I & \end{array}$$

Pour tout x de U , considérons la fonction $t \mapsto f(\theta(x, t))$. Lorsque x est un point de M_0 , la dérivée de cette fonction n'est pas nulle (car elle est égale à 1); il existe donc un voisinage S (tubulaire) de M_0 dans V_0 , tel que la dérivée ne s'annule pas pour x dans S . L'application $\gamma : S \times I \rightarrow S \times I$ définie par $\gamma(x, t) = (x, f(\theta(x, t)))$ est donc un difféomorphisme de $S \times I$ sur lui-même, et le plongement composé $\varphi = \theta \cdot \gamma^{-1}$ est le plongement cherché.

PROPOSITION 2. *Soient $(W, V_0, V_1), (N, M_0, M_1)$ et f , une triade, une sous-triade et une fonction de Morse (avec points critiques éventuels). Soit h un niveau compris entre a et b , et V la surface de niveau h de W (la surface V n'est pas une variété si f a des points critiques de niveau h). On suppose qu'il existe un fermé S de V , contenant $V \cap N = M$, et ne contenant aucun point critique de la fonction f , et que f induit sur N une fonction de Morse qui n'a pas de point critique au niveau h . Dans ces conditions, il existe un voisinage ouvert U de S dans V , et un plongement $\varphi : U \times [0, \varepsilon] \rightarrow W$ (pour assez petit) tel que*

(a) *le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} & \varphi & \\ U \times [0, \varepsilon] & \xrightarrow{\quad} & W \\ h + p_2 \searrow & & \swarrow f \\ & [h, h + \varepsilon] & \end{array}$$

soit commutatif,

(b) $\varphi | U \times \{0\}$ *soit l'application canonique,*

(c) $\varphi | M \times [0, \varepsilon]$ *soit un difféomorphisme sur la portion de N comprise entre les niveaux h et $h + \varepsilon$.*

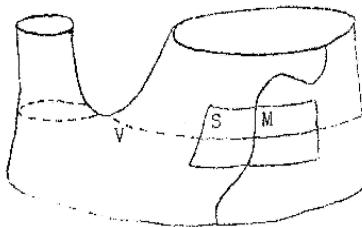


figure 3

La proposition 2 ressemble à la proposition 1, mais on s'impose ici un "minimum" pour le voisinage trivialisé de la sous-variété.

Indication pour la démonstration. On utilise la proposition 1 pour munir un voisinage tubulaire de N , au voisinage du niveau h , d'une métrique pour laquelle N est un lieu de lignes intégrales de $\text{grad } f$. On prolonge cette métrique à W , et on construit φ à l'aide de lignes intégrales de $\text{grad } f$ comme dans la démonstration du théorème 1.

Paragraphe 2. POINTS CRITIQUES.

Comme la démonstration du théorème de Morse n'est plus difficile pour un espace de Banach quelconque, que pour espace de dimension finie, nous donnerons la démonstration la plus générale, (voir R. PALAIS, Morse theory on Hilbert manifolds, Topology, vol. 2 1963, p. 299-340).

1. Forme canonique pour un point critique non-dégénéré.

THÉORÈME 3. Soit U un voisinage de l'origine 0 d'un espace de Banach E , et $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^n ($n \geq 3$) pour laquelle 0 est un point critique non-dégénéré; il existe un C^{n-2} -difféomorphisme $x = \varphi(y)$ d'un voisinage de 0 (dans E) sur un voisinage de 0 (dans U) tel que la fonction $f(\varphi(y)) - f(0)$ soit quadratique en y (c'est-à-dire soit un polynôme homogène de degré 2).

Il suffit de considérer le cas où $f(0) = 0$. La formule de Taylor nous donne, dans un voisinage V ($\subset U$) de 0, étoilé par rapport à 0:

$$f(x) = [\int_0^1 (1-t)f'(tx)dt].(x, x)$$

soit

$$f(x) = g(x).(x, x)$$

où g est une application de classe C^{n-2} de V dans l'espace des formes bilinéaires symétriques et continues sur E . Pour x assez voisin de 0, $g(x)$ est non-dégénéré, et définit donc un isomorphisme $G(x)$ de E sur $E^* = L(E, \mathbb{R})$. Soit $Y(x) = G(0)^{-1} \cdot G(x)$; pour x assez voisin de 0, $Y(x)$ est voisin de l'identité de E , et on peut trouver une application A d'un voisinage W de 0 (dans E) dans E^* , de classe C^{n-2} , telle que $Y(x) = A(x) \cdot A(x)$. On va démontrer que

$$f(x) = g(0) \cdot (A(x) \cdot x, A(x) \cdot x).$$

Ceci achèvera la démonstration du théorème : il suffit de vérifier que $y = A(x) \cdot x$ définit un difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans W , sur un voisinage de 0 dans E , ce qui est évident

puisque la dérivée en 0 de l'application $x \mapsto A(x) \cdot x$ est égale à $A(0) = \text{id}(E)$.

La symétrie de la forme bilinéaire $g(x)$ permet de calculer la transposée de $Y(x)$: pour tous $u \in E^*, z \in E$,

$$\begin{aligned} u(Y(x) \cdot z) &= u(G(0)^{-1} \cdot G(x) \cdot z) \\ &= G(0)(G(0)^{-1} \cdot u) \cdot G(0)^{-1} \cdot G(x) \cdot z \\ &= G(0)(G(0)^{-1} \cdot G(x) \cdot z) \cdot G(0)^{-1} \cdot u \\ &= G(x) \cdot z \cdot G(0)^{-1} \cdot u = G(x) \cdot G(0)^{-1} \cdot u \cdot z \end{aligned}$$

d'où

$${}^t Y(x) = G(x) \cdot G(0)^{-1}.$$

Il en résulte que ${}^t Y(x) = G(0) \cdot Y(x) \cdot G(0)^{-1}$: la transposée de Y se déduit de Y par l'isomorphisme $G(0)$ de E sur E^* . Il en est de même pour la "racine carrée" de Y : sa transposée est

$${}^t A(x) = G(0) \cdot A(x) \cdot G(0)^{-1}.$$

Donc

$$\begin{aligned} g(0) \cdot (A(x) \cdot x, A(x) \cdot x) &= G(0) \cdot (A(x) \cdot x) \cdot (A(x) \cdot x) \\ &= {}^t A(x) \cdot G(0) \cdot A(x) \cdot x \cdot x \\ &= G(0) \cdot x \cdot x = f(x). \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration.

La difféomorphisme trouvé n'est pas le seul à transformer f en une forme quadratique, et nous verrons plus loin qu'on peut lui imposer un certain nombre de conditions. Néanmoins, si $x = \varphi(y)$ est un difféomorphisme tel que $f(\varphi(y)) = f(0) + P(y, y)$ où P est une forme bilinéaire symétrique sur E , le calcul de la dérivée seconde de f montre que

$$2P(y, y) = f''(0) \cdot (\varphi'(0) \cdot y, \varphi'(0) \cdot y).$$

Ainsi, si f est une fonction de Morse sur une variété W , et $c \in W$ un point critique de f , il existe au voisinage de c un système de coordonnées locales tel que $f(x) - f(c)$ soit un polynôme homogène de degré 2 des coordonnées locales. En outre, pour tout système de coordonnées locales de ce type, le polynôme obtenu a pour image par l'isomorphisme canonique de W (au voisinage de c) sur l'espace tangent à W en c (au voisinage de 0), le polynôme symétrique $\frac{1}{2}f''(c)$, qui est "bien défini" puisque $f''(c) = 0$. En particulier, son indice est égal à l'indice i du point critique c . Nous n'utiliserons que les coordonnées locales pour lesquelles $f(x) - f(c)$ se réduit à une somme de carrés (une transformation linéaire sur les coordonnées permet de transformer une forme quadratique d'indice i , en une somme de i carrés négatifs et de $n - i$ carrés positifs), alors on aura:

$$f(x) = f(c) - x_1^2 - \cdots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + \cdots + x_n^2.$$

2. Étude du modèle de point critique, voisinage de Morse.

Nous allons donner quelques définitions et notations concernant la fonction $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$h(x) = -x_1^2 - \cdots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + \cdots + x_n^2$$

dont nous venons de montrer qu'elle est le modèle d'une fonctions de Morse au voisinage d'un point critique d'indice i .

Le point 0 est le seul point critique de la fonction h . Pour faciliter l'écriture, on notera

$Y = (x_1, \dots, x_i) \in \mathbb{R}^i$ et $Z = (x_{i+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-i}$. La **surface de niveau supérieure** $h(x) = -Y^2 + Z^2 = 1$ est difféomorphe au produit $\mathbb{R}^i \times S^{n-i-1}$ par le difféomorphisme:

$$(1) \quad (y, z) \ (\in \mathbb{R}^i \times S^{n-i-1}) \mapsto (Y, Z) \ (\in \mathbb{R}^i \times \mathbb{R}^{n-i}) \quad \text{où } Y = y \cdot \text{sh}|y|/|y| \text{ et } Z = z \cdot \text{ch}|y|.$$

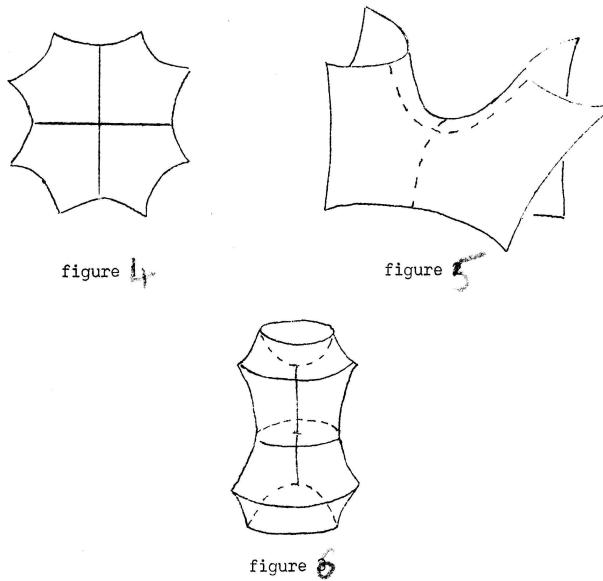
De même, la **surface de niveau inférieure** $h(x) = -1$ est difféomorphe au produit $S^{i-1} \times \mathbb{R}^{n-i}$.

Le **voisinage de Morse modèle M** est défini par les inégalités: $-1 \leq Y^2 + Z^2 \leq 1$, et $|Y| \cdot |Z| \leq 1$. C'est un compact dont le bord comprend:

- une portion de la surface de niveau supérieure difféomorphe au produit $D^i \times S^{n-i-1}$ (par le paramétrage (1)),
- une portion de la surface de niveau inférieure difféomorphe au produit $S^{i-1} \times D^{n-i}$,
- la **surface latérale** qui est la portion de la variété $|Y| \cdot |Z| = 1$ comprise entre les niveaux -1 et 1 . Elle est donc le lieu de trajectoires orthogonales des surfaces de niveau de h . Son bord est la réunion de deux exemplaires de $S^{i-1} \times S^{n-i-1}$ placés l'un au niveau -1 , l'autre au niveau 1 , et comme la restriction de la fonction h à la surface latérale est sans point critique (puisque cette surface est orthogonale aux surfaces de niveau de h), il résulte du théorème sur les triades munies d'une fonction de Morse sans point critique, que la surface latérale est difféomorphe au produit $[-1, 1] \times S^{i-1} \times S^{n-i-1}$ de façon telle que h soit envoyé sur la projection sur $[-1, 1]$.

La **nappe descendante** de 0 est la partie de $\mathbb{R}^i \times \{0\}$ contenue dans M ; c'est le disque $D^i \times \{0\}$; elle ne rencontre pas les surfaces de niveau $h(x) > 0$; le seul point de niveau 0 est le point 0 , et son intersection avec une surface de niveau compris entre -1 et 0 est une sphère de dimension $i-1$ centrée en 0 . On définit de la même manière la **nappe montante**. La réunion des deux nappes constitue la réunion des lignes de gradient de h (où trajectoires orthogonales des surfaces de niveau) issue de 0 .

La figure 4 représente le cas $n = 2$, $i = 1$. La figure 5 représente le même cas, mais le dessin est tracé sur la sous-variété de \mathbb{R}^3 d'équation $x_3 = h(x_1, x_2)$. La figure 6 représente le cas $n = 3$, $i = 2$.



Remarque. Ce que nous venons de dire ne s'applique pas aux cas des points critiques d'indice 0 ou n . Dans ce cas, \mathbf{M} est la boule de contre et de rayon 1, qui s'identifie à la nappe montante (pour $i = 0$) ou descendante (pour $i = n$); il n'y a qu'une seule nappe.

Rétractions de \mathbf{M} adaptées à la fonction h .

Nous ne donnerons pas de définition des rétractions de \mathbf{M} adaptées à la fonction h , mais nous nous contentons d'indiquer trois types de rétractions de \mathbf{M} qui nous seront utiles. Après lecture du paragraphe 3, n° 1, le lecteur soucieux de précision pourra écrire cette définition.

(a) *Homothéties.*

Soit λ un réel inférieur à 1, et $\varphi_\lambda : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}$ l'homothétie de rapport λ et de centre 0; l'égalité

$$h(\lambda x) = \lambda^2 \cdot h(x)$$

prouve que φ_λ envoie les surfaces de niveau de h dans des surfaces de niveau de h .

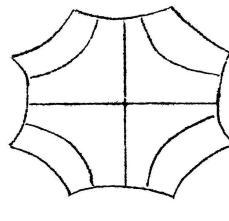
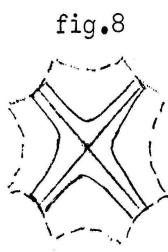
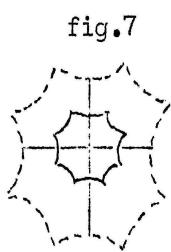
(b) *Rétraction suivant les lignes de gradient de h .*

Si $g : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ est une application croissante qui soit l'identité au voisinage de 0, l'application $\gamma : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}$ définie en associant à tout point x de \mathbf{M} l'unique point $\gamma(x)$ situé sur la même ligne de gradient que x , et tel que $h(\gamma(x)) = g(h(x))$, sera appelée une rétraction suivant les lignes de gradient de h . Elle envoie les surfaces de niveau dans les surfaces de niveau, et pour un choix convenable de la fonction g , l'image de \mathbf{M} sera dans un voisinage arbitraire de la surface de niveau 0: il suffit de choisir l'image de g assez petite (fig 8.).

Si on choisit pour g une fonction qui soit l'identité sur $[-1, 0]$ et telle que l'image de $[0, 1]$ soit assez petite, la rétraction laisse invariante la portion de \mathbf{M} de niveau négatif, et envoie la portion positive dans un voisinage de la surface de niveau 0 (fig. 9).

(c) *Rétraction suivant les lignes de gradient de la fonction $k(Y, Z) = |Y| \cdot |Z|$.*

On définit cette rétraction de façon évidente, et, comme les lignes de gradient de la fonction k sont contenues dans les surfaces de niveau de h , cette rétraction envoie encore les surfaces de niveau de h dans des surfaces de niveau de h . Un choix convenable de cette rétraction permet d'envoyer \mathbf{M} dans un voisinage arbitraire de la réunion des deux nappes.



Paragraphe 3. NAPPES.

1. *Voisinage de Morse et nappes sur une variété.*

Dans ce numéro, W désigne une variété différentiable de dimension n , f une application différentiable de W dans \mathbb{R} , et c un point critique non-dégénéré d'indice i pour la fonction f .

DÉFINITION. Si \mathbf{M} est le voisinage de Morse modèle pour les points critiques d'indice i sur les variétés de dimension n , on dit qu'un plongement $\varphi : \mathbf{M} \rightarrow W$ est un **plongement adapté à f en c** , si $\varphi(0) = c$ et s'il existe un plongement croissant $\varphi' : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $f \circ \varphi = \varphi' \circ f$: c'est-à-dire

$$\begin{array}{ccc} & \varphi & \\ \mathbf{M} & \rightarrow & W \\ h \downarrow & \varphi' & \downarrow f \\ [-1, 1] & \rightarrow & \mathbb{R} \end{array}$$

est commutatif.

Propriétés.

- (a) Si $\psi : W \rightarrow W$, et $\psi' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont des plongements, et $g : W \rightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable, si ψ' est croissant et si $g \circ \psi = \psi' \circ f$, alors $\psi(c)$ est un point critique non-dégénéré pour g , et $\psi \circ \varphi$ est un plongement adapté à g en $\psi(c)$,

$$\begin{array}{ccc} & \varphi & \psi \\ \mathbf{M} & \xrightarrow{\quad} & W \xrightarrow{\quad} W \\ h \downarrow & \varphi' & f \downarrow \psi' \downarrow g \\ I & \rightarrow & \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \end{array}$$

- (b) Pour tout point critique, il existe un plongement adapté. Le théorème de Morse nous donne, en effet, un plongement ψ d'un voisinage ouvert V de 0 (dans \mathbb{R}^n) dans W tel que $f(\psi(x)) = h(x) + f(c)$. Il existe un nombre positif λ tel que l'homothétie de centre 0 et de rapport λ envoie \mathbf{M} dans V ; le plongement $\varphi : \mathbf{M} \rightarrow W$ défini par $\varphi(x) = \psi(\lambda x)$ est évidemment adapté à f en c :

$$\begin{array}{ccc} & \lambda & \psi \\ \mathbf{M} & \xrightarrow{\quad} & V \xrightarrow{\quad} W \\ h \downarrow & \lambda^2 & h \downarrow \text{id} + f(c) \downarrow f \\ \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \end{array}$$

- (c) Si $(\psi_t)_{t \in [0, 1]}$ est une isotopie adaptée du voisinage de Morse modèle \mathbf{M} , et $\varphi : \mathbf{M} \rightarrow W$ est un plongement adapté à f en c , alors pour tout $t \in [0, 1]$ le plongement $\varphi \circ \psi_t : \mathbf{M} \rightarrow W$ est adapté à f en c (c'est cette propriété qu'on vient d'appliquer en (b) à l'homothétie de rapport λ).

DÉFINITION. Soit N une sous-variété de W , on dit que N est une **nappe descendante** (resp. **montante**) du point critique c pour la fonction f s'il existe un plongement de \mathbf{M} dans W , adapté à f en c , tel que N soit l'image de la nappe descendante (resp. montante) du modèle \mathbf{M} . Il en résulte que N est difféomorphe à D^i (resp. D^{n-i}).

Propriétés.

- (d) Si $\varphi : \mathbf{M} \rightarrow W$ est un plongement adapté, et N la nappe descendante (resp. montante) correspondante, il existe une isotopie $(\varphi_t)_{t \in [0, 1]}$ de plongement de \mathbf{M} dans W telle que:

- pour tout $t \in [0, 1]$, φ_t soit un plongement adapté,
- $\varphi_t = \varphi$ sur la nappe descendante (resp. montante) modèle,
- $\varphi_0 = \varphi$,
- l'image de φ_1 soit contenue dans un voisinage arbitraire de la nappe N .

On obtient φ_t par composition de φ et d'une rétraction adaptée de \mathbf{M} , laissant fixe la nappe descendante (resp. montante) et dont l'extrémité a son image dans un voisinage assez petit de

- cette nappe: pour cela on compose une rétraction du type (c) avec une rétraction du type (b).
- (e) Si l'on prend seulement une rétraction du type (c), on peut s'arranger pour que l'image de φ_1 soit contenue dans un voisinage arbitraire de la réunion de la nappe montante et de la nappe descendante.
- (f) De même, si (φ, φ') est un plongement adapté, en composant φ avec une rétraction du type (b), on peut, sans changer les images des nappes, modifier φ' par n'importe quel automorphisme différentiable du segment $[-1, 1]$ qui soit égal à l'identité au voisinage de 0.

Nous donnerons au n° 3 une caractéristique des nappes.

2. Complément au théorème de Morse.

THÉORÈME 4. Soit E un espace de Banach, $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique continue non-dégénérée, et $P : E \rightarrow E^*$ l'isomorphisme correspondant; si E est la somme directe de deux sous-espaces fermés M et N qui soient conjugués pour la forme quadratique p (c'est-à-dire que $\forall y \in M$, et $\forall z \in N$, on a $P(y) \cdot z = P(z) \cdot y = 0$) et si q et r sont les formes quadratiques (supposées non-dégénérées) induites par p sur M et N , alors

$$p(x) = q(y) + r(z)$$

(où (y, z) représente la décomposition de x sur M et N respectivement). Sous ces hypothèses, si $k : N \rightarrow M$ est une application de classe C^r ($r \geq 3$), tangente à 0 au point 0 ($\in N$), il existe un C^{r-2} -difféomorphisme d'un voisinage U de 0 dans E sur un voisinage V de 0 dans E , noté

$$X = (Y, Z) = (\psi(y, z), \varphi(y, z)) = \theta(x).$$

tel que

- (a) $P(\theta(x)) = p(x)$
- (b) $y = k(z) \iff Y = \psi(y, z) = 0$
- (c) $z = 0 \iff Z = \varphi(y, z) = 0$.

Commentaire. Le théorème affirme que le groupe des difféomorphismes de E qui laissent invariante la forme quadratique p , contient des difféomorphismes d'un certain type: i.e. transformant en son plan tangent à l'origine une surface, tout en conservant le sous-espace conjugué de ce plan tangent (pourvu que les formes quadratiques induites par p soient non-dégénérées).

Démonstration. Nous choisissons $Y = \psi(y, z) = y - k(z)$ de sorte que la condition (b) est vérifiée, et nous cherchons $Z = \varphi(y, z)$ tel que

$$r(Z) + q(y - k(z)) = r(z) + q(y)$$

soit

$$r(Z) = r(z) + 2Q(y) \cdot k(z) - q(k(z)) = f(y, z).$$

On procède alors comme dans la démonstration du théorème de Morse: la formule de Taylor appliquée à $f(y, z)$ considérée comme fonction de z donne

$$f(y, z) = g(y, z) \cdot (z, z)$$

car

$$f'(y, z) = 2R(z) + 2Q(y) \cdot k'(z) - 2Q(k(z)) \cdot k'(z)$$

s'annule *quel que soit* y pour $z = 0$. On peut alors trouver, pour (y, z) assez voisin de 0 , un élément $A(y, z)$ de N^* , tel que

$$A(y, z) \cdot A(y, z) = G(0)^{-1} \cdot G(y, z);$$

et on prend pour φ l'application

$$Z = A(y, z) \cdot z.$$

Les conditions (a) et (c) sont donc ainsi vérifiées. En outre l'application θ ainsi définie est un difféomorphisme puisqu'elle est tangente en 0 à l'application identique (comme il est facile de vérifier par le calcul des dérivées des applications φ et ψ).

Ce théorème va nous permettre de donner une caractérisation des nappes. Remarquons auparavant que lorsque E est un espace de Banach, et M un sous-espace fermé sur lequel p induit une forme non-dégénérée, le conjugué N de M est son supplémentaire et p induit sur N une forme non-dégénérée.

3. Caractérisation des nappes.

PROPOSITION 3. *Si N est une sous-variété de W , difféomorphe au disque D^i , dont le bord se trouve à un niveau constant de la fonction f , inférieur au niveau $f(c)$, si N contient c et si f induit sur N une fonction de Morse dont le seul point critique est le point c , avec l'indice i , alors N est une nappe descendante de c .*

Il y a un énoncé analogue pour les nappes montantes. En outre, si N et N' sont deux nappes descendante et montante respectivement, dont les plans tangents en c sont conjugués par rapport à $f'(c)$, N et N' sont les nappes d'un même plongement adapté du modèle M dans W .

Démonstration.

- (a) Soit φ un plongement de M dans W adapté à f en c , et tel que l'image de la nappe descendante modèle soit tangente en c à N (ce qu'on peut toujours réaliser par un changement de variables linéaire parce que $f'(c)$ induit une forme définie négative sur le plan tangent à N); au voisinage de 0 , l'image réciproque de N est une surface d'équation $Z = k(Y)$ (avec les notations du numéro 2) où k est une application différentiable de \mathbb{R}^i dans \mathbb{R}^{n-i} , tangente à 0 au point 0 . Le complément du théorème de Morse nous fournit un difféomorphisme θ d'un voisinage de 0 dans M sur un voisinage V de 0 dans M , conservant la fonction de Morse modèle h , et envoyant $\varphi^{-1}(N)$ (au voisinage de 0) sur la nappe descendante modèle. Le plongement composé $\varphi \cdot \theta^{-1} : V \rightarrow W$ envoie donc, au voisinage de 0 , la nappe modèle sur un voisinage de c dans N , et $f \cdot \varphi \cdot \theta^{-1} = \varphi \cdot h$. Il en résulte qu'un voisinage de c dans N est une nappe descendante de c .

Comme le plan tangent à N' en c est conjugué du plan tangent à N , l'image réciproque de N' par $\varphi \cdot \theta^{-1}$ est tangente en 0 à la nappe montante modèle, et le complément du théorème de Morse nous fournit un second difféomorphisme θ' qui envoie l'image réciproque de N' sur la nappe montante modèle, en conservant la nappe descendante (à cause du (c) du théorème 4). En considérant le plongement $\varphi \cdot \theta^{-1} \cdot \theta'^{-1}$ on voit, qu'il

voisinage de c , N et N' sont les nappes d'un même plongement adapté.

- (b) Il reste à étendre ce plongement de façon à obtenir pour nappes N et N' en entier. Soit donc ψ un plongement de M dans W , adapté à f en c (on supposera même, pour simplifier, que ψ envoie la fonction h sur la fonction f) tel que l'image $\psi(N)$ de la nappe modèle soit une sous-variété D de N , dont le bord S est au niveau -1 . Soit $-b^2$ le niveau du bord de N , le complémentaire de D dans N est une couronne C difféomorphe au produit $S^{i-1} \times [-b^2, -1]$ par un difféomorphisme qui envoie la fonction f sur la projection sur le segment $[-b^2, -1]$ (d'après le théorème 2 du paragraphe 1). Toujours d'après le paragraphe 1, on peut trouver un voisinage tubulaire fermé T de C dont les fibres sont à niveau constant. À l'aide d'une rétractions de M le long des lignes de niveau de h , on peut modifier ψ de façon que l'image de la surface de niveau inférieure de M (de niveau -1) soit contenue dans T (voir paragraphe 3, n° 1).

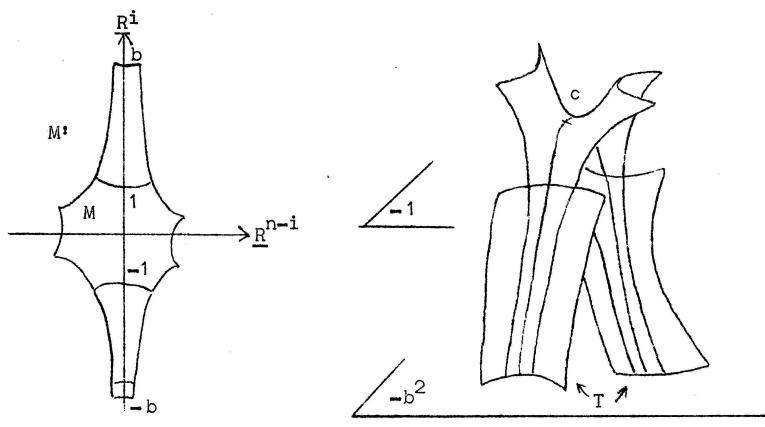


figure 11

figure 12

Soit, dans le modèle \mathbb{R}^n , M' le voisinage 0 obtenu en saturant M jusqu'au niveau inférieur $-b^2$ le long des lignes de gradient de h ; M' est défini par les inégalités: $-b^2 \leq -|Y|^2 + |Z|^2 \leq 1$; $|Y| \cdot |Z| \leq 1$. Le plongement ψ se prolonge en plongement $\psi' : M' \rightarrow W$, respectant les niveaux, et envoyant la couronne ($Z = 0, 1 \leq |Y|^2 \leq b^2$) sur la couronne C . Pour construire ψ' , il suffit d'utiliser la trivialisation de T . Une rétraction de M' sur M le long de lignes de gradient de h permet de transformer ψ' en un plongement adapté ayant toutes les propriétés annoncées.

Il ne reste plus qu'à recommencer, pour la nappe montante, les opérations ci-dessus en remarquant qu'elles ne modifient pas l'image de l'autre nappe.

4. Nappes de gradient.

DÉFINITION. Soit N une nappe descendante du point critique c , dont le bord bN est au niveau $f(c) - b^2$ et supposons que la variété W est munie d'une métrique riemannienne; on dit que la nappe N est la **nappe de gradient** pour cette métrique si N est la réunion des lignes de gradient de la fonction f comprises entre les niveaux $f(c)$ et $f(c) - b^2$ auxquelles le point c est adhérent. Il y a une définition analogue pour la nappe montante.

Par exemple, dans le voisinage de Morse modèle M , les nappes sont les nappes de gradient pour

la métrique induite par la métrique euclidienne ordinaire de \mathbb{R}^n .

PROPOSITION 4. *Toute nappe N du point critique c est nappe de gradient pour une certaine métrique riemannienne sur W .*

La nappe N est en effet l'image de la nappe canonique par un plongement adapté φ du voisinage de Morse modèle M dans W . Elle est donc nappe de gradient pour toute métrique prolongeant la métrique sur $\varphi(M)$ transportée de celle de M .

Plus généralement, soient N_1, N_2, \dots, N_r des nappes descendantes et N'_1, N'_2, \dots, N'_r des nappes montantes relative aux points critiques c_1, c_2, \dots, c_r telles que les plans tangents en c_j à N_j et N'_j soient conjugués; si ces nappes sont "disjointes", c'est-à-dire sans autre point d'intersection que les $c_j = N_j \cap N'_j$, il existe une métrique riemannienne pour laquelle toutes ces nappes sont nappes de gradient. Il existe en effet des plongements $\varphi_j : M \rightarrow W$ pour lesquels N_j et N'_j sont images des nappes canoniques et dont les images ont contenues dans des voisinages des $N_j \cup N'_j$ assez petits pour être disjoints.

Application au prolongement d'une nappe. Étant donnée une nappe N descendante du point critique c jusqu'au niveau $f(c) - b^2$, on munit W d'une métrique adaptée à la nappe N (cf. proposition 4). Supposons que par tout point de bN passe une ligne intégrale de grad. f qui soit définie entre les niveau $f(c) - a^2 - b^2$ et $f(c) - b^2$; alors la réunion N' de la nappe N et de toutes ces lignes de gradient est une nappe descendant de c jusqu'au niveau $f(c) - a^2 - b^2$. Ce la résulte immédiatement de la caractérisation des nappe. (proposition 3).

Paragraphe 4. UN LEMME UTILE.

Pour finir ce chapitre, nous démontrons un lemme technique que nous utiliserons par la suite. Le lecteur pressé ou peu courageux peut s'abstenir d'en lire la démonstration.

PROPOSITION 5. *Soit N une nappe d'un point critique d'une fonction de Morse f sur W ; si $(\varphi_t)_{t \in [0, 1]}$ est une isotopie du bord bN de N dans la surface de niveau de bN , dont l'image ne contienne aucun point critique de f , il existe une nappe N' , qui coïncide avec N en-dehors d'un voisinage arbitraire de bN dans N , et dont le bord bN' est l'image $\varphi_1(bN)$ de l'extrémité de l'isotopie (φ_t) .*

Soit a le niveau de bN , nous allons construire une nappe N' qui coïncide avec N au-dessus du niveau $a + \varepsilon$. Soit V un voisinage de l'image de φ_t (et en particulier de bN) dans la surface de niveau a ; on peut supposer que V est une variété à bord, et on sait alors (paragraphe 1, proposition 2) qu'il existe un tube T , compris entre les niveaux a et $a + \eta$, (avec $\eta \leq \varepsilon$) dont l'intersection avec la surface de niveau a soit V , et un difféomorphisme $\psi : V \times [0, \eta] \rightarrow T$ qui envoie $bN \times [0, \eta]$ sur la couronne C de N comprise entre les niveaux a et $a + \eta$, et tel que $f(\psi(x, y)) = a + y$, où $x \in V$ et $y \in [0, \eta]$. Désignons par ρ une application différentiable de $[0, \eta]$ dans $[0, 1]$ telle que $\rho(0) = 1$ et $\rho(\eta) = \rho'(\eta) = 0$, et par C' l'image de $bN \times [0, \eta]$ dans T par l'application $\theta : (x, y) \mapsto \psi(\varphi_{\rho(y)}(x), y)$. Ce plongement est tangent en tout point de $bN \times \{\eta\}$ à la restriction de ψ à $bN \times \{0, \eta\}$ (d'après le

choix de ρ), et f induit sur C' une fonction sans point critique puisque, d'après l'expression du plongement θ , C' est transversale aux surfaces de niveau de f . D'après la caractérisation de nappes, la sous-variété N' de W obtenu en recollant C' à N à la place de C , est une nappe, ce qui achève la démonstration.

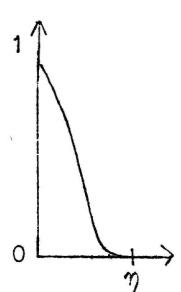
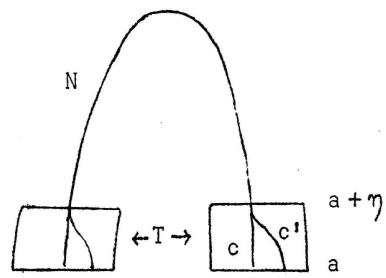
fig. 13 : la fonction ρ 

figure 14

CHAPITRE III

CROISEMENTS ET NAISSANCES

Dans ce chapitre, on démontre (paragraphe 2) l'existence sur toute triade d'une fonction de Morse ordonnée, c'est-à-dire dont les valeurs critiques sont fonction croissante de leur indice. On obtient une telle fonction par déformation d'une fonction de Morse arbitraire donnée sur la tirade. On étudie d'abord un modèle de croisement de deux points critiques mal rangés (paragraphe 1), puis on plonge le modèle dans la triade. De même, on décrit au paragraphe 3 un modèle de naissance dans d'un couple de points critiques, l'un d'indice i , l'autre d'indice $i + 1$, et donne (paragraphe 4) un critère pour que le plongement de ce modèle permette la cancellation d'un tel couple de points critiques dans une triade.

Paragraphe 1. CHEMIN ÉLÉMENTAIRE DESCENDANT

Soit $h : M \rightarrow [-1, 1]$ la fonction de Morse canonique sur le voisinage modèle M , et $\bar{\omega} : M \rightarrow [0, 1]$ une fonction cloche à support contenu dans l'intérieur de M , et égale à 1 au voisinage de 0. Pour tout $\lambda \in [0, 1]$, la fonction

$$h_\lambda = h - \lambda \varepsilon \bar{\omega}$$

est une fonction de Morse dont l'unique point critique est 0, pourvu que $\varepsilon > 0$ soit assez petit. Pour $\lambda = 1$, la valeur critique correspondante est $h_1(0) = -\varepsilon$.

DÉFINITION. On appelle **chemin élémentaire descendante** relatif au point critique c de la fonction de Morse $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ un chemin $(f_\lambda)_{\lambda \in [0, 1]}$ d'origine f dans l'espace F des fonctions sur W pour lequel il existe un plongement $\varphi : M \rightarrow W$ adapté à f en c tel que pour tout $\lambda \in [0, 1]$ on ait:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & W \\ h_\lambda \downarrow & \varphi' \downarrow f_\lambda & f_\lambda \cdot \varphi = \varphi' \cdot h_\lambda \\ \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \end{array}$$

$$f_\lambda |_{W \setminus \varphi(M)} = f |_{W \setminus \varphi(M)}$$

Un tel chemin est entièrement déterminé par la donnée du plongement adapté φ . Remarquons aussi que f_λ est une fonction de Morse pour toutes les valeurs de $\lambda \in [0, 1]$ sauf un nombre fini: le seul accident possible est que la valeur critique $f_\lambda(c)$ soit égale à une autre valeur critique $f(c')$. On dit alors que le chemin (f_λ) a réalisé le croisement des valeurs critiques en c et c' .

PROPOSITION 1. Soit N une nappe descendante du point critique c jusqu'au niveau $f(bN) = a$, pour toute valeur $b \in]a, f(c)[$ il existe un chemin élémentaire descendante (f_λ) relatif au point c tel que $f_\lambda(c) = b$.

Démonstration. La nappe N est image de la nappe canonique par un plongement adapté φ :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{M} & \xrightarrow{\varphi} & W \\ h \downarrow & \varphi' & \downarrow f \\ \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \end{array}$$

On a vu (chapitre II, §3, n° 1) qu'on peut choisir le couple (φ, φ') de telle sorte que $\varphi'(-\varepsilon) = b$. Le chemin élémentaire descendant correspondant est le chemin cherché.

Paragraphe 2. FONCTION DE MORSE ORDONNÉE SUR UNE TRIADE.

DÉFINITION. Une **fonction de Morse ordonnée** sur la variété W est une fonction de Morse $f: W \rightarrow \mathbb{R}$ dont les valeurs critiques sont rangées dans l'ordre croissante des indices, c'est-à-dire qu'on a:

$$(1) \quad [f(c) - f(c')] \cdot [\text{indice}(c) - \text{indice}(c')] \geq 0$$

pour tout couple (c, c') de points critiques.

THÉORÈME 1. *Sur toute triade compact il existe une fonction de Morse ordonnée.*

Démonstration. Il existe sur la triade W une fonctions de Morse f ; la fonction présente un nombre fini de points critiques et elle est ordonnée si et seulement si la relation (1) est vérifiée pour tout couple (c, c') de points critiques *consécutifs* (i.e. tel qu'il n'y ait aucune valeur critique comprise entre $f(c)$ et $f(c')$). Le théorème 1 résulte alors de la

PROPOSITION 2. *Si c et c' sont deux points critiques consécutifs de la fonction de Morse f avec $f(c) \leq f(c')$ et si $\text{indice}(c) \leq \text{indice}(c')$ il existe un chemin d'origine f dans l'espace \mathbf{F} qui réalise le croisement des valeurs en c et c' . (C'est-à-dire un chemin $(f_t)_{t \in [0, 1]}$ où f_t est une fonctions de Morse ayant mêmes valeurs critiques que f en dehors de c et c' pour toute valeur de t sauf $t_0 \in]0, 1[$ où l'on a $f_{t_0}(c) = f_{t_0}(c')$, et l'extrémité f_1 de ce chemin vérifie $f_1(c) < f_1(c')$).*

On va construire explicitement ce chemin: ce sera un chemin élémentaire descendant relatif au point critique c . On peut d'ailleurs signaler que l'existence d'un chemin de croisement entre c et c' implique toujours l'existence d'un chemin élémentaire réalisant ce croisement. Compte tenu de la proposition 1, l'existence d'un chemin élémentaire convenable est une conséquence de la

PROPOSITION 3. *Si c et c' sont deux points critiques consécutifs de la fonction f avec*

$$\begin{array}{c} f(c') < f(c) \\ \text{indice}(c) \leq \text{indice}(c') \end{array}$$

il existe une nappe N descendante de c et de niveau inférieur $f(bN) < f(c')$.

Démonstration. Soient N_1 une nappe descendante relative à c et N'_1 une nappe montante relative à c' supposées toutes deux assez petites pour être disjointes. On sait (chapitre II, §3, n° 4) qu'on peut alors munir W d'une métrique riemannienne pour laquelle N_1 et N'_1 sont des nappes de gradient, et

qu'on peut prolonger ces deux nappes par les lignes de gradient jusqu'à un niveau intermédiaire $a \in]f(c'), f(c)[$. A ce niveau, les bords bN_2 et bN'_2 des nappes prolongées sont respectivement une $(i-1)$ -sphère et une $(n-i'-1)$ -sphère plongées dans la $(n-1)$ -variété $f^{-1}(a)$ (on a désigné par i et i' les indices respectifs de c et c'). Si ces bords sont disjoints, les lignes de gradient de tous les points de bN_2 se prolongent jusqu'à un niveau inférieur à $f(c')$ et la nappe descendante prolongée convient.

Dans le cas contraire et si $i \leq i'$ on peut remplacer N_2 par une nappe N_3 dont le bord $bN_3 \subset f^{-1}(a)$ est disjoint de bN_2 . En effet, la somme $(i-1) + (n-i'-1)$ des dimensions de variétés bN_2 et bN'_2 est strictement inférieure à la dimension $(n-1)$ de la surface de niveau $f^{-1}(a)$ et le théorème de séparation de Whitney (ou bien le théorème de transversalité de Thom) fournit une isotopie de bN_2 dans la surface de niveau dont l'extrémité bN_3 est disjointe de bN'_2 : d'où la nappe N_3 d'après la proposition 5 du chapitre II.

Pour une métrique adaptée aux nappes (disjointes) N_3 et N'_2 , les lignes de gradient permettent de prolonger N_3 en la nappe N cherchée (voir figure 1).

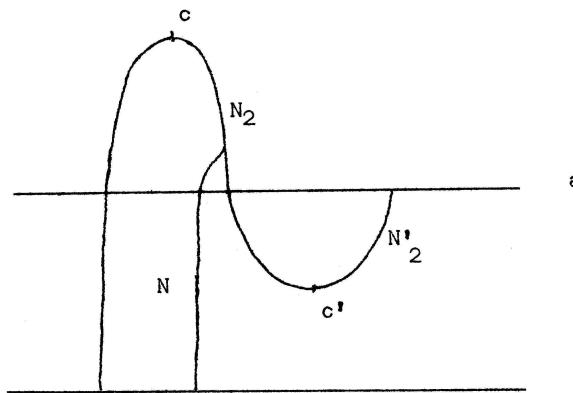


figure 1

Paragraphe 3. MODÈLE DE NAISSANCE.

1. Première étude du modèle.

Considérons sur \mathbb{R}^n la fonction numérique

$$k_s(x) = -x_1^2 - \cdots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + x_n^3 - 3sx_n.$$

Ses dérivées partielles sont les suivantes:

$$\begin{aligned} \partial k / \partial x_1 &= -2x_1, \dots, \partial k / \partial x_i = -2x_i; \\ \partial k / \partial x_{i+1} &= 2x_{i+1}, \dots, \partial k / \partial x_{n-1} = 2x_{n-1}; \\ \partial k / \partial x_n &= 3(x_n^2 - s). \end{aligned}$$

Il en résulte que la fonction k_s présente:

- pour $s < 0$ aucun point critique;
- pour $s > 0$ deux points critiques non-dégénérés sur la droite $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 0$; l'un pour $x_n = \sqrt{s}$ a pour indice i et pour valeur critique $-2s^{3/2}$, l'autre, pour $x_n = -\sqrt{s}$, a pour indice

- $\{i+1\}$ et pour valeur critique $2s^{3/2}$,
- pour $s=0$ un point critique dégénéré en $0 \in \mathbb{R}^n$.

Cet exemple montre comment apparaît un couple ordonné de ponts critiques d'indices consécutifs i et $(i+1)$.

2. Plongement dans la variété.

Soit $\bar{\omega} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ une fonction à support compact égale à 1 dans un voisinage du segment $(x_1 = \dots = x_{n-1} = 0, -1 \leq x_n \leq 1)$, on pose:

$$l_t(x) = -x_1^2 - \dots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_{n-1}^2 + x_n^3 - 3\varepsilon[1 - (t+1)\bar{\omega}(x)]x_n.$$

Hors du support de $\bar{\omega}$ la fonction $l_t(x) = k_{-\varepsilon}(x)$ n'a pas de points critiques. Dans le fermé $\bar{\omega}^{-1}(1)$, la fonction $l_t(x) = k_{\varepsilon}(x)$ a des points critiques déjà étudiés. Dans le compact adhérence($\text{Supp } (\omega) \setminus \bar{\omega}^{-1}(1)$) la fonction k_0 n'a pas de point critique; pour $t \in [-1, 1]$, on peut choisir $\varepsilon > 0$ assez petit pour que la fonction l_t , assez voisine de k_0 , n'y ait pas non plus de point critique.

L'application $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, L_{-1}(x))$$

est un difféomorphisme puisque $\partial L_{-1} / \partial x_n$ ne s'annule jamais. En la composant avec une homothétie de rapport ψ' assez petit, on obtient un difféomorphisme ψ qui envoie le support de $\bar{\omega}$ à l'intérieur du cylindre $D^{n-1} \times I \subset \mathbb{R}^n$. On note B (comme 'birth') l'image réciproque $\psi^{-1}(D^{n-1} \times I)$.

PROPOSITION 4. *En tout point $y \in N$ non critique pour la fonction f on peut faire apparaître un couple de points critiques d'indices i et $(i+1)$ en déformant la fonction f dans un voisinage arbitraire de y .*

Démonstration. Soit $\varphi : D^{n-1} \times I \rightarrow W$ un plongement adapté à la fonction en y (chapitre II, § 1, n° 1), c'est-à-dire qu'on a un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} D^{n-1} \times I & \xrightarrow{\varphi} & W \\ p_2 \downarrow & \varphi' & \downarrow f \\ I & \rightarrow & \mathbb{R} \end{array}$$

Si l'on note $\theta = \varphi \cdot \psi$ et $\theta' = \varphi' \cdot \psi'$, on définit, pour tout $t \in [-1, 1]$ la fonction $f_t : W \rightarrow \mathbb{R}$ par:

$$\begin{aligned} f_t &= f \text{ en dehors de } \theta(B) \\ f_t \cdot \theta &= \theta' \cdot l_t \quad \text{sur } \theta(B). \end{aligned}$$

Pour $t = -1$, on a $f_{-1} = f$ à cause de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\theta} & W \\ l_{-1} \downarrow & \theta' & \downarrow f \\ \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \end{array}$$

Comme la déformation de la fonction l , lorsque varie le paramètre t n'est effective que dans le support de ω qui est contenu dans l'intérieur de B , la fonction f_t est différentiable; c'est même une fonction de Morse pour $t \neq 0$. Pour $t < 0$ elle a mêmes points critiques que f , pour $t = 0$, il y a un point critique dégénéré en y , qui se dédouble pour $t > 0$ en un couple ordonné d'un point critique d'indice i et d'un point d'indice $(i + 1)$ contenus dans $\theta(B)$.

Paragraphe 4. COLLISION ET CANCELLATION DE DEUX POINTS CRITIQUES.

1. Énoncé du résultat.

DÉFINITION. Soit (c_1, c_2) un couple ordonné de deux points critique consécutifs d'indices i et $(i + 1)$ pour la fonction de Morse $f: W \rightarrow \mathbb{R}$. Une nappe montante N_1 relative à c_1 et une nappe descendante N_2 relative à c_2 telles que $f(bN_1) = f(bN_2) = a$, où $f(c_1) < a < f(c_2)$, sont **en bonne position** si la $(n - i - 1)$ -sphère bN_1 et la i -sphère bN_2 se coupent transversalement et en un seul point.

THÉORÈME 2. *Si c_1 et c_2 sont deux points critiques consécutifs pour lesquels il existe deux nappe en bonne positions, il existe un chemin d'origine f dans l'espace \mathbf{F} qui réalise l'élimination de ces deux points critiques.*

C'est-à-dire un chemin $(f_t)_{t \in [0, 2]}$ où f_t est une fonction de Morse ayant mêmes valeurs critiques que f en dehors de c_1 et c_2 pour toute valeur de t sauf $t = 1$ où l'on a un point critique dégénéré (provenant de la collision de c_1 et c_2) et la fonction f_2 a mêmes points et valeurs critiques que f sauf c_1 et c_2 qui ont disparu.

Comme au paragraphe 3, on obtient un tel chemin en plongeant dans W une déformation du type (k_s) .

2. Description du voisinage double modèle \mathbf{D} .

Soient \mathbf{M}_1 et \mathbf{M}_2 les voisinages de Morse modèles pour les indices i et $(i + 1)$ munis des fonctions de Morse canoniques h_1 et h_2 . Soit $\psi_1: D^i \times S^{n-i-1} \rightarrow \mathbf{M}_1$ le paramétrage (chapitre II, paragraphe 2, n° 2) de la surface de niveau supérieur de \mathbf{M}_1 . Si b_1 est un point du bord supérieur de la nappe montante de \mathbf{M}_1 et si $\theta_1: D^{n-i-1} \rightarrow S^{n-i-1} \times \{0\}$ est un plongement tel que $\theta_1(0) = \psi_1^{-1}(b_1)$, le plongement

$$\psi_1 \cdot (\text{id} \times \theta_1): D^i \times D^{n-i-1} \rightarrow \mathbf{M}_1$$

est un paramétrage d'un voisinage de b_1 dans la surface de niveau supérieur de \mathbf{M}_1 . À l'aide des linges de gradient de la fonction h_1 , on prolonge ce plongement en un paramétrage d'un voisinage de b_1 dans \mathbf{M}_1 noté $\chi_1: D^i \times D^{n-i-1} \times [-\varepsilon, 0] \rightarrow \mathbf{M}_1$ adapté à la fonction h_1 par la relation $h_1 \cdot \chi_1(x, y, t) = 1 - t$.

De la même manière, on construit un paramétrage $\chi_2: D^i \times D^{n-i-1} \times [-\varepsilon, 0] \rightarrow \mathbf{M}_2$ d'un voisinage d'un point b_2 dans la surface de niveau inférieur de \mathbf{M}_2 . Le voisinage double \mathbf{D} est la réunion de \mathbf{M}_1 et de \mathbf{M}_2 avec l'identification évidente de $\chi_1(D^i \times D^{n-i-1} \times \{0\})$ avec $\chi_2(D^i \times D^{n-i-1} \times \{0\})$. Le voisinage \mathbf{D} est une variété à bord, arêtes et coins, munie d'un paramétrage d'un voisinage du point b (qui résulte de l'identification de b_1 et b_2) par le plongement $\chi: D^i \times D^{n-i-1} \times [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbf{D}$ obtenu en recollant χ_1 et χ_2 . Sur \mathbf{D} la fonction h obtenue en recollant $h_1 - 1$ et $h_2 + 1$ est une fonction de Morse; on a $h \cdot \chi(x, y, t) = t$.

On va maintenant munir d'une métrique riemannienne en déformant les métriques canoniques de M_1 et M_2 au voisinage de l'image de χ de façon qu'elles se recollent, et ceci de telle sorte que les courbes $t \mapsto \chi(x, y, t)$ soient des lignes de gradient de h , et, plus précisément, que les lignes de gradient de h soient réunions de lignes de gradient de h_1 et h_2 . Pour cela, on recolle la métrique de M_1 , celle de M_2 et l'image par χ de la métrique produit de $D^i \times D^{n-i-1} \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ à l'aide d'une partition de l'unité.

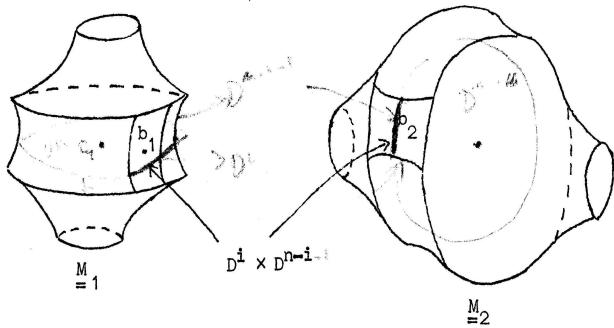


figure 2 : formation du modèle double.

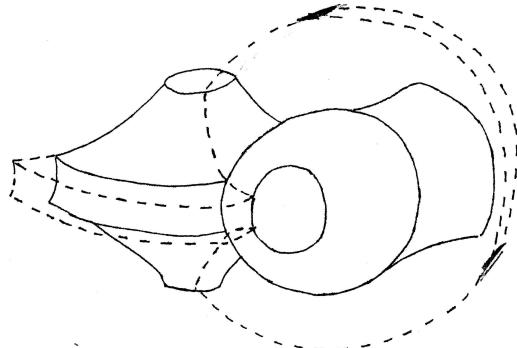


figure 2 bis : le modèle double et son saturé (en pointillé)

3. Plongement et saturation du double modèle.

PROPOSITION 5. *Si c_1 et c_2 sont deux points critiques consécutifs de la fonction $f: W \rightarrow \mathbb{R}$ pour lesquels il existe deux nappes N_1 et N_2 en bonne position, il existe un plongement $\varphi_1: M_1 \rightarrow W$ adapté à la nappe N_1 et un plongement $\varphi_2: M_2 \rightarrow W$ adapté à la nappe N_2 qui se recollent en un plongement $\varphi: D \rightarrow W$ adapté à la fonction f par un difféomorphisme $\varphi': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $f \cdot \varphi = \varphi' \cdot h$.*

Démonstration. Soient $\varphi_1: M_1 \rightarrow W$ et $\varphi_2: M_2 \rightarrow W$ deux plongements adaptés des modèles pour lesquels N_1 et N_2 sont respectivement les images des nappes canoniques. Si V est la variété de niveau $f^{-1}(a)$ et si $M_1 = \varphi_1(M_1)$ et $M_2 = \varphi_2(M_2)$, les intersections $M_i \cap V$ sont des voisinages tubulaires des sphères bN_i . Si on a choisi φ_1 et φ_2 d'images assez voisines des nappes (chapitre II, paragraphe 3, n° 1, propriété (a)), la condition de transversalité de bN_1 et bN_2 au point $b' = bN_1 \cap bN_2$ assure que l'intersection de ces tubes est "bonne": c'est un cube voisinage tubulaire trivial d'un voisinage de b' dans chacune des nappes.

Soit $\psi': D^i \times D^{n-i-1} \rightarrow V$ un paramétrage de ce cube; en composant φ_1 avec un automorphisme horizontal de M_1 (c'est-à-dire conservant les surfaces de niveau de la fonction h_1) qui conserve la nappe montante modèle, on peut s'arranger pour que $\psi' = \varphi_1 \cdot \chi_1 | D^i \times D^{n-i-1} \times \{0\}$. On fait la même chose pour φ_2 . Supposons en outre qu'on a choisi φ_1 de telle sorte que $f \cdot \varphi_1 \cdot \chi_1(x, y, t) = a + t$ et φ_2 de telle sorte que $f \cdot \varphi_2 \cdot \chi_2(x, y, t) = a + t$; alors les deux plongements φ_1 et φ_2 se recollent en une application continue $\varphi: D \rightarrow W$, et si φ'_1 et φ'_2 sont les deux changements de paramètre associés à φ_1 et φ_2 , la fonction $\varphi'_1(1+t) = a+t$ sur $[-\varepsilon, 0]$ se recolle différentiablement à la fonction $\varphi'_2(t-1) = a+t$ sur $[0, \varepsilon]$. Comme la fonction h est obtenue en recollant $h_1 - 1$ et $h_2 + 1$, les égalités $f \cdot \varphi_1 = \varphi'_1 \cdot h_1$ et $f \cdot \varphi_2 = \varphi'_2 \cdot h_2$ entraînent que $f \cdot \varphi = \varphi' \cdot h$.

Il ne reste qu'à rendre différentiable le long de $M_1 \cap M_2$ l'application φ . Il existe des coordonnées locales (X, Y, T) dans W , au voisinage du cube image de $\varphi \cdot \chi$, pour lesquelles on a:

$$\begin{aligned}\varphi_1 \cdot \chi_1(x, y, t) &= (x, \eta(x, y, t), t) \text{ où } \eta(x, y, 0) = y \\ \varphi_2 \cdot \chi_2(x, y, t) &= (\zeta(x, y, t), y, t) \text{ où } \zeta(x, y, 0) = x.\end{aligned}$$

Par une déformation de plongement $\varphi_1 \cdot \chi_1$ laissant fixes les images des surfaces ($t = \text{constante}$) et des surfaces ($x = \text{constante}$), on peut déformer la fonction η en une fonction égale à y au voisinage de $t = 0$. Cette déformation se transporte par χ_1^{-1} en une déformation de φ_1 sur un voisinage de b_1 qui conserve les images des surfaces de niveau et de la nappe canonique montante. Cette déformation se prolonge en une déformation de φ_1 sur M_1 tout entier ayant les mêmes propriétés. Une opération analogue sur φ_2 permet de rendre différentiable le plongement φ qui vérifie toutes les conditions de la proposition 5.

Remarque. Comme les points critiques c_1 et c_2 sont consécutifs, on peut toujours supposer que le plongement $\varphi : D \rightarrow W$ a une image $D = \varphi(D)$ comprise entre des niveaux entre lesquels les seuls points critiques de la fonction f sont les points c_1 et c_2 .

Saturation. Soit $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ (resp. $f' : W' \rightarrow \mathbb{R}$) une fonction de Morse, c_1 et c_2 (resp. c'_1 et c'_2) deux points critiques consécutifs d'indices i et $(i+1)$ pour lesquels il existe des nappes en bonne positions, et $\varphi : D \rightarrow W$ (resp. $\varphi' : D' \rightarrow W'$) un plongement (proposition 5) du voisinage double modèle adapté à ce couple de points critiques, d'image $\varphi(D) = D$ (resp. $\varphi'(D) = D'$). L'application $\lambda = \varphi^{-1} \varphi' : D \rightarrow D'$ est un isomorphisme, et il existe un automorphisme λ' de \mathbb{R} tel que $f' \cdot \lambda = \lambda' \cdot f$.

Munissons W et W' de métrique riemannienne qui prolongent les métriques de D et D' images de celle de D par φ et φ' . Soit $S \subset W$ le fermé obtenu en prenant la réunion de toutes les lignes de gradient de f rencontrant D et limitées aux niveaux extrêmes de D : on dit que S est le **saturé** de D . Le saturé S est une variété à bord et à arêtes obtenue en collant à D deux pavés isomorphes à $D^i \times D^{n-i-1} \times I$, l'un à la surface de niveau supérieur de M_1 dans le complément de $M_1 \cap M_2$ par la face $D^i \times D^{n-i-1} \times \{0\}$, et à la surface latérale de M_2 par la face $D^i \times S^{n-i-2} \times I$, l'autre étant collé de façon symétrique (voir figures 3 et 4).

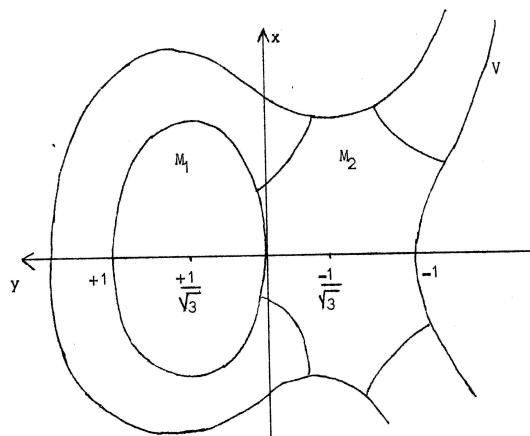


figure 3

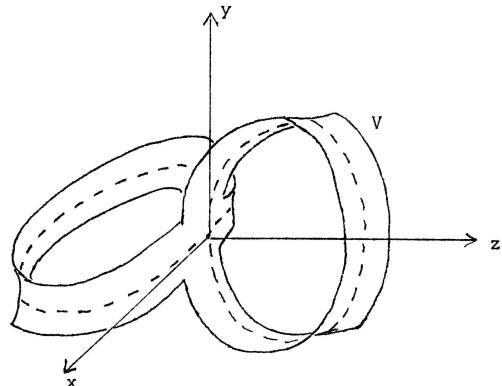
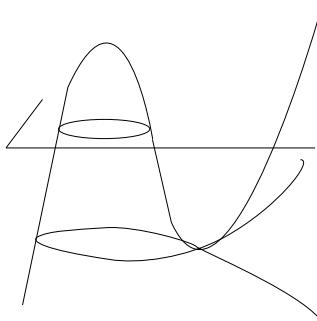


figure 4



Il est claire que l'isomorphisme λ se prolonge en un isomorphisme de S sur le saturé S' de D' transformant encore f' en $\lambda'f'$. Il en résulte que s'il existe une déformation à support dans l'intérieur de S qui élimine les points critiques c_1 et c_2 , l'application λ la transporte en une déformation analogue pour la fonction f' .

Conclusion. Pour démontrer le théorème 2, il suffit de trouver, pour une fonction de Morse particulière, une déformation à support contenu dans un voisinage double saturé qui éliminé un couple de points critiques d'indices i et $(i+1)$, et ceci pour tout i .

4. Retour au modèle.

On choisit comme fonction particulière la fonction

$$k_\varepsilon(x) = -x_1^2 - \cdots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + x_n^3 - 3\varepsilon' x_n$$

où $\varepsilon' > 0$ sera fixé. La déformation est donnée, pour $t \in [0, 2]$, par

$$f_t(x) = -x_1^2 - \cdots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + x_n^3 - 3\varepsilon'[1 - t\bar{\omega}(x)]x_n$$

où $\bar{\omega} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ est la fonction cloche du paragraphe 3, n° 2. Comme au paragraphe 3, hors du support de $\bar{\omega}$, la fonction $f_t = k_\varepsilon$ n'a pas de point critique. Dans le compact $\bar{\omega}^{-1}(1)$, la fonction $f_t = k_{\varepsilon'(1-t)}$ a deux points critiques déjà étudiés pour $0 \leq t < 1$, un point critique dégénéré pour $t = 1$ et aucun point critique pour $t > 1$. Enfin $\varepsilon' > 0$ peut être choisi assez petit pour que, sur le compact adhérence($\text{supp } (\omega) \setminus \bar{\omega}^{-1}(1)$) et pour $t \in [0, 2]$, la fonction f_t , assez voisine C^1 de la fonction de la fonction k_0 , n'ait pas de point critique.

Montrons qu'il existe un voisinage double saturé de deux nappes en bonne position de $f_0 = k_\varepsilon$ assez grand pour contenir le support de la déformation f_t , c'est-à-dire le support de $\bar{\omega}$. Il suffit d'étudier les cas suivants (affinité sur la variable x_n);

1^{er} cas: $i = 0$; $f(x, y) = |x|^2 + y^3 - y$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Le cas de $i = n-1$ est du même coup résolu par la fonction $-f$.

2^{eme} cas: $1 \leq i \leq n-2$; $f(x, y, z) = -|x|^2 + |y|^2 + z^3 - z$ où $(x, y, z) \in \mathbb{R}^i \times \mathbb{R}^{n-i-1} \times \mathbb{R}$.

Nous allons démontrer dans ces deux cas le

LEMME 1. Pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$, il existe un voisinage double saturé S pour la fonction f dont l'intérieur contient K .

Choisissons les nappes en bonne position:

1^{er} cas: $c_1 = (0, 1/\sqrt{3})$; N_1 = composante connexe de $(f \leq 0)$ contenant c_1
 $c_2 = (0, -1/\sqrt{3})$; $N_2 = (x = 0; -1 \leq y \leq 0)$.

2^{eme} cas: $c_1 = (0, 0, 1/\sqrt{3})$; N_1 contenue dans $(x = 0)$ et $f(bN_1) = 0$;
 $c_2 = (0, 0, -1/\sqrt{3})$; N_2 contenue dans $(y = 0)$ et $f(bN_2) = 0$.

Soit $\varphi : \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ un plongement adapté à ces deux nappes; on munit \mathbb{R}^n d'une métrique prolongeant l'image par φ de celle de \mathbf{D} . Puisque c_1 et c_2 sont seuls points critiques de f , on peut

prolonger le plongement φ le long des lignes de gradient de f de sorte que les niveaux extrêmes du saturé S soient $-A$ et A tels que $f(K) \subset [-A, A]$.

Soit $\mathbf{P} \subset \mathbf{D}$ la surface de niveau $h^{-1}(0)$: c'est le "plombage" de deux couronnes $S^i \times D^{n-i-1}$ et $D^i \times S^{n-i-1}$. La donnée de $\varphi|_{\mathbf{P}}$, plongement dans la variété de niveau $V = f^{-1}(0)$, suffit pour reconstituer $\varphi(\mathbf{D})$ et S à l'aide des linges de gradient de f . Si, d'autre part, K' est la "projection" de K sur V par les lignes de gradient de la fonction f , le lemme 1 est démontré dès que K' est contenu dans $\varphi(\mathbf{P})$. Il suffit donc de démontrer le

LEMME 2. Si $\varphi : \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un plongement adapté aux points critiques c_1 et c_2 et aux nappes N_1 et N_2 , pour tout compact $K' \subset V$ il existe une isotopie $(\gamma_t)_{t \in [0, 1]}$ du plongement $\varphi|_{\mathbf{P}} = \gamma : \mathbf{P} \rightarrow V$ telle que K' soit contenu dans $\gamma_1(\mathbf{P})$.

1^{er} cas: On traite seulement du cas $n = 2$ et $f(x, y) = x^2 + y^3 - y$; (on obtient le cas générale à partir de celui-là par rotation dans $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ autour de l'axe $\{0\} \times \mathbb{R}$). La variété V est alors la courbe d'équation

$$x^2 + y^3 - y = 0$$

qui est difféomorphe à la droite, et \mathbf{F} est un segment: d'où le lemme (voir figure 3).

2^{eme} cas: On traite seulement du cas $n = 3$, $i = 1$ et $f(x, y, z) = -x^2 + y^2 + z^3 - z$; (on obtient le cas générale à partir de celui-là par deux rotations). La variété V est alors la surface d'équation

$$-x^2 + y^2 + z^3 - z = 0$$

qui est difféomorphe au tore privé d'un point (penser à la cyclide de Dupin d'équation $x^2(z-1) + y^2(z+1) + z^3 - z = 0$ qui est l'inverse d'un certain tore par rapport à un de ces points) et \mathbf{P} est le plombage de deux couronnes difféomorphe à $S^1 \times I$ dont les âmes sont plongées par φ sur un cercle méridien et un cercle parallèle de $\{S^1 \times S^1\} \setminus \{\text{point}\}$ respectivement: d'où le lemme dans ce dernier cas (voir figure 4).

CHAPITRE IV

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DU h -COBORDISME

Dans ce chapitre, on démontre le théorème du h -cobordisme (voir Introduction): on sait (chapitre III, paragraphe 2, théorème 1) qu'il existe sur tout cobordisme compact une fonction de Morse ordonnée et on va montrer que les hypothèses homologiques de h -cobordisme et l'hypothèse de dimension permettent d'éliminer tous les points critiques de cette fonction par collision (chapitre III, paragraphe 4, théorème 2) d'où la trivialité du h -cobordisme (chapitre II, paragraphe 1, théorème 1).

Dans tout ce chapitre, (W, V, V') désigne une triade compacte, connexe (c'est-à-dire que W est connexe, ce qui ne restreint pas la généralité) munie d'une fonction de Morse ordonnée. On note n la dimension de W ; on note V_i une variété de niveau située entre les points critiques d'indice i et ceux d'indice $(i+1)$ et W_i la partie de W située en-dessous de V_i : c'est une variété à bord $bW_i = V \cup V_i$. On suppose que W est orientée ce qui oriente chaque V_i comme composante du bord de W_i .

Paragraphe 1. TRIADES DONT TOUS LES POINTS CRITIQUES ONT MÊME INDICE.

Dans tout ce paragraphe, on suppose que la triade (W, V, V') est munie d'une fonction de Morse f qui a $(r+1)$ points critiques c_0, c_1, \dots, c_r (indexée dans l'ordre des valeurs critiques décroissantes) qui sont tous des points critiques d'indice i .

1. Métriques adaptées.

PROPOSITION 1. *Il existe un système de nappes N_0, N_1, \dots, N_r , deux à deux disjointes descendant respectivement des points c_0, c_1, \dots, c_r jusqu'à la variété de niveau V . Pour toute donnée de ce type, il existe une métrique riemannienne sur W pour laquelle ces nappes sont de gradient. De plus, pour cette métrique, les nappes de gradient montantes sont deux à deux disjointes et montent jusqu'au niveau de V' .*

La deuxième partie de la proposition est évidente d'après (chapitre III, paragraphe 2, proposition 4). La première partie se démontre par récurrence. Supposons W munie d'une métrique pour laquelle les nappes de gradient de c_1, \dots, c_r soient disjointes, et soit N la nappe de gradient descendant de c_0 jusqu'à une variété V'' de niveau compris entre $f(c_0)$ et $f(c_1)$. Dans V'' (de dimension $(n-1)$) la trace de la nappe montante N'_j de c_j est une sphère de dimension $(n-i-1)$, et bN est une sphère de dimension $(i-1)$; il existe donc une isotopie d'un voisinage de bN dans V'' telle que l'image de bN par l'extrémité de cette isotopie ne rencontre pas les N'_j . La nappe fournie par (chapitre II, paragraphe 4, proposition 5) se prolonge alors, le long des lignes de gradient, entre les niveaux V'' et V .

2. Relation homologiques.

2.1 L'homologie $H_i(W, V)$ est somme directe de $(r+1)$ sous-groupes isomorphes à \mathbb{Z} et $H_q(W, V)$ est nul pour $q \neq i$. En effet, le long des lignes de gradient, on peut rétracter W sur la réunion de V et de toutes les nappes descendantes, d'où l'isomorphisme

$$\bigoplus_j H_q(N_j, bN_j) \cong H_q(V \cup (\bigcup N_j), V) \cong H_q(W, V).$$

Choisissons une orientation sur chaque nappes descendante: les classes fondamentales de nappes (N_j, bN_j) forment une base de $H_i(W, V)$, notée (y_0, y_1, \dots, y_r) .

2.2 Soit $B' = \bigcup N'_j$ la réunion des nappes montantes et $A' = B' \cap V'$. L'application naturelle $H_q(W, V) \rightarrow H_q(W, W \setminus B')$ est un isomorphisme car $W \setminus B'$ se rétracte sur V le long des lignes de f . Mais, par excision, on peut remplacer W par un voisinage tubulaire T de B' (i.e., une réunion disjointe de voisinages tubulaires T_j des nappes montantes N'_j). Si on oriente T_j en orientant sa fibre en c_j comme la nappe N_j qui est tangente, et si on oriente N'_j de sorte que le nombre d'intersection $N_j \cdot N'_j$ soit $+1$, on a alors un isomorphisme de T_j sur $D^{n-i} \times D^i$ d'où un isomorphisme

$$t_q : H_q(W, W \setminus B') \xrightarrow{\cong} \bigoplus_j H_q(D^{n-i} \times (D^i, S^{i-1}))$$

de telle sorte que l'image par t_i de la classe fondamentale y_j de la nappe (N_j, bN_j) soit exactement le générateur canonique du j -ième composant de la somme directe.

2.3 L'injections $(V', V' \setminus A') \rightarrow (W, W \setminus B')$ induit sur l'homologie un isomorphisme sauf en dimension $(n-1)$. Ceci provient du diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_q(V', V' \setminus A') & \rightarrow & H_q(W, W \setminus B') \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ H_q(S^{n-i-1} \times (D^i, S^{i-1})) & \rightarrow & H_q(D^{n-i} \times (D^i, S^{i-1})) \end{array}$$

où la flèche du bas est un isomorphisme pour $q \neq n-1$.

En particulier, si $i \neq n-1$, la composée des flèches

$$H_i(V', V' \setminus A') \xrightarrow{\gamma_2} H_i(W, W \setminus B') \xrightarrow{\gamma_1} H_i(W, V)$$

est un isomorphisme; le groupe $H_i(V', V' \setminus A')$ est un groupe libre à $(r+1)$ générateurs et on peut représenter le générateur correspondant à $y_j \in H_i(W, V)$ par un petit disque rencontrant bN'_j (seulement) transversalement en un point avec un nombre d'intersection égal à $+1$.

2.4 Il en résulte que, si M est une sous-variété orientée de dimension i de V' qui coupe transversalement les bN'_j , l'image de sa classe fondamentale par l'application composée

$$H_i(M) \rightarrow H_i(V') \rightarrow H_i(W) \rightarrow H_i(W, V)$$

est égale à $\sum_j (M \cdot bN_j) y_j$ en tenant compte de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} & H_i(V', V' \setminus A') & \\ \nearrow & & \searrow \\ H_i(V') & & H_i(W, W \setminus B') \xrightarrow{\cong} H_i(W, V) \\ \searrow & & \nearrow \\ & H_i(W) & \end{array}$$

3. Croisement de singularités de même indice.

Soient V'' et V''' deux variétés de niveau situées entre les niveaux de c_0 et de c_1 , V''' étant située au-dessous de V'' .

On note W' la portion de W située entre V et V'' ,

W'' la portion de W située entre V'' et V' ,

W''' la portion de W située entre V'' et V''' ,

W'''' la portion de W située entre V et V''' (voir figure 1).

On rappelle que W est munie d'une métrique riemannienne adaptée (cf. proposition 1) et que N_0 est la nappe descendante de c_0 .

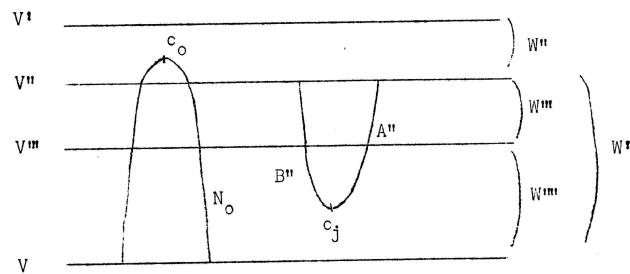


figure 1

On note

N l'espace des nappes descendant de c_0 jusqu'à V , et coïncidant avec N_0 au-dessus de V'' ,

N^* le sous-espace de N formé des nappes qui sont de gradient au-dessus de V''' ,

$B'' = B' \cap W''''$ la réunion des nappes montantes ($W'''' \cap N'_j$) ($1 \leq j \leq r$),

$A'' = B' \cap V'''$ la réunion des intersections avec V''' des nappes N'_j ,

S l'espace des sous-variétés de V''' difféomorphes à S^{i-1} ,

S^* le sous-espace de celles qui ne rencontrent pas A ,

S_0 l'intersection de N_0 et de V''' .

PROPOSITION 2. *On a alors le diagramme commutatif suivant:*

$$\pi_1(S, S^*, S_0) \xrightarrow{\alpha} H_i(V''', V''' \setminus A'')$$

(1)

$$\begin{array}{ccc} \beta \downarrow & & \downarrow \gamma \\ \pi_0(N, N_0) & \xrightarrow{\zeta} & H_i(W', V) \end{array}$$

où les flèches sont définies ci-dessous.

Les espaces N et S , espaces de sous-variétés, sont munis de la topologie quotient de l'espace des plongements par les automorphismes de la source.

Définition de β . Il n'y a pas de point critique entre les niveaux V'' et V''' , et W''' est donc difféomorphe à $V''' \times I$ par un difféomorphisme qui envoie $N_0 \cap W'''$ sur $S_0 \times I$. Ceci entraîne qu'il existe un isomorphisme canonique $\pi_1(S, S^*, S_0) \rightarrow \pi_0(N^*, N_0)$. La flèche β est la flèche composée de cet isomorphisme et de la flèche canonique $\pi_0(N^*, N_0) \rightarrow \pi_0(N, N_0)$.

Définition de ζ . Une nappe N de N est un disque de dimension i , plongé dans W , avec son bord dans V ; elle définit donc une classe d'homologie dans $H_i(W, V)$ qui ne dépend que de la classe d'homotopie du plongement. D'où une application

$$\zeta' : \pi_0(N, N_0) \rightarrow H_i(W', V).$$

Mais chaque nappe $N \in N$ coïncide avec N_0 au-dessus de V'' , donc tout élément de l'image de ζ' induit dans $H_i(W'', V'')$ le même élément que N_0 . La suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_i(W', V) &\rightarrow H_i(W, V) \rightarrow H_i(W, W') \rightarrow 0 \\ &\cong \downarrow \text{excision} \\ &H_i(W'', V'') \end{aligned}$$

montre que l'image de ζ' est dans le sous-espace affine de $H_i(W, V)$ parallèle à $H_i(W', V)$ et issu de la classe définie par N_0 ; la soustraction de cette classe identifie ce sous-espace affine et $H_i(W', V)$. C'est ainsi qu'on définit l'application ζ ; on montrera qu'elle est surjective.

Définition de α . (analogue à celle de ζ') On prend l'image de la classe fondamentale du cylindre $S_0 \times I$ dans V''' .

Définition de γ . C'est l'application composée

$$H_i(V''', V''' \setminus A) \xrightarrow{\gamma_2} H_i(W''', W''' \setminus B') \xrightarrow{\gamma_1} H_i(W''', V) \xrightarrow{\gamma_3} H_i(W', V)$$

où γ_3 est l'isomorphisme induit par rétraction de W''' sur V''' , et γ_1 et γ_2 sont les applications définies au paragraphe 1, n° 2.3.

PROPOSITION 3. *L'application ζ est surjective pour $2 \leq i \leq n - 2$; si V''' est connexe.*

La commutativité du diagramme (1) est évidente d'après la définition des applications α , β , γ et ζ . La surjectivité de ζ résulte de la surjectivité de α et de γ .

L'application γ est bijective pour $i \neq n - 1$. Il suffit d'appliquer le paragraphe 1, n° 2.3 à la triade (W''', V, V'') ce qui montre que γ_1 et γ_2 sont des isomorphismes si $i \neq n - 1$.

L'application α est surjective si $2 \leq i \leq n - 2$ et si V''' est connexe, (pour $i = 1$, on a le même résultat si on ajoute l'hypothèse que le complémentaire de A'' dans V''' est connexe; de même pour $i = n - 1$ si le complémentaire de S_0 dans V''' est connexe).

La sous-variété A'' de V''' est la réunion disjointe de r sphères S_1, \dots, S_r de dimension $(n - i - 1)$; rappelons (paragraphe 1, n° 2.3) que les r générateurs du groupe libre $H_i(V''', V''' \setminus A)$ sont représentés par des petits disques de dimension i transversaux chacun à l'une des S_j ($1 \leq j \leq r$).

Soit P un point de S_0 , et Q un point de S_j ; comme V''' est connexe, il existe un chemin différentiable δ joignant P à Q . On peut supposer que P est le seul point d'intersection de S_0 et du chemin δ , et Q le seul point d'intersection de A'' et de δ , puisque S_0 et A'' sont des sous-variétés de

codimension au moins 2 dans V''' . De plus on peut supposer que ces intersections sont transversales. Il existe alors un plongement du tube $D^{n-2} \times [0, 1 + \varepsilon]$ dont la restriction à $\{0\} \times [0, 1]$ est le chemin δ , et tel que S_0 rencontre le tube suivant un diamètre D de $D^{n-2} \times \{0\}$, et S_j rencontre suivant un diamètre D' de $D^{n-2} \times \{1\}$, et que les S_k , $k \neq j$ ne rencontrent pas le tube. Les disques D et D' sont des diamètres de dimension $(i-1)$ et $(n-i-1)$ respectivement de D^{n-2} . Comme $i-1 \leq n-2-1$, il existe une rotation ρ_t ($t \in [0, 1]$) de D^{n-2} qui transforme D en un diamètre transversale à D' , et d'orientation arbitraire. Soit h une application différentiable de D dans $I = [0, 1]$ qui soit égale et tangente à 0 au bord de D , et égale à 1 au voisinage du centre de D . L'application g de $I \times D$ dans le tube $D^{n-2} \times [0, 1 + \varepsilon]$ définie par

$$\begin{aligned} g(t, x) &= (\rho_{h(x), t}, h(x).t) \quad \text{pour } t \in [0, 1] \\ &= (\rho_{h(x)}, h(x) + t - 1) \quad \text{pour } t \in [1, 1 + \varepsilon] \end{aligned}$$

définit une déformation de D , et donc de S_0 , c'est-à-dire un élément de $\pi_1(\mathcal{S}, \mathcal{S}^*, S_0)$ dont l'image dans $H_i(V''', V''' \setminus A)$ est le générateur défini par un petit disque transverse à S_j , ou son opposé, suivant la rotation ρ_t choisie.

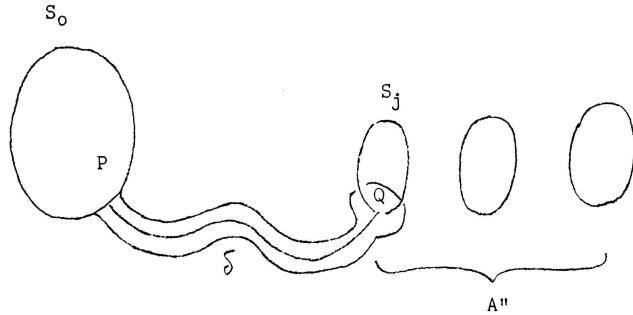


figure 2

Le fait que tous les générateurs de $H_i(V''', V''' \setminus A)$ soient dans l'image de l'application α ne prouve que α est surjective, puisque $\pi_1(\mathcal{S}, \mathcal{S}^*, S_0)$ n'est pas un groupe. Il est cependant bien clair, qu'en itérant la déformation décrite plus haut, on peut obtenir n'importe quelle combinaison linéaire à coefficients entiers relatifs des générateurs de $H_i(V''', V''' \setminus A)$; d'où la surjectivité de l'application α .

4. Le théorème de la base.

THÉORÈME 1. Soit (W, V, V') une triade, f une fonction de Morse sur la triade dont tous les points critiques sont d'indice i ($2 \leq i \leq n-2$), et soit (x_0, x_1, \dots, x_r) une base de $H_i(W, V)$; il existe une fonction de Morse g sur la triade qui a les propriétés suivantes;

- (a). g a les mêmes points critiques que f ,
- (b). g coïncide avec f au voisinage du bord de W ,
- (c). g se déduit de f par un nombre fini de croisements élémentaires,
- (d). g possède un système de nappes descendantes (deux à deux sans point commun) qui réalisent la base (x_0, x_1, \dots, x_r) (en les prenant dans l'ordre des valeurs critiques décroissantes).

Démonstration. Soit (y_0, \dots, y_r) une base de $H_i(W, V)$ réalisée par un système de nappes de la fonction f (numérotée dans l'ordre des valeurs critiques décroissantes). La surjectivité de l'application ζ (n° 3, proposition 3) montre qu'il existe une nappe descendante du point c_0 et disjointe des nappes représentatives de y_1, \dots, y_r , dont l'image dans $H_i(W, V)$ est la somme de y_0 et d'une combinaison linéaire arbitraire des y_j ($1 \leq j \leq r$).

D'autre part, en changeant la fonction f par un chemin élémentaire de traversée, on peut permuter l'ordre des éléments de la base (y_0, \dots, y_r) . Enfin, en changeant l'orientation d'une nappe, on change l'élément de base correspondant en son opposé. Or toute base d'un \mathbb{Z} -module libre de type fini peut être obtenue à partir d'une base donnée par un nombre fini d'opérations de ce type: le théorème en résulte.

En d'autres termes, on a utilisé le fait (élémentaire) que le groupe linéaire $GL(\mathbb{Z}, r+1)$ est engendré par la réunion du sous-groupe des matrices de permutation et du sous-groupe des matrices triangulaires inférieures dont tous les éléments diagonaux sont égaux à ± 1 .

Paragraphe 2. RELATIONS HOMOLOGIQUES ET HOMOTOPIQUES DANS UNE TRIADE ORDONNÉE.

1. Relation homologiques.

1.1 De l'étude des triades qui n'ont de points critiques qu'en dimension i , on déduit par excision que $H_i(W_i, W_{i-1})$ est somme directe de sous-groupes isomorphes à \mathbb{Z} en nombre égal au nombre de points critiques d'indice i , chacun engendré par la classe fondamentale d'une nappe descendante. De plus $H_q(W_i, W_{i-1})$ est nul pour $q \neq i$.

1.2. On en déduit que, pour $i \leq j$, on a $H_q(W_j, W_i) = 0$ si $q \leq i$ et si $j < q$.

1.3. En considérant la suite exacte d'homologie du triple (W_j, W_i, V) on trouve que l'application canonique $H_q(W_i, V) \rightarrow H_q(W_j, V)$ est un isomorphisme dès que $q < i$ ou $j < q$. En particulier, comme $W = W_n$, l'application $H_i(W_{i+1}, V) \rightarrow H_i(W, V)$ est un isomorphisme.

2. Relation homotopiques.

2.1 Dans le cas où il n'y a de ponts critiques que d'indice i , l'image d'une application de S^q dans W peut être séparée des nappes montantes (qui sont des $(n-i)$ -disques) dès que $q + (n-i) \leq n-1$ d'après le théorème de la séparation de Whitney. Or on a vu (paragraphe 1, n° 2.2) que le complémentaire dans W de la réunion des nappes montantes se rétracte par déformation sur V . Il en résulte que $\pi_q(W, V) = 0$ pour $q < i$.

2.2. On en déduit immédiatement que dans le cas général $\pi_q(W_j, W_i) = 0$ si $q \leq i$. Et, en considérant la triade (W, V', V) munie de la fonction ordonnée $-f$, on trouve que $\pi_q(W_i, V_i) = 0$ pour $q \leq n-i-1$.

2.3. L'application naturelle naturelle $\pi_q(W_i) \rightarrow \pi_q(W_j)$ est un isomorphisme pour $q < i$; elle est surjective pour $q = i$.

Paragraphe 3. ÉLIMINATION DES POINTS CRITIQUES D'INDICE 0 ET 1.

1. Points critiques d'indice 0.

THÉORÈME 2. *Sur une triade connexe (W, V, V') il existe une fonction de Morse sans point critique d'indice 0 ni point critique d'indice n .*

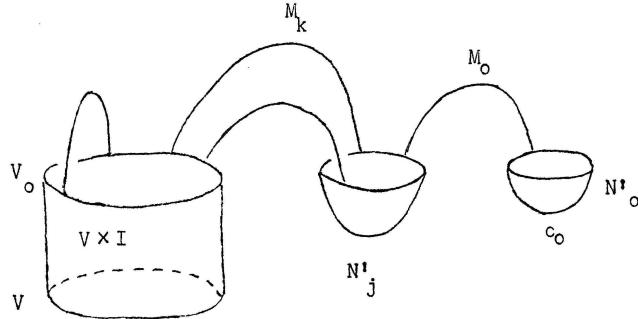


figure 3

La variété W_0 est difféomorphe à la réunion (disjoints) d'un cylindre $V \times I$ et des nappes montantes (N'_j) des points critiques d'indice 0 qui sont des n -disques. La variété W_1 se rétracte par déformation sur la réunion de W_0 et des nappes descendantes (M_k) des points critiques d'indice 1 (paragraphe 1, n° 2.1); d'autre part (paragraphe 2, n° 2.3), on a $\pi_0(W_1) = \pi_0(W) = 0$.

Soit c_0 le point critique d'indice 0 le plus haut, en raison de la connexité de W_1 il existe une nappe descendante M_0 d'indice 1 (i.e., un 1-disque) qui joint la nappe N'_0 de c_0 soit à la nappe d'un autre point critique d'indice 0, soit au cylindre $V \times I$: l'intersection de N'_0 et de M_0 est nécessairement réduite à un point et évidemment transversale. Ces nappes sont en bonne position et le théorème de cancellation (chapitre III, 4.1, théorème 2) permet d'éliminer le point critique c_0 avec un point critique d'indice 1.

Par récurrence, on voit qu'on peut éliminer tous les points critiques d'indice 0; le procédé utilisé nous garantit l'existence d'un nombre égal de points critiques d'indice 1 qui sont éliminés gratuitement tandis que tous les autres points critiques restent inchangés. Le même procédé appliqué à la fonction $-f$ élimine les points critiques d'indice n avec un nombre de points d'indice $(n-1)$.

COROLLAIRE 1. *Tout cobordisme connexe de dimension 1 est trivial et donc difféomorphe au segment $[0, 1]$.*

En effet, lorsqu'on a éliminé les points critiques d'indice 0 et ceux d'indice $n = 1$, il n'en reste plus et la trivialité résulte de (chapitre II, 1.1, théorème 1).

COROLLAIRE 2. *Tout cobordisme de dimension 2 tel que $H_1(W, V) = 0$ est trivial.*

En effet, lorsqu'on a éliminé les points critiques d'indice 0 et d'indice 2, on a $H_1(W_1, W_0) = H_1(W, V) = 0$ ce qui montre qu'il ne reste plus de point critique d'indice 1 d'après (paragraphe 2, n° 1.1)

Application : classification des variétés compactes de dimension 1 et 2.

Soit M une variété compacte munie d'une fonction de Morse f : cette fonction au moins un maximum et un minimum. Lorsqu'on retire à M un petit voisinage de Morse d'un maximum et d'un minimum, on obtient un cobordisme. Dans le cas de la dimension 1, il est trivial donc difféomorphe

à la réunion de deux segment. Il en résulte que M est toujours difféomorphe au cercle.

Dans le cas de la dimension 2, le lecteur étudiera ce cobordisme suivant la dimension de $H_1(W, V)$ pour obtenir la calcification des variétés de dimension 2 (cf. Seifert et Threlfall, Lehrbuch der Topologie.)

2. Points critiques d'indice 1.

THÉORÈME 3. Soit (W, V, V') une triade connexe telle que

V soit connexe,

$$\pi_1(V) = \pi_1(W) = 0,$$

$$n = \dim W \geq 5,$$

et si f est une fonction de Morse sans point critique d'indice 0, on peut éliminer les points critiques d'indice 1 de f en ajoutant un nombre égal de points critiques d'indice 3.

A partir de maintenant, on suppose V et V' connexe pour éviter d'avoir à prendre dans les énoncés des hypothèses des précautions illusoires (car, si on peut supprimer les points critiques d'indice 1, la variété V est sûrement connexe).

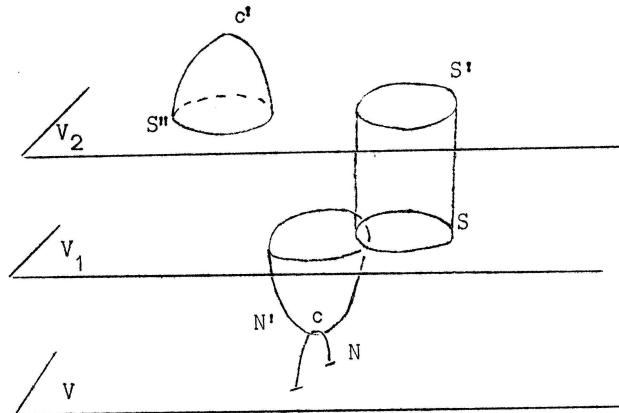


figure 4

Soit c le plus haut des points critiques d'indice 1 et N' sa nappe montante dont le bord $bN' \subset V_1$ est une $(n-2)$ -sphère. Il existe un cercle $S \subset V_1$ qui coupe bN' transversalement et en un seul point. En effet, le complémentaire $V_1 \setminus (\cup bN'_j)$ de la réunion des bords de toutes les nappes montantes d'indice 1 se transporte le long des lignes de gradient sur le complémentaire $V \setminus (\cup bN_j)$ des bords des nappes descendantes qui est connexe puisque V est connexe et que chaque bN_j est un couple de points. Considérons alors un petit segment transverse à bN' ; on peut joindre ses extrémités dans $V_1 \setminus (\cup bN'_j)$ d'où, en arrondissant les angles, un cercle $S \subset V_1$ qui ne rencontre aucun bN_j sauf bN' qu'il coupe transversalement en un seul point.

Les nappes descendantes M_k des points d'indice 2 sont de dimension 2. Comme $\dim S + \dim bM_k = 2 < n-1 = \dim V_1$, le théorème de séparation de Whitney nous permet de supposer, par isotopie, que S ne rencontre aucune des bM_k . À l'aide des lignes de gradient, on construit un cylindre qui rencontre V_1 suivant S et V_2 suivant un cercle S' .

Par un chemin élémentaire de naissance (chapitre III, paragraphe 3, proposition 4), on fait apparaître un peu au-dessus de V_2 un couple d'un point c' d'indice 2 et d'un point c'' d'indice 3. Soit $S'' \subset V_2$ le bord de la nappe descendante de c' ; si les deux cercles S' et S'' sont isotopes par une

isotopie de plongement dans V_2 , le procédé de (chapitre II, paragraphe 4, proposition 5) nous donne une nappe descendante de c' de bord S' et qui se prolonge donc le long des lignes de gradient jusqu'à $S \subset V_1$. Les points c et c' ont des nappes en bonne position, donc se tuent par (chapitre III, paragraphe 4, théorème 2).

Il reste à montrer que S' et S'' sont isotopes. Pour cela, il suffit de voir qu'ils sont homotopes, car, d'après le théorème de plongement de Whitney, le cercle étant de dimension 1, et V_2 de dimension su moins 4, deux plongements homotopes du cercle dans V_2 sont isotopes. Les cercles S' et S'' sont en fait homotopes à 0 sous les hypothèses du théorème 3 d'après le

LEMME. *La variété de niveau V_2 est simplement connexe.*

En effet, $\pi_1(W_2) = \pi_1(W) = 0$ d'après (paragraphe 2, n° 2.3) et $\pi_1(W) = 0$ par hypothèse; d'autre part $\pi_1(W_2, V_2) = 0$ d'après (paragraphe 2, n° 2.2) puisque $2 \leq n - 3$; le lemme résulte alors de la suite exacte d'homotopie du couple (W_2, V_2)

$$\pi_1(W_2, V_2) \rightarrow \pi_1(V_2) \rightarrow \pi_1(W_2).$$

Ceci achève la démonstration du théorème 3.

Remarques.

1. Si l'on oublie que $\pi_1(W) = 0$, il n'en reste pas moins que S'' est homotope à 0 dans V_2 . Supposons en effet que la naissance du couple (c', c'') ait eu lieu dans une portion W'_2 de W , située entre les surfaces de niveau V_2 et V'_2 , assez plate pour qu'il n'y ait eu aucun point critique avant la naissance de (c', c'') ; alors V_2 est rétracte par déformation de W'_2 et S'' qui est le bord d'un disque dans W'_2 (c'est le bord de la nappe) est homotope à 0 dans V_2 .

2. Démontrons la généralisation suivante du théorème 3;

THÉORÈME 3'. *Soit (W, V, V') une triade de dimension $n \geq 5$ telle que l'application canonique $\pi_1(V) \rightarrow \pi_1(W)$ soit un isomorphisme, et si f est une fonction de Morse sans point critique d'indice 0, on peut éliminer les points critiques d'indice 1 de f en ajoutant un nombre égal de points critiques d'indice 3.*

D'après ce qui précède, il suffit de trouver un cercle S , plongé dans V_1 , coupant bN' transversalement en un seul point et qui soit homotope à 0 dans W_2 , ceci parce que S a même classe que S' dans $\pi_1(W_2)$ et parce que, si cette classe est nulle, la nullité de $\pi_2(W_2, V_2)$ (paragraphe 2, n° 2.2) entraîne que S' est homotope à 0 dans V_2 .

Soit $(x_1, \dots, x_s; R_1, \dots, R_t)$ une présentation de $\pi_1(V)$ par générateurs et relations. On peut supposer que les générateurs sont représentés par des cercles plongés dans $V \setminus (\bigcup bN_j)$. Le groupe $\pi_1(W_1)$ est alors le composé $\pi_1(W_1) = \pi_1(V) * (y_1, \dots, y_r)$ où y_j correspond à la nappe N_j . D'où

$$\pi_1(V_1) = \pi_1(W_1) = (x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_r; R_1, \dots, R_t)$$

et on peut représenter dans V_1 les générateurs x_1, \dots, x_s (en déplaçant les précédents le long des lignes de gradient) par des cercles plongés dans V_1 et ne rencontrant aucun bN_j ; de même chaque y_j peut être représenté par un cercle plongé dans V_1 et qui rencontre la seule nappe N_j en un seul point et transversalement.

Le groupe $\pi_1(W_2)$ est quotient de $\pi_1(W_1)$ par les relations introduites par les nappes descendantes

d'indice 2; mais, par hypothèse, on a $\pi_1(W_2) = \pi_1(W) = \pi_1(V)$ et il résulte que, dans $\pi_1(W_2)$, on a des relations du type $y_j = \eta_j(x_1, \dots, x_s)$ où η_j est un mot composé avec les lettres x_1, \dots, x_s et leurs inverses. D'après le choix des représentants dans V_1 des générateurs, et comme V_1 est de dimension au moins 3, on peut trouver un cercle S , plongé dans V_1 et rencontrant bN_1 transversalement en un seul point, dont la classe d'homotopie dans $\pi_1(V_1)$ soit $y_1 \cdot \eta_1^{-1}(x_1, \dots, x_s)$. Il est clair que le cercle S est homotope à 0 dans W_2 et ceci achève la démonstration.

3. Sous les hypothèses du théorème 3 et si $\pi_1(V) = 0$, le théorème 3 appliqué à la fonction $-f$ montre qu'on peut éliminer les points critiques d'indice $(n - 1)$.

4. La méthode précédente qui consiste à faire naître un point critique d'indice $(i + 1)$ et un point critique d'indice $(i + 2)$ pour que le point nouveau-né d'indice $(i + 1)$ tue un point critique d'indice i permet, si $\pi_1(V) = \pi_1(W) = \pi_1(V)$ et si $H_*(W, V) = 0$, d'éliminer tous les points critiques sauf pour les indice i et $(i + 1)$ où $2 \leq i \leq n - 3$. Dans ce cours, on utilise une autre méthode.

5. Il n'y a pas d'espérance pour que ces méthodes fonctionnent en dimensions 3 et 4; en dimension 3 on ne peut pas éviter que S rencontre les nappes descendantes d'indice 2 et en dimension 4 les cercles S' et S'' peuvent être noués dans V_2 (de dimension 3) et pas forcément isotopes.

Paragraphe 4. ÉLIMINATION DES POINTS CRITIQUES D'INDICE i ($2 \leq i \leq n - 4$).

THÉORÈME 4. *Soit (W, V, V') une triade de dimension n , f une fonction de Morse sur W et i un entier tel que $2 \leq i \leq n - 4$; on suppose que*

$$n \geq 6$$

$$\pi_1(V) = 0$$

$$H_i(W, V) = 0$$

f n'a pas de point critique d'indice inférieur ou égal à $(i - 1)$.

Il existe alors une difféomorphisme de la fonction f qui élimine tous les points critiques d'indice i par collision avec des points d'indice $(i + 1)$ en nombre égal et qui conserve tous les autres points critiques.

La démonstration est scindée en deux parties.

1. Partie géométrique.

Soit c le plus haut des points critiques d'indice i et N' sa nappe montante. Le théorème de cancellation permet d'éliminer c si l'on trouve un point critique c' d'indice $(i + 1)$ et une nappe descendante M relative à c' qui soit en bonne position par rapport à N' . Cela signifie que dans V_i la i -sphère bM coupe la $(n - i - 1)$ -sphère bN' transversalement en un seul point. Il en résulte que le nombre d'intersection $(bM \cdot bN')$ doit être égal à ± 1 . *La deuxième partie de la démonstration* (partie algébrique) est consacrée à la démonstration de l'existence d'un point critique c' et d'une nappe M telle que $(bM \cdot bN') = 1$; si l'on admet cela, pour déformer la nappe M en une nappe de c' en bonne position par rapport à N' , il suffit (d'après chapitre II, paragraphe 4, proposition 5) de trouver une isotopie de plongement de bM dans V_i dont l'extrémité coupe bN' transversalement en un seul point.

Une telle isotopie est fournie par le théorème du nombre d'intersection de Whitney (cf. Introduction) pourvu que les hypothèses en soient vérifiées. Or V_i est de dimension $n - 1 \geq 5$, la

i -sphère bM est de codimension $n - i - 1 \geq 3$ d'après l'hypothèse sur i , et la $(n - i - 1)$ -sphère bN' est de codimension $i \geq 2$. Il reste à vérifier l'hypothèse (a). Comme il n'y a pas de point critique d'indice plus petit que 2, la tranche W_i a l'homotopie de V_i ; elle est en particulier simplement connexe; il en est de même de toute tranche W_j d'après (paragraphe 2, n° 2.3). Comme $i \leq n - 3$, il résulte de (paragraphe 2, n° 2.2) que $\pi_2(W_j, W_i) = 0$, donc V_i est simplement connexe.

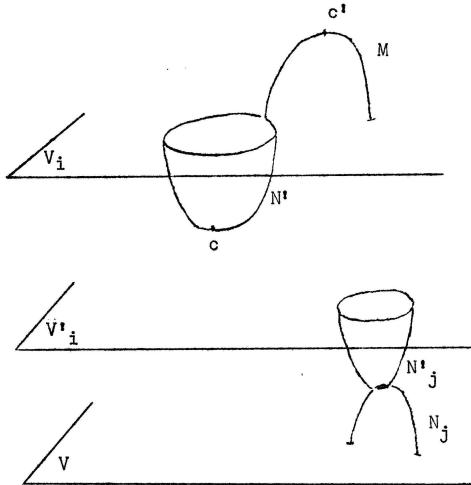


figure 5

Il reste à voir que $(V_i \setminus bN')$ est simplement connexe. Si l'on avait $i \geq 3$, ce serait évident car bN' a pour codimension i dans V_i . Pour le cas $i = 2$, on doit faire une démonstration plus compliquée. Soit V'_i une variété de niveau située en-dessous de c et au-dessus des autres points d'indice i . Le groupe $\pi_1(V'_i)$ est un quotient du groupe $\pi_1(V'_i \setminus (\cup (N'_j \cap V'_i)))$ d'après le théorème de séparation de Whitney, puisque les intersections $(N'_j \cap V'_i)$ des nappes montantes N'_j d'indice i sont de codimension $i \geq 2$. Par transport le long des lignes de gradient, $(V'_i \setminus (\cup (N'_j \cap V'_i)))$ a l'homotopie du complémentaire $(V \setminus (\cup bN_j))$ des bords des nappes descendantes des points critiques situés au-dessous de V'_i . Pour $i \leq n - 3$, la codimension des bN_j est au moins 3 et $\pi_1(V \setminus (\cup bN_j)) = \pi_1(V) = 0$.

Ainsi, V'_i est simplement connexe, donc aussi $(V'_i \setminus (N \cap V'_i))$ où N est la nappe descendante de c , et de même $(V \setminus bN')$ par transport le long des lignes de gradient.

2. Partie algébrique.

On va montrer qu'après des croisements éventuels de points critiques d'indice $(i + 1)$, il existe une nappe M descendante d'un point c' d'indice $(i + 1)$ dont la trace bM sur V_i ait un nombre d'intersection égal à 1 avec bN' . En appliquant (paragraphe 1, n° 2.4) à la triade (W_i, V, V_i) avec $c_0 = c$, cela signifie que l'image de la classe fondamentale bM par l'application composée

$$H_i(V_i) \xrightarrow{k} H_i(W_i) \xrightarrow{h} H_i(W_i, V)$$

a pour coordonnée 1 sur y_0 .

Si $\alpha \in H_{i+1}(W'_{i+1}, V_i)$ (où W'_{i+1} est la portion de W située entre V_i et V_{i+1}) est une classe telle que $h \cdot k \cdot \partial(\alpha)$ ait pour coordonnée 1 sur y_0 , alors α est élément d'une base du \mathbb{Z} -module libre $H_{i+1}(W'_{i+1}, V_i)$ et le théorème de la base (paragraphe 1, n° 4) appliqué à la triade (W'_{i+1}, V_i, V_{i+1}) montre qu'après quelques croisements, il existe une nappe descendante d'indice $(i + 1)$ représentant

α et, par suite, dont le bord bM a une classe fondamentale $[bM] = \partial\alpha$ convenable. On va construire α .

Comme $H_i(W_{i+1}, V_i) = H_i(W, V) = 0$, la suite exacte

$$H_{i+1}(W_{i+1}, W_i) \xrightarrow{\partial} H_i(W_i, V) \rightarrow H_i(W_{i+1}, V)$$

prouve que $y_0 = \partial\beta$ où $\beta \in H_{i+1}(W_{i+1}, W_i)$. L'image réciproque par excision de β dans $H_{i+1}(W'_{i+1}, V_i)$ est l'élément α cherché à cause de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_{i+1}(W'_{i+1}, V_i) & \xrightarrow{\partial} & H_i(V_i) \xrightarrow{k} H_i(W_i) \\ \cong \downarrow \text{excision} & & \downarrow = \\ H_{i+1}(W_{i+1}, W_i) & \xrightarrow{\partial} & H_i(W_i) \end{array}$$

Paragraphe 5. CONCLUSION.

THÉORÈME 5. Soit (W, V, V') une triade compacte de dimension n , on suppose que

$$n \geq 6$$

$$\pi_1(V) = \pi_1(W) = \pi_1(V') = 0$$

$$H_*(W, V) = 0$$

alors W est difféomorphe à $V \times [0, 1]$.

En effet, on peut munir W d'une fonction de Morse (chapitre I) dont on élimine les points critiques d'indice 0 et 1 (chapitre IV, paragraphe 3) ainsi que les points d'indice n et $(n-1)$ (chapitre IV, paragraphe 3). L'utilisation de (chapitre IV, paragraphe 4) ne laisse de points critiques qu'en dimension $(n-3)$ et $(n-2)$. Le lecteur se convaincra à l'aide de (chapitre IV, paragraphe 1, n° 2) qu'on a $H_*(W, V') = 0$; on applique alors à la fonction $-f$ le paragraphe 4 pour conclure.

Note. Montrons que $H_(W, V') = 0$.* Lorsqu'il n'y a que des points critiques d'indice $(n-3)$ et $(n-2)$, le triple $(W_{n-2}, W_{n-3}, W_{n-4})$ est équivalent au triple (W, W_{n-3}, V) . Le seul groupe d'homologie non nul de (W, W_{n-3}) est le groupe de dimension $(n-2)$ dont une base est constituée des classes fondamentales des nappes $(M_k)_{1 \leq k \leq r}$ descendantes des points critiques d'indice $(n-2)$. De même pour $H_{n-3}(W_{n-3}, V)$ dont une base est représentée par les nappes descendantes $(N_j)_{1 \leq j \leq s}$. Dans la suite exacte du triple (W, W_{n-3}, V) , la nullité de $H_*(W, V)$ prouve que le seul homomorphisme non nul:

$$\partial: H_{n-2}(W, W_{n-3}) \rightarrow H_{n-3}(W_{n-3}, V)$$

est un isomorphisme. On en déduit d'abord que $r = s$; d'autre part, d'après (paragraphe 1, n° 2.4), sur les bases canoniques, ∂ s'exprime par la matrice des nombre d'intersection $(bM_k \cdot bN_j)$: cette matrice est inversible.

Si l'on note W'_{n-3} la tranche de W située au-dessus de V_{n-3} , on calcule $H_*(W, V')$ à l'aide de la suite exacte du triple (W, W'_{n-3}, V') . L'homomorphisme $H_3(W, W'_{n-3}) \rightarrow H_2(W'_{n-3}, V')$ qui s'exprime par la transposée de la matrice précédente est inversible; d'où la nullité de $H_*(W, V')$.

Plus généralement, avec des points critiques en tous indices, on peut montrer que $H_*(W, V)$ est l'homologie du complexe $(H_q(W_q, W_{q-1}); \partial_q)_q$, et $H_*(W, V')$ l'homologie du complexe transposé.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION.	3
CHAPITRE I. TRANSVERSALITÉ	5
CHAPITRE II. FONCTION DE MORSE SUR UNE TRIADE	6
1 . Triades sans point critique.	6
2 . Points critiques.	9
3 . Nappes.	12
4 . Un lemme utile.	17
CHAPITRE III. CROISEMENTS ET NAISSANCES	19
1 . Chemin élémentaire descendant.	19
2 . Fonction de Morse ordonnée sur une triade.	20
3 . Modèle de naissance,	21
4 . Collision et cancellation de deux points critiques.	22
CHAPITRE IV. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DU h -COBORDISME	28
1 . Triades dont tous les points critiques ont même indice.	28
2 . Relations homologiques et homotopiques dans une triade ordonnée.	33
3 . Élimination des points critiques d'indice 0 et 1.	34
4 . Élimination des points critiques d'indice i ($2 \leq i \leq n - 4$).	37
5 . Conclusion.	39

-:-:-:-:-:-:-