

М. М. ПОСТНИКОВ

ЛЕКЦИИ ПО АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ТОПОЛОГИИ

ОСНОВЫ
ТЕОРИИ
ГОМОТОПИЙ



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1984

22.152

П 63

УДК 513.83

Постников М. М. Лекции по алгебраической топологии. Основы теории гомотопий. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. — 416 с.

Книга содержит подробное изложение теории гомотопий. Особое внимание в ней уделено разъяснению и происхождению основных понятий. Содержит обширный материал, в монографической и учебной литературе до сих пор не излагавшийся.

Для студентов 3—5 курсов и аспирантов математических отделений университетов. Может служить основой спецкурсов и спецсеминаров.

Рецензент:

кандидат физико-математических наук *Д. Б. Фукс*

Михаил Михайлович Постников

ЛЕКЦИИ ПО АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ТОПОЛОГИИ

Редактор *Ф. И. Кизнер*

Технический редактор *С. Я. Шкляр* Корректор *И. Я. Кристаль*

ИБ № 12212

Сдано в набор 19.01.84. Подписано к печати 07.08.84. Формат 84×108¹/₃₂. Бумага книжно-журнальная Литературная гарнитура. Высокая печать. Усл. печ. л. 21.84. Усл. кр.-отт. 21.84. Уч.-изд. л. 22.45. Тираж 9 500 экз. Заказ № 2620. Цена 1 р. 70 к.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени
Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома
при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и
книжной торговли, 113054 Москва, Валовая, 28

Отпечатано во 2-й типографии изд-ва «Наука»,
121099 Москва, Шубинский пер., 10. Зак. 643

П 1702040000—134
053 (02)—84 26—84

© Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической
литературы, 1984

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	7
ЛЕКЦИЯ 0	13
Задачи распространения и ретракции.— Задачи поднятия и сечения.— Предмет и метод алгебраической топологии.— Пример: теорема о барабане и теорема Брауера о неподвижной точке.— Пример: комплексная проективная плоскость и отображение Хопфа.— Редукция задачи распространения к задаче ретракции.— Векторные поля на сферах.— Гомотопии, пары Борсука и эффективность метода алгебраической топологии.— Гомотопическая категория.	
ДОПОЛНЕНИЕ	29
Основные понятия общей топологии.— Экспоненциальный закон для множеств отображений.— Экспоненциальный закон для пространств отображений.	
ЛЕКЦИЯ 1	38
Гомотопии и пути.— Корасслоения и пары Борсука.— Амальгамы.— Амальгамы и индуцированные корасслоения.— Цилиндр отображения.— Характеризация корасслоений и пар Борсука.— Произведение пар Борсука.— Расслоения.— Коамальгамы и индуцированные расслоения.— Коцилиндр отображения и аксиома о накрывающем пути.— Расслоения пространств отображений.	
ДОПОЛНЕНИЕ	61
Аксиома о мягком распространении накрывающей гомотопии.— Мягкие отображения.— Две леммы о мягких отображениях.— Лемма о покрытиях пространства $X \times I$.— Теорема Дольда.— Локально тривиальные расслоения.	
ЛЕКЦИЯ 2	81
Гомотопические эквивалентности.— Редукция произвольного отображения к корасслоению.— Деформационные ретракты.— Стягиваемые пространства и конусы.— Относительные гомотопии и строгие деформационные ретракты.— Гомотопическая инвариантность операции приклеивания.— Окрестностные деформационные ретракты и пары Борсука.— Строгие деформационные ретракты и гомото-	

пические эквивалентности.— Еще две аксиомы, характеризующие расслоения (аксиома о распространении накрывающего отображения и аксиома о распространении накрывающей гомотопии).— Прообраз пары Борсука.— Редукция произвольного отображения к расслоению.

ДОПОЛНЕНИЕ

103

Категория TOP_{B_0} .— Гомотопии, корасслоения и расслоения категории TOP_{B_0} .— Гомотопические расслоения.— Гомотопические эквивалентности в сравнении с послойными гомотопическими эквивалентностями.— Коллапсирующие отображения.— Теорема Дольда о послойных гомотопических эквивалентностях.— Индуцированные гомотопические расслоения.— Расслоения, индуцированные гомотопными отображениями.— Отображения, являющиеся гомотопическими эквивалентностями на слоях.

ЛЕКЦИЯ 3

127

Гомотопически инвариантные функторы.— Функтор π_0 .— Представимые функторы.— Группы категории.— Н-группы, Н-моноиды и Н-унитоиды (Н-пространства).— Когруппы категории.— Категория TOP^* .— Категория $[\text{TOP}]$.— Н-когруппы, Н-комониды и Н-коунитоиды.— Надстройки.— Приведенные надстройки.— Пространства петель.— Сопряженность функторов S^* и Ω .— Топологический моноид муровских петель.— Пространство петель является Н-группой.

ДОПОЛНЕНИЕ

155

Н-моноиды, являющиеся Н-группами.— Левые и правые сдвиги в Н-моноидах.

ЛЕКЦИЯ 4

159

Экспоненциальный закон для пунктированных отображений.— Расслоения и корасслоения категории TOP^* .— Лемма о приклеивании вибриссы.— Цилиндры и коцилиндры в категории TOP^* .— Стягиваемые пунктированные пространства.— Приведенные конусы.— Серровские расслоения.— Пунктированные гомотопические эквивалентности.— Отображение игнорирования отмеченных точек.— Фундаментальная группа пунктированного пространства.— Действие группы $\pi_1 U$ на множестве $[X, Y]$.— Пунктированные Н-пространства.— Н-пространства с настоящими единицами.— Кослон и относительные гомеоморфизмы.— Кослон по стягиваемым подпространствам.— Заключительные замечания о надстройках и пространствах петель.

ДОПОЛНЕНИЕ

185

Лемма о произведении эпиморфизмов.— Смеш гомотопических классов.— Ассоциативность смеш-умножения хаусдорфовых локально компактных пространств.— Гомотопическая ассоциативность смеш-умножения гладко пунктированных пространств.— Инвариант $\text{cat } X$.— Нильпотентность группы $[X, K]$.— Абелевость группы $[L, K]$.— Группы $[S^n X, \Omega^m Y]$.

ЛЕКЦИЯ 5	203
Гомотопические группы.— Альтернативное определение гомотопических групп.— Индуктивное определение гомотопических групп.— Действие группы $\pi_1 X$ на группах $\pi_n X$.— Абелевы пространства.— Абелевость гомотопических групп при $n \geq 2$.— Ансамбль гомотопических групп.— Гомотопические группы абелевых пространств.— Асферичные пространства.— Гомотопическая последовательность расслоения.— Алгебраические свойства точных последовательностей.— Гомотопические группы накрывающих пространств.— Расслоение Хопфа.— Функториальность гомотопической последовательности расслоения.— Аксиоматическое описание гомотопических групп.	
ДОПОЛНЕНИЕ	223
Точные последовательности пунктированных пространств.— Короткие точные последовательности H -групп.— Короткие точные последовательности H -когрупп.— Гомотопические слои пунктированных отображений.— Точная последовательность Пуппе.— Удлиненная последовательность Пуппе классифицированного расслоения.— Конусы отображений и коточные последовательности Пуппе.	
ЛЕКЦИЯ 6	249
Задача поднятия для накрытий.— Накрытия и подгруппы фундаментальной группы.— Автоморфизмы накрытий.— Вполне разрывные действия групп.— Фундаментальная группа букета окружностей.— Единственность умножения в группе $\pi_1 X$.— Универсальные накрытия.— Фундаментальные группы топологических групп и их факторпространств.	
ДОПОЛНЕНИЕ	270
Пределы диаграмм над произвольной категорией.— Пределы диаграмм над категорией групп.— Их копредставления.— Структура свободного произведения групп.— Теорема Зейферта—ван Кампена.— Следствия теоремы Зейферта—ван Кампена.— Графы.— Деревья.— Вычисление фундаментальной группы графа.	
ЛЕКЦИЯ 7	298
Гладкие отображения и гладкие гомотопии.— Теорема Сарда.— Группа $\pi_m S^n$ при $m < n$.— Фундаментальная группа пространства S^n/G .— Степень гладкого отображения.— Гомотопическая инвариантность степени.— Степень гомотопического класса.— Инъективность отображения $\deg$.	
ДОПОЛНЕНИЕ	321
Простейшие следствия того, что $\pi_n S^n \neq 0$.— Распространение отображений в сферы.— Теорема Борсука о неограниченной компоненте.— Топологическая инвариантность размерности кублируемых множеств.— Множества, не пересекающие сферу.— Теорема об инвариантности области.— Топологическая инвариантность размерности многообразий.	

ЛЕКЦИЯ 8	330
Точные Π -последовательности.— Категория пунктированных пар TOR_2^* .— Относительные гомотопические группы.— Лемма о пяти гомоморфизмах.	
ДОПОЛНЕНИЕ	347
Гомотопическая последовательность тройки.— Гомотопические группы триад.— Инвариантность гомотопических групп при деформационных ретракциях.— Гомотопическая последовательность 4-ады.	
ЛЕКЦИЯ 9	357
Слабые расслоения.— Аддиционная лемма.— Основная лемма.— Накрывающие гомотопии для слабых расслоений.— Доказательство теоремы Дольда—Тома.— Лемма Джеймса.	
ДОПОЛНЕНИЕ	372
Аксиома о накрытии замедленных гомотопий.— Аксиома о сверхмягком распространении накрывающей гомотопии.— Теорема Дольда для гомотопических расслоений.	
ЛЕКЦИЯ 10	384
Надстроечный гомоморфизм и надстроечная последовательность.— Универсальный моноид пунктированного пространства.— Фильтрация универсального моноида.— Случай гладко пунктированного пространства.— Меридианное отображение.— Теорема Джеймса и преобразование надстроечной последовательности.— Муровский вариант серровского расслоения.— Доказательство теоремы Джеймса.	
ДОПОЛНЕНИЕ	400
Телескопная нормализация фильтратий.— Гомотопическая эквивалентность гомотопических пределов.— Теорема Милнора.— Гомотопическая правильность фильтратий Борсука.	
Литература	412
Предметный указатель	414

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга является систематическим учебником по теории гомотопий в той—неожиданно обширной—ее части, которая может быть построена без привлечения гомологических методов.

Как известно, преподавание и изучение алгебраической топологии чрезвычайно осложнены тем, что теория гомотопий и когомологий, занимающая в этой науке центральное место (что, кстати сказать, справедливо и для современного этапа ее развития—при соответствующем, более общем, понимании гомотопий и когомологий), строится в высшей степени громоздко, требуя для своего аккуратного изложения целых книг. Прежде чем достичь хотя бы простейших приложений, студент должен пересечь обширную пустыню абстрактных конструкций, роль и значение которых для него долгое время остаются непонятными и неизвестными и которые он вынужден изучать лишь из доверия к преподавателю. Авторами учебников по алгебраической топологии было проявлено много изобретательности, чтобы облегчить студентам эту дорогу, но существенных результатов они не добились. Между тем существует очень простой и элегантный способ построения теории гомотопий, укладывающийся в одну-две лекции. Идея его состоит в том, чтобы определять группы цепей клеточных пространств как относительные гомотопические группы остовов и на этой основе строить группы гомотопий и когомологий. Конечно, это требует достаточно продвинутой теории гомотопий, которую приходится поэтому предварительно излагать. В целом этот путь, быть может, более труден: вместо пересечения ровной, хотя и скучной, пустыни приходится преодолевать крутые склоны и глубокие ущелья горной страны. Но эта страна не безжизненна, и при вступлении в нее перед путником почти немедленно открываются красивые виды, по-

буждающие его двигаться дальше. Безусловно, этот путь имеет и свои недостатки, главным из которых является создание у студента ложной перспективы о значении элементарно-гомотопических (=не использующих теорию гомологий) методов и недооценка им мощи и эффективности методов теории гомологий. Другое возражение против этого пути состоит в том, что без теории гомологий доказательства ряда ключевых теорем существенно осложняются и делаются неоправданно трудными. Однако следует иметь в виду, что внутреннюю нетривиальность теории обойти никогда нельзя, и если удастся вытащить клев, то увязает хвост. Вместе с тем изучение впоследствии гомологических доказательств тех же теорем и их сравнение с элементарно-гомотопическими доказательствами со всей силой позволяет подчеркнуть мощь теории гомологий и без труда скорректировать сложившееся вначале ложное впечатление. Таким образом, достоинства предлагаемого пути существенно перевешивают недостатки.

Конкретное построение теории гомологий на базе теории гомотопий будет осуществлено в следующих выпусках этих «Лекций».

Эта книга выросла из конспекта специального курса, который я неоднократно читал студентам и аспирантам механико-математического факультета МГУ. Каждая лекция в книге получилась из записи реальной устной лекции, хотя и значительно переработанной.

Из-за острейшего дефицита времени при чтении специального курса значительно чаще, чем в обязательном курсе, приходится ограничиваться лишь идеей доказательств, оставляя подробное их проведение слушателям. Вспомогательные утверждения из других отделов математики достаточно лишь формулировать со ссылками на литературу, а иллюстрирующие общую теорию примеры лишь описывать, также предоставляя их подробный разбор слушателям. При переносе же устной лекции на бумагу сохранять эти особенности нет необходимости и, более того, все доказательства стоит производить подробно, разбор примеров осуществлять до конца, а «посторонние» леммы доказывать. Этим объясняется неожиданно большой объем некоторых лекций в книге.

Материал, по тем или иным причинам не излагавшийся на лекциях, вынесен в дополнения. (Таким образом, распределение материала по лекциям и дополнениям в основ-

ном диктовалось запросами спецкурса и лишь очень мало связано с его внутренней математической ценностью и значительностью. Тем не менее при первом чтении книги рекомендуется сначала пропускать дополнения и возвращаться к ним по мере надобности.)

Лекция 0 имеет вводный характер и посвящена в основном разъяснению на примерах предмета и метода алгебраической топологии. В Дополнении к ней излагается экспоненциальный закон для пространств отображений.

Лекции 1 и 2 посвящены корасслоениям, расслоениям и смежным вопросам. В Дополнениях к этим лекциям излагаются теоремы Дольда о расслоениях. (Двойственные теоремы не упоминаются. Их формулирование и доказательство оставляются читателю.)

В лекции 3 излагаются общие методы построения гомотопически инвариантных функторов, обосновывается необходимость перехода к пунктированным пространствам, вводятся ко- N -пространства и N -пространства, надстройки и пространства петель. В Дополнении доказывается, что любой связный N -моноид является N -группой.

Лекция 4 содержит общее обсуждение категории пунктированных пространств и ее взаимоотношений с категорией пространств без отмеченных точек. В связи с последним вопросом вводится фундаментальная группа. В Дополнении изучается смеш-умножение топологических пространств и гомотопических классов, вводится инвариант cat Люстерника—Шнирельмана и рассматриваются условия, обеспечивающие нильпотентность или абелевость групп гомотопических классов.

В лекции 5 излагается обычный материал об абсолютных гомотопических группах, а в Дополнении строятся точные последовательности Пуппе.

Лекция 6 посвящена накрытиям вообще и методам вычисления фундаментальных групп в частности. В Дополнении после изложения необходимого алгебраического материала доказывается теорема Зейферта—ван Кампена.

В лекции 7 вводится понятие степени и вычисляются группы $\pi_m S^n$ при $m \leq n$. В Дополнении излагаются стандартные геометрические следствия нестягиваемости сферы (теорема Борсука о неограниченной компоненте, топологическая инвариантность размерности, характеристика множеств, не пересекающих сферу, теорема об инвариантности области).

В лекции 8 мы, возвращаясь к общей теории гомотопических групп, вводим относительные гомотопические группы. В Дополнении доказывается точность гомотопических последовательностей троек и триад.

В следующей лекции 9 излагается принадлежащая Дольду и Тому теория квазирасслоений (называемых в книге слабыми расслоениями). В Дополнении доказывается теорема Дольда о гомотопических расслоениях.

Лекция 10 посвящена теореме Джеймса о надстрочной последовательности. В Дополнении доказываются известные общие теоремы о гомотопических свойствах фильтраций.

На этом кончается первая часть курса, посвященная общим понятиям теории гомотопий и гомотопическим группам. Только эта часть курса вошла в настоящую книгу.

Следующие лекции (составляющие отдельную книгу «Теория гомотопий клеточных пространств», планируемую к выходу в свет в 1985 г.) в основном концентрируются вокруг понятия клеточного пространства.

В лекции 11 вводится и изучается категория клеточных пространств. Более хлопотно доказываемые свойства клеточных пространств (локальная стягиваемость и паракомпактность) вынесены в Дополнение.

В лекции 12 на основе обычной техники гладкой аппроксимации доказывается n -связность пар (X, X^n) и теорема о клеточной аппроксимации. В качестве приложения доказывается теорема Фрейден탈я с обычными следствиями. В заключение рассматриваются свойства антиподальных отображений. В Дополнении после изложения основных понятий теории симплициальных пространств теорема об аппроксимации доказывается в ее симплициальном варианте.

В лекции 13 категория клеточных пространств сравнивается с категорией всех пространств (теорема о том, что любое топологическое пространство слабо гомотопически эквивалентно клеточному пространству). Здесь же доказывается теорема Уайтхеда о гомотопических эквивалентностях. Дополнение к этой лекции посвящено теоремам представимости (Брауна, Адамса и Хеллера).

На этом общая теория клеточных пространств временно прерывается и со следующей лекции мы обращаемся к теории гомотопических операций.

В лекции 14 излагаются общие теоремы о гомотопических операциях (вытекающие из представимости гомотопических групп), характеризуются аддитивные операции и вводится умножение Уайтхеда. В лекции 15 обсуждается

обобщенное умножение Уайтхеда и доказываются его алгебраические свойства (косocomмутативность, билинейность и тождество Якоби). В Дополнении к лекции 15 доказывается теорема Хилтона—Милнора о гомотопических группах букетов надстроек.

Геометрические свойства умножения Уайтхеда обсуждаются в лекции 16. Там же вводится инвариант Хопфа и его обобщения по Уайтхеду. Методом Уайтхеда вычисляется инвариант Хопфа конструкции Хопфа и, в частности, инвариант Хопфа отображений Хопфа. В Дополнении вводятся и изучаются инварианты Хопфа, обобщенные по Хилтону. В частности, обсуждается левый дистрибутивный закон для композиционного умножения.

В лекции 17 мы, возвращаясь в последний раз к клеточным пространствам, доказываем теорему Блейкерса и Масси о вырезании для триад и на ее основе—теорему Фрейденталю для любых связных пространств.

В лекции 18 доказывается «трудная часть» теоремы Фрейденталю и вычисляются группы $\pi_{n+1}S^n$ и $\pi_{n+2}S^n$. В вычислении последней группы ключевую роль играет тот факт, что элемент $\eta_n \circ \eta_{n+1}$ группы $\pi_{n+2}S^n$ отличен от нуля. «Современное» доказательство этого факта основывается на теории когомологических операций. Поскольку этот путь нам пока недоступен, мы вынуждены изложить прямое геометрическое доказательство, предложенное в свое время Дж. У. Уайтхедом.

Материал заключительной лекции 19 концентрируется вокруг вопроса о влиянии на гомотопические группы π_n приклеивания клеток. При $n=1$ мы получаем известное описание образующих и соотношений фундаментальных групп клеточных пространств, что, в частности, позволяет доказать для этих пространств теорему Зейферта—ван Кампена в ее классической формулировке. При $n > 1$ вводятся убивающие пространства, строятся пространства Эйленберга—Маклейна и вычисляется группа $\pi_n(X^n, X^{n-1})$ (на этой основе и будет в следующем семестре построена теория гомологий). В Дополнении к этой лекции вкратце рассматриваются трехмерные многообразия и их фундаментальные группы.

Хотя алгебраическая топология развилась в основном на глазах нашего поколения, в ее истории уже немало темных мест. Это ставит авторов учебников по топологии перед рядом трудно разрешимых задач, например

при составлении библиографии, которая в идеале должна быть аннотированным путеводителем студента по лабиринту журнальной литературы. Без предварительного выяснения всех приоритетов, влияний и заимствований любая такая библиография будет содержать массу исторических ошибок и создаст повод для дискуссий, обвинений и обид. Простое же перечисление всех известных автору статей (или лишь статей, им использованных), для учебных целей почти бесполезное, наверняка ввиду неизбежной случайности их выбора даст тот же результат.

Очень труден также вопрос об авторстве тех или иных теорем; даже само понятие «автор теоремы» не имеет четкой экспликации (скажите, например, кто автор теоремы о том, что группа $[K, X]$ гомотопических классов отображений n -мерного клеточного пространства K в $(n-1)$ -связное пространство X изоморфна группе когомологий $H^n(K; \pi_n X)$: Хопф, впервые описавший группу $[K, X]$, но в других терминах и только для случая, когда $X = S^n$, Уитни, привлекий когомологии, или Уайтхед, введший клеточные пространства и мимоходом заметивший, что формулировка Уитни годится для любых клеточных пространств?).

Рохлин и Фукс в своем известном учебнике [10] рубают гордиев узел этих проблем одним махом: теоремы они оставляют безымянными, а в библиографии ограничиваются некомментируемым списком книг и статей, содержащих дополнительную информацию, на которую в тексте имеются ссылки.

В этих «Лекциях» принято другое решение: дается полная и комментируемая библиография, но только книг и — за немногими исключениями — только на русском языке, как наиболее доступных, а традиционные имена теорем трактуются как простые, удобные для ссылок ярлыки, не связанные обязательно с авторством (которое поэтому в бесспорных случаях специально указывается).

М. М. Постников

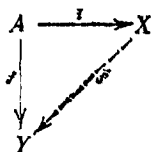
Задачи распространения и ретракции.— Задачи поднятия и сечения.— Предмет и метод алгебраической топологии.— Пример: теорема о барабане и теорема Брауера о неподвижной точке.— Пример: комплексная проективная плоскость и отображение Хопфа.— Редукция задачи распространения к задаче ретракции.— Векторные поля на сферах.— Гомотопии, пары Борсука и эффективность метода алгебраической топологии.— Гомотопическая категория.

В этой вводной лекции мы объясним, что такое алгебраическая топология и как она применяется к решению конкретных геометрических задач.

Пусть X, Y — топологические пространства, A — подпространство пространства X , а $f: A \rightarrow Y$ и $\bar{f}: X \rightarrow Y$ — непрерывные отображения. Напомним, что отображение f называется *ограничением* отображения $\bar{f}$ на A , а отображение $\bar{f}$ — *распространением* (или *продолжением*) отображения f с A на X , если $\bar{f}(a) = f(a)$ для любой точки $a \in A$. Ограничение f отображения $\bar{f}$ на A обозначается символом $\bar{f}|_A$. Равенство $f = \bar{f}|_A$ равносильно равенству $f = \bar{f} \circ i$, где $i: A \rightarrow X$ — *вложение* (ограничение тождественного отображения $\text{id}: X \rightarrow X$).

В задаче распространения даны X, A, Y и f и требуется узнать, существует ли $\bar{f}$. Эта задача изображается диаграммой

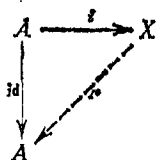
(1)



где пунктирная стрелка обозначает отображение, существование которого следует доказать, а диаграмма предполагается коммутативной (эти соглашения мы сохраним на протяжении всего курса).

Интересный частный случай задачи распространения возникает при $Y = A$ и $f = \text{id}$:

(2)



Решение r этой задачи называется *ретрагирующим отображением* (или просто *ретракцией*). Когда оно существует, подпространство A называется *ретрактом* пространства X . Как правило, для обозначения ретрагирующего отображения употребляется буква r . Легко видеть, что ретрагирующее отображение всегда является *эпиморфизмом* (надъективным отображением, обладающим тем свойством, что подмножество в A тогда и только тогда открыто, когда его полный прообраз в X открыт).

Из типографских соображений (для экономии бумаги) мы будем диаграмму (2) записывать в виде

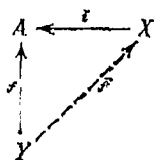
$$\text{id} \hookrightarrow A \overset{i}{\underset{r}{\rightleftarrows}} X.$$

Обобщение задачи распространения возникает, когда в диаграмме (1) A считается произвольным пространством, а i — произвольным отображением. В этом случае отображение $\bar{f}$ мы будем называть *распространением* отображения f по отношению к отображению i . Решение аналогичным образом обобщенной задачи (2) мы будем называть *ретракцией отображения i* , а отображение $i: A \rightarrow X$, для которого существует ретракция $r: X \rightarrow A$, — *ретрагируемым отображением*. Впрочем, это обобщение, по существу, ничего нового не дает, поскольку, как легко видеть, любое ретрагируемое отображение $i: A \rightarrow X$ является *монеморфизмом* (гомеоморфизмом на свой образ) и потому может рассматриваться как вложение A в X .

Значение ретракций для задачи (1) состоит в том, что пара (X, A) (отображение $i: A \rightarrow X$) тогда и только тогда обладает тем свойством, что *распространение существует для произвольного пространства Y и произвольного отображения $f: A \rightarrow Y$, когда подпространство A является ретрактом пространства X (отображение i ретрагируемо)*. Действительно, если ретракция $r: X \rightarrow A$ существует, то отображение $\bar{f} = f \circ r$ будет, очевидно, распространением отображения f , и, обратно, если отображение $\bar{f}: X \rightarrow Y$ существует для любого отображения $f: A \rightarrow Y$

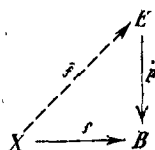
и любого пространства Y , то, в частности, оно существует при $Y = A$, $f = \text{id}_A$ и является в этом случае искомой ретракцией r . $\square$

Известный из общей теории категорий «трюк обращения стрелок» переводит задачу (1) в двойственную задачу



По традиции в этой задаче принято пространства X, A, Y обозначать через E, B, X , отображение i — через p , а диаграмму писать в «перевернутом» виде:

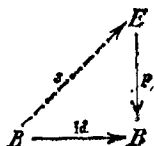
(3)



Задачу (3) называют *задачей поднятия*, а отображение $\bar{f}$ — *поднятием* отображения f на E . Говорят также, что отображение $\bar{f}$ *накрывает* отображение f .

Задаче (2) двойственна задача

(4)



решение которой называется *сечением* отображения p . Как правило, для обозначения сечения употребляется буква s . Отображение p является ретракцией любого своего сечения (и, наоборот, любое ретрагируемое отображение является сечением своей ретракции). Поэтому, в частности, каждое отображение, для которого существует сечение, является эпиморфизмом, а любое его сечение — монеоморфизмом.

Для данного отображения $p: E \rightarrow B$ задача поднятия (3) тогда и только тогда разрешима для произволь-

ного пространства X и произвольного отображения $f: X \rightarrow B$, когда отображение p обладает сечением $s: B \rightarrow E$. Действительно, если s существует, то отображение $\bar{f} = s \circ f$ покрывает отображение f , и, обратно, если отображение $\bar{f}: X \rightarrow E$ существует для любого отображения $f: X \rightarrow B$ и любого пространства X , то, в частности, оно существует при $X = B$, $f = \text{id}_B$, и является в этом случае искомым сечением s . $\square$

Полезно иметь в виду, что задачи (3) и (4) (так же как обобщенные задачи (1) и (2)) имеют смысл в произвольной категории.

Алгебраическую топологию можно в первом приближении определить как науку, занимающуюся решением задачи (1), (а также задач (2), (3) и (4)) в категории ТОР топологических пространств и непрерывных отображений. Поскольку задача (1) появляется в математике практически всюду (достаточно заметить, что любую теорему существования можно рассматривать как утверждение о разрешимости в соответствующей категории некоторой задачи (1)) и поскольку большинство математических объектов наделено структурой топологического пространства, это объясняет, почему алгебраическая топология играет в современной математике одну из ключевых ролей.

Очень часто возникают конкретные задачи, не имеющие вида (1), но более или менее легко сводящиеся к задаче (1). Общие методы и принципы такого рода сведения также обычно включаются в алгебраическую топологию.

Пусть на категории ТОР (или на некоторой достаточно широкой ее подкатегории) задан функтор Π , принимающий значения в некоторой категории A . Применив функтор Π к диаграмме (1), мы получим диаграмму

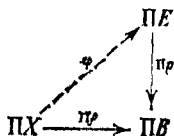
$$(5) \quad \begin{array}{ccc} \Pi A & \xrightarrow{\Pi i} & \Pi X \\ \Pi f \downarrow & & \nearrow \varphi \\ & \Pi Y & \end{array}$$

являющуюся записью задачи об отыскании в категории A морфизма φ , удовлетворяющего соотношению $\Pi f = \varphi \circ \Pi i$. Каждое решение задачи (1) дает нам решение $\varphi = \Pi \bar{f}$ задачи (5), так что разрешимость задачи (5) является необходимым условием разрешимости задачи (1). Следо-

вательно, если задача (5) не имеет решения, то задача (1) тем более неразрешима.

Можно сказать, что вся алгебраическая топология сводится к применению этого простого соображения. Следует только для каждой конкретной задачи целесообразно выбрать категорию A и функтор Π . Конечно, чтобы переход от задачи (1) к задаче (5) имел практический смысл, нужно выбрать категорию A , состоящую из более простых объектов, чем топологические пространства. В принципе наиболее простые математические объекты рассматриваются в алгебре. Поэтому в качестве категории A обычно выбирается одна из «алгебраических» (изучаемых в алгебре) категорий и, тем самым, геометрическая задача (1) заменяется алгебраической задачей (5) (которая называется обычно *производной алгебраической задачей*). Это объясняет эпитет «алгебраическая» в названии алгебраической топологии.

Для задачи (3) производная алгебраическая задача имеет, естественно, вид



Само собой разумеется, что для широкого применения описанного метода необходим достаточно большой запас функторов Π . Поэтому первой технической задачей алгебраической топологии является построение и изучение этих функторов. С течением времени, по мере того, как в науку входили все более трудные задачи (1) и (3), приходилось строить все более и более сложные функторы Π , и к настоящему времени алгебраическая топология безусловно держит рекорд по сложности используемых в ней конкретных алгебраических объектов.

Поскольку утвердительное решение задачи (5), вообще говоря, ничего не говорит о существовании решения задачи (1), метод алгебраической топологии в принципе может давать только «отрицательные» ответы. Это не является его недостатком, а скорее является достоинством, так как именно теоремы о несуществовании решений, как правило, наиболее трудны и интересны. Впрочем, иногда (не особенно часто) удается доказать, что разрешимость произ-

водной алгебраической задачи не только необходима, но и достаточна для разрешимости исходной задачи. Такого рода результаты также включаются в алгебраическую топологию.

Проиллюстрируем эти общие замечания на простом, но эффектном примере.

Пусть E^n — шар $|x| \leq 1$ в пространстве $\mathbb{R}^n$, а S^{n-1} — ограничивающая его $(n-1)$ -мерная сфера $|x| = 1$. В свое время мы покажем, что на категории ТОР существует такой функтор Π , принимающий значения в категории абелевых групп, что $\Pi E^n = 0$ и $\Pi S^{n-1} \neq 0$. С помощью этого функтора немедленно показывается, что сфера S^{n-1} не является ретрактом шара E^n , т. е. что задача

$$\text{id} \hookrightarrow S^{n-1} \rightrightarrows E^n$$

решения не имеет. Действительно, производная алгебраическая задача

$$\text{id} \hookrightarrow \Pi S^{n-1} \rightrightarrows \Pi E^n$$

при $\Pi E^n = 0$ и $\Pi S^{n-1} \neq 0$ очевидным образом неразрешима.

Тот факт, что окружность S^1 не является ретрактом круга E^2 , является теоретическим объяснением, почему на окружность можно натянуть пленку, т. е. сделать барабан. Поэтому доказанная теорема называется иногда теоремой о барабане.

Легким следствием теоремы о барабане является теорема Брауера о неподвижной точке, утверждающая, что для любого непрерывного отображения $f: E^n \rightarrow E^n$ существует хотя бы одна неподвижная точка (т. е. такая точка $x \in E^n$, что $f(x) = x$). Действительно, если $f(x) \neq x$, то определена прямая, проходящая через точки x и $f(x)$. Пусть $r(x)$ — та из двух точек пересечения этой прямой со сферой S^{n-1} , которая не отделена от точки x точкой $f(x)$. Если $f(x) \neq x$ для всех точек $x \in E^n$, то эта конструкция определяет непрерывное отображение $r: E^n \rightarrow S^{n-1}$, являющееся, очевидно, ретрагирующим отображением ($r(x) = x$, если $x \in S^{n-1}$). Поскольку существование такого отображения противоречит теореме о барабане, неравенство $f(x) \neq x$ для всех точек $x \in E^n$ выполненным быть не может. $\square$

Теорема Брауера (и ее обобщения) являются в анализе источником неисчислимы́х теорем существования решений самых разнообразных уравнений (поскольку любое уравнение можно записать в виде $f(x) = x$).

Другой интересный пример мы получим, рассмотрев комплексную проективную плоскость $\mathbb{CP}^2$, точками которой являются классы $[z_0:z_1:z_2]$ пропорциональных троек $(z_0, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3$ комплексных чисел, отличных от тройки $0 = (0, 0, 0)$ (и топология которой является фактортопологией топологии пространства $\mathbb{C}^3 \setminus 0$). Точки плоскости $\mathbb{CP}^2$, для которых $z_2 = 0$, составляют «несобственную прямую», естественным образом отождествляющуюся с комплексной проективной прямой, состоящей из классов $[z_0:z_1]$ пропорциональных пар $(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 \setminus 0$. В следующем семестре мы построим контравариантный функтор $\tilde{H}^*$ из категории TOP в категорию $(\mathbb{Z}/2)\text{-ALG}^*$ градуированных алгебр над полем $\mathbb{Z}/2$ вычетов по модулю 2 и вычислим его значение на пространствах $\mathbb{CP}^1$ и $\mathbb{CP}^2$. (Напомним, что алгебра A называется градуированной алгеброй, если она разложена в прямую сумму линейалов A^n , причем $A^n A^m \subset A^{n+m}$ для любых n и m ; формула $\deg a = n$ означает при этом, что $a \in A^n$.) В силу контравариантности функтора $\tilde{H}^*$ после применения его к диаграмме (2) (при $X = \mathbb{CP}^2$ и $A = \mathbb{CP}^1$) получается диаграмма

$$\tilde{H}^*(\mathbb{CP}^2) \xleftarrow{\tilde{H}^*(i)} \tilde{H}^*(\mathbb{CP}^1) \hookrightarrow \text{id}.$$

Оказывается, что алгебра $\tilde{H}^*(\mathbb{CP}^1)$ содержит единственный нетривиальный элемент T_1 (так что $T_1^2 = 0$), а алгебра $\tilde{H}^*(\mathbb{CP}^2)$ порождается как линейное пространство двумя линейно независимыми элементами T_2 и T_2^2 (так что $T_2^3 = 0$); при этом $\deg T_1 = \deg T_2 = 2$. Кроме того, так как гомоморфизмы φ и $\tilde{H}^*(i)$, являясь морфизмами категории $(\mathbb{Z}/2)\text{-ALG}^*$, сохраняют градуировку, то $\varphi T_1 = a T_2$ и $\tilde{H}^*(i) T_2 = b T_1$, где $a, b \in \mathbb{Z}/2$. Но $\tilde{H}^*(i) \circ \varphi = \text{id}$ и потому $a = b = 1$. Следовательно, $T_2^2 = (\varphi T_1)^2 = \varphi(T_1^2) = 0$, что невозможно, ибо $T_2^2 \neq 0$ в $\tilde{H}^*(\mathbb{CP}^2)$. Полученное противоречие доказывает, что $\mathbb{CP}^2$ не ретрагируемо на $\mathbb{CP}^1$.

Заметим, что в этом рассуждении мы существенно использовали мультипликативную структуру алгебры $\tilde{H}^*(X)$.

Пусть E^4 — единичный шар пространства $\mathbb{C}^2$, состоящий из точек (z_0, z_1) , для которых $|z_0|^2 + |z_1|^2 \leq 1$. Формула

$$h: (z_0, z_1) \mapsto [z_0:z_1:1 - |z_0|^2 - |z_1|^2]$$

определяет — очевидно, эпиморфное — отображение $h: E^4 \rightarrow \mathbb{CP}^2$, так что плоскость $\mathbb{CP}^2$ оказывается фактор-

пространством шара E^4 . На внутренности $|z_0|^2 + |z_1|^2 < 1$ шара E^4 отображение h является гомеоморфизмом на $CP^2 \setminus CP^1$, а на его граничной сфере $S^3: |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1$ — непрерывным отображением $(z_0, z_1) \mapsto [z_0:z_1]$ на CP^1 . Поскольку комплексная проективная прямая CP^1 естественным образом отождествляется со сферой Римана S^2 (точке $[z_0:z_1]$ отвечает комплексное число $z = z_0/z_1$ или — при $z_1 = 0$ — символ ∞) и, значит, со сферой S^2 , последнее отображение — оно называется *отображением Хопфа* — мы можем считать отображением $S^3 \rightarrow S^2$. Обозначать отображение Хопфа мы будем символом h .

Группа S^1 комплексных чисел вида $e^{i\theta}$ действует на сфере S^3 по формуле $e^{i\theta}(z_0, z_1) = (e^{i\theta}z_0, e^{i\theta}z_1)$, и орбитами этого действия являются большие круги сферы S^3 , представляющие собой прообразы точек сферы S^2 при отображении h (так что это отображение индуцирует гомеоморфизм $S^3/S^1 \approx S^2$).

Таким образом, мы можем сказать, что комплексная проективная плоскость CP^2 получается из шара E^4 стягивавшем в точки некоего семейства больших кругов его граничной сферы S^3 (подобно тому как вещественное проективное пространство RP^n получается из шара E^n отождествлением пар антиподальных точек его граничной сферы S^{n-1}).

Предположим, что отображение Хопфа может быть распространено на E^4 . Это предположение означает, что существует отображение $g: E^4 \rightarrow CP^1$, удовлетворяющее соотношению $g|_{S^3} = h|_{S^3}$. Но тогда формула $r = g \circ h^{-1}$ будет корректно определять непрерывное отображение $r: CP^2 \rightarrow CP^1$, тождественное на CP^1 , т. е. являющееся ретракцией. Поскольку такого отображения существовать не может, этим доказано, что *отображение Хопфа $h: S^3 \rightarrow S^2$ не распространяется на E^4* .

Связь между неретрагируемостью CP^2 на CP^1 и нераспространимостью отображения Хопфа имеет вполне общий характер.

В ситуации диаграммы (1), т. е. для пары (X, A) и непрерывного отображения $f: A \rightarrow Y$, мы можем рассмотреть пространство $X \cup_f Y$, являющееся факторпространством дизъюнктного объединения $X \sqcup Y$ по минимальному отношению эквивалентности, в котором $a \sim f(a)$ для любой точки $a \in A$. Об этом пространстве говорят, что оно получено *приклеиванием пространства X к простран-*

ству Y посредством отображения f . Эта терминология находит свое оправдание в том, что ограничение на Y отображения факторизации $X \sqcup Y \rightarrow X \cup_f Y$ является, как легко видеть, гомеоморфизмом, так что пространство Y можно в силу этого гомеоморфизма считать подпространством пространства $X \cup_f Y$. Аналогично, подпространство $X \setminus A$ также можно считать подпространством пространства $X \cup_f Y$, и тогда будет иметь место равенство

$$X \cup_f Y = (X \setminus A) \cup Y.$$

Пространство $X \cup_f Y$ обладает тем свойством (называемым свойством коуниверсальности), что для любого топологического пространства Z и любой коммутативной диаграммы вида

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & X \\ i \downarrow & j & \downarrow g \\ Y & \xrightarrow{j} & Z \end{array}$$

где j и g — непрерывные отображения, а i — вложение, отображение $\bar{g}: X \cup_f Y \rightarrow Z$, совпадающее на $X \setminus A$ с g , а на Y с j , непрерывно (и обладает тем свойством, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} A & & \xrightarrow{i} & & X \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & X \cup_f Y & & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ Y & & \xrightarrow{j} & & Z \end{array}$$

коммутативна). В частности, если отображение j является вложением, а отображение g на $X \setminus A$ — биективным отображением на $X \setminus Y$, то отображение $\bar{g}$ будет биективным непрерывным отображением и, следовательно, будет гомеоморфизмом, если пространство $X \cup_f Y$ компактно, а пространство Z хаусдорфово. Поскольку пространство $X \cup_f Y$ заведомо компактно, когда компактны пространства X и Y , эти условия выполнены при $X = E^4$, $A = S^3$, $Y = \mathbb{C}P^1$, $Z = \mathbb{C}P^2$ и $f = h$. Таким образом, мы можем считать, что комплексная проективная плоскость $\mathbb{C}P^2$ получается в результате приклеивания к сфере S^3 шара E^4 посредством отображения Хопфа:

$$\mathbb{C}P^2 = E^4 \cup_h S^3.$$

Если в диаграмме (1) существует отображение $\bar{f}: X \rightarrow Y$, то по свойству коуниверсальности (примененному к отображению $g = \bar{f}$) существует отображение $\bar{g}: X \cup_f Y \rightarrow Y$, тождественное на Y , т. е. являющееся ретракцией. Обратно, если существует ретракция $r: X \cup_f Y \rightarrow Y$, то композиция с этой ретракцией ограничения на X отображения факторизации $X \sqcup Y \rightarrow X \cup_f Y$ будет отображением $X \rightarrow Y$, являющимся распространением отображения f . Этим доказано следующее предложение.

Предложение 1. В диаграмме (1) распространение $\bar{f}$ отображения $f: A \rightarrow Y$ существует тогда и только тогда, когда пространство $X \cup_f Y$ ретрагируется на пространство Y . $\square$

Тем самым общая задача распространения (1) редуцируется к своему частному случаю (2). Эта редукция часто бывает полезна.

Приведем теперь пример задачи поднятия (3) (или, точнее, ее частного случая (4)).

Векторным полем на сфере S^n называется непрерывное отображение, сопоставляющее каждой точке $x \in S^n$ некоторый вектор $v(x)$, касающийся сферы в этой точке. Поскольку вектор v , касающийся сферы S^n в точке x , характеризуется условием $(x, v) = 0$, векторные поля на S^n можно рассматривать как непрерывные отображения $v: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, удовлетворяющие соотношению $(x, v(x)) = 0$, $x \in S^n$. Нас особо будут интересовать поля, состоящие из векторов единичной длины, и такие их наборы, что в каждой точке их векторы ортогональны. Другими словами, нас будут интересовать наборы $v_1, \dots, v_m$ таких отображений $v_i: S^n \rightarrow S^n$, $i = 1, \dots, m$, что в любой точке $x \in S^n$ имеют место равенства $(x, v_i(x)) = 0$ и $(v_i(x), v_j(x)) = 0$, $i, j = 1, \dots, m$. Такие наборы мы будем называть полями m -реперов (или, короче, m -полями) на сфере S^n . Конечно, здесь предполагается, что $0 \leq m \leq n$.

Если $n = 2k - 1$, то сферу S^n мы можем трактовать как единичную сферу комплексного пространства $\mathbb{C}^k$, и тогда формула $v(x) = ix$, где $i = \sqrt{-1}$, будет, очевидно, определять на S^n некоторое 1-поле. При $n = 4k - 1$ сфера S^n является единичной сферой кватернионного пространства $\mathbb{H}^k$ и формулы $v_1(x) = ix$, $v_2(x) = jx$, $v_3(x) = kx$ определяют на S^n некоторое 3-поле. Аналогичным образом, с помощью так называемых алгебр Клиффорда,

частными случаями которых являются алгебры $\mathbb{C}$ и $\mathbb{H}$, на сфере S^n можно, как показали Радон и Гурвиц, построить $(2^a + 8b - 1)$ -поле, где a и b — такие целые числа, что $0 \leq a \leq 3$ и 2^{a+4b} является наивысшей степенью двойки, на которую делится число $n+1$. Возникает вопрос, является ли этот результат точным или же существуют такие n , что на сфере S^n можно построить m -поле при $m \geq 2^a + 8b$. Например, при $n=5$ метод Радона — Гурвица дает нам на сфере S^5 лишь 1-поле. Существует ли на этой сфере 2-поле?

Чтобы ответить на этот вопрос, мы должны переформулировать его в виде одной из задач (1) — (4). С этой целью мы введем в рассмотрение множество $V_{n+1, m+1}$ всех $(m+1)$ -реперов пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, т. е. $(m+1)$ -членных ортонормированных семейств $(v_1, \dots, v_{m+1})$ векторов этого пространства. Поскольку $(m+1)$ -реперы естественным образом отождествляются с $(m+1) \times (n+1)$ -матрицами, столбцы которых ортонормированы, множество $V_{n+1, m+1}$ оказывается подмножеством топологического пространства $\mathbb{R}(m+1, n+1)$ всех $(m+1) \times (n+1)$ -матриц, и потому само является топологическим пространством (на самом деле даже гладким многообразием). Ясно, что, сопоставив каждой точке $(v_1, \dots, v_{m+1}) \in V_{n+1, m+1}$ вектор $v_{m+1} \in S^n$, мы получим непрерывное отображение

$$(6) \quad p: V_{n+1, m+1} \rightarrow S^n.$$

Если теперь $\{v_1, \dots, v_m\}$ — произвольное m -поле на S^n , то формула $s(x) = (v_1(x), \dots, v_m(x), x)$, $x \in S^n$, будет определять сечение $s: S^n \rightarrow V_{n+1, m+1}$ отображения p и, наоборот, любое сечение этого отображения будет задавать некоторое m -поле. Тем самым вопрос о существовании на сфере S^n поля m -реперов переформулируется в виде вопроса о существовании для отображения (6) хотя бы одного сечения.

Соответствующая производная алгебраическая задача (получающаяся применением функтора $\tilde{H}^*$) имеет вид

$$(7) \quad \text{id} \hookrightarrow \tilde{H}^*(S^n) \xrightarrow[\varphi]{\tilde{H}^*(p)} \tilde{H}^*(V_{n+1, m+1}),$$

где, как оказывается, $\tilde{H}^*(S^n)$ является градуированной алгеброй над $\mathbb{Z}/2$ с одной образующей σ степени n , подчиненной соотношению $\sigma^2 = 0$. Что же касается алгебры $\tilde{H}^*(V_{n+1, m+1})$, то, как можно показать, в этой алгебре

все элементы степени $< n$ равны нулю и имеется единственный отличный от нуля элемент α степени n , являющийся образом элемента σ при отображении $\tilde{H}^*(p)$. Поэтому отображение $\varphi: \tilde{H}^*(V_{n+1, m+1}) \rightarrow \tilde{H}^*(S^n)$, замыкающее диаграмму (7), должно определяться формулой

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} \sigma, & \text{если } \xi = \alpha, \\ 0, & \text{если } \xi \neq \alpha, \end{cases} \quad \xi \in \tilde{H}^*(V_{n+1, m+1}).$$

Поскольку это отображение является, очевидно, гомоморфизмом алгебр, мы никакого противоречия не получаем. Это означает, что для рассматриваемой задачи функтор $\tilde{H}^*$ оказался слишком слабым, чтобы дать определенный ответ.

Однако, как мы покажем в следующем семестре, функтор $\tilde{H}^*$ принимает на самом деле значения в категории градуированных $\mathbb{Z}/2$ -алгебр, являющихся одновременно модулями над некоторой замечательной алгеброй, называемой *алгеброй Стиррода*. Поэтому отображение φ в диаграмме (7) должно быть не только гомоморфизмом алгебр, но и гомоморфизмом модулей, т. е. должно быть перестановочно с действиями элементов алгебры Стиррода. Алгебра Стиррода устроена довольно сложно, но нам сейчас достаточно знать, что для любого $m \geq 1$ в ней имеется элемент, обозначаемый символом Sq^m , под действием которого степени всех элементов алгебры $\tilde{H}^*(X)$ повышаются на m . Поскольку в алгебре $\tilde{H}^*(S^n)$ нет ненулевых элементов степени $\neq n$, отсюда следует, что $\text{Sq}^m \sigma = 0$ для любого $m \geq 1$. Вместе с тем оказывается (весьма нетривиальный факт!), что если $m = 2^k$ является наивысшей степенью двойки, делящей число $n+1$, то в алгебре $\tilde{H}^*(V_{n+1, m+1})$ имеет место соотношение $\text{Sq}^m \alpha \neq 0$. Поэтому при $m = 2^k$ указанное выше отображение φ не может быть гомоморфизмом модулей (потому, что тогда имело бы место равенство $\text{Sq}^m \alpha = \text{Sq}^m \varphi(\sigma) = \varphi(\text{Sq}^m \sigma) = \varphi(0) = 0$). Этим доказано, что *поля 2^k -реперов на сфере S^n не существует*. В частности, на сфере S^5 нет 2-поля.

Если мы, как и выше, представим k в виде $a + 4b$, где $0 \leq a \leq 3$, то равенство $2^k = 2^a + 8b$ будет иметь место только при $b = 0$. Поэтому при $b > 0$ доказанный результат (известный, кстати сказать, как теорема Стиррода и Уайтхеда) дает на поставленный выше вопрос лишь частичный ответ. Полный ответ (утверждающий точность

оценки Радона—Гурвица) был получен лет двадцать тому назад Адамсом, использовавшим очень мощный функтор $\tilde{K}\tilde{O}$ (который мы также изучим в следующем году).

Мы видим, что решение той или иной конкретной задачи методом алгебраической топологии естественным образом разбивается на два этапа. На первом этапе данная задача переформулируется в виде одной из задач (1)—(4), а на втором этапе изучается соответствующая производная алгебраическая задача. Основная трудность состоит здесь в выборе подходящего алгебраического функтора, который, с одной стороны, должен быть эффективно вычислимым (хотя бы только для участвующих в задаче пространств) и с другой—должен принимать значения в категории структурно достаточно богатых объектов, чтобы дать определенный ответ.

Рассмотренные примеры характерны для алгебро-топологических проблем также и в том отношении, что эти проблемы, как правило, нетривиальны и интересны уже для самых простых (с точки зрения общей топологии) пространств—сфер, шаров, их конечных объединений (так называемых «полиэдров») и т. п. Поэтому, хотя основные задачи алгебраической топологии мы сформулировали без всяких априорных условий на фигурирующие в них пространства, но на практике мы без колебаний будем налагать на эти пространства любые общетопологические ограничения типа, скажем, аксиом отделимости или тех или иных условий локальной простоты, которые по той или иной причине будут нам удобны. Освобождение от этих условий будет лежать вне рамок нашего изложения.

Однако даже самые простые топологические пространства имеют мощность континуума, а эффективно вычисляемые алгебраические объекты конечны или счетны. Это означает, что при переходе от задачи (1) к задаче (5) происходит колоссальная потеря информации. Только поэтому, собственно говоря, метод алгебраической топологии и оказывается применимым к конкретным геометрическим задачам. Но, спрашивается, почему при этом не теряется существенная информация, т. е. почему алгебраическая топология успешно проскальзывает между Сциллой невычислимой информативности и Харибдой вычислимой неинформативности? Ответ на этот вопрос оказывается очень интересным.

Определение 1. Пусть X и Y — топологические пространства. Гомотопией из X в Y называется произвольное непрерывное отображение

$$(8) \quad F: X \times I \rightarrow Y,$$

где $I = [0, 1]$ — единичный отрезок.

Любая гомотопия (8) по формуле

$$f_t(x) = F(x, t), \quad x \in X, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

т. е. по формуле $f_t = F \circ \sigma_t$, $0 \leq t \leq 1$, где $\sigma_t: X \rightarrow X \times I$ — отображение $x \mapsto (x, t)$, определяет семейство непрерывных отображений

$$(9) \quad f_t: X \rightarrow Y, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Такое семейство также называется гомотопией из X в Y . Таким образом, семейство отображений $f_t: X \rightarrow Y$ тогда и только тогда является гомотопией, когда отображение $F: X \times I \rightarrow Y$, определенное формулой $F(x, t) = f_t(x)$, $x \in X$, $0 \leq t \leq 1$, непрерывно. В этом случае говорят также, что отображения f_t непрерывно зависят от t .

О гомотопии (8) (и (9)) говорят, что она связывает отображение $f_0: X \rightarrow Y$ с отображением $f_1: X \rightarrow Y$.

Отображения $f, g: X \rightarrow Y$ называются гомотопными, если существует гомотопия $F: X \times I \rightarrow Y$, связывающая отображение f с отображением g (т. е. такая, что $f = f_0$ и $g = f_1$). В этом случае пишут $F: f \sim g$ или просто $f \sim g$.

Наглядно, гомотопность двух отображений означает, что одно из них можно непрерывно продеформировать в другое.

Вопрос о гомотопности отображений $f, g: X \rightarrow Y$ равносителен, очевидно, задаче распространения на $X \times I$ отображения $h: (X \times 0) \cup (X \times 1) \rightarrow Y$, заданного формулой

$$h(x, t) = \begin{cases} f(x), & \text{если } t = 0, \\ g(x), & \text{если } t = 1. \end{cases}$$

Тем самым теория гомотопий (изучающая отношение гомотопности отображений) включается в алгебраическую топологию.

Легко видеть, что на множестве $\text{TOP}(X, Y)$ всех непрерывных отображений $X \rightarrow Y$ отношение гомотопности является отношением эквивалентности. Действительно, во-первых, $F: f \sim f$, где $F(x, t) = f(x)$ для любых $x \in X$ и $t \in I$. Во-вторых, если $F: f \sim g$, то $G: g \sim f$, где $G(x, t) =$

$= F(x, 1-t)$, $x \in X$, $t \in I$. Наконец, если $F: f \sim g$ и $G: g \sim h$, то $H: f \sim h$, где

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t), & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ G(x, 2t-1), & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases} \quad \square$$

Поэтому все непрерывные отображения $X \rightarrow Y$ разбиваются на классы гомотопных друг другу отображений. Эти классы называются *гомотопическими классами* отображений из X в Y .

Множество всех гомотопических классов отображений из X в Y обозначается символом $[X, Y]$, а класс, содержащий данное отображение $f: X \rightarrow Y$, — символом $[f]$.

Переход к гомотопическим классам все существенно эффективизирует, поскольку для «разумных» пространств X и Y множество $[X, Y]$ оказывается, как правило, конечным, или счетным.

Определение 2. Говорят, что отображение $i: A \rightarrow X$ является *корасслоением* или что оно удовлетворяет *аксиоме о распространении гомотопий* (аксиоме **РГ**) если для любого пространства Y , любой гомотопии $f_t: A \rightarrow Y$ и любого отображения $\bar{f}: X \rightarrow Y$, удовлетворяющего соотношению $\bar{f} \circ i = f_0$, существует такая гомотопия $\bar{f}_t: X \rightarrow Y$, что $\bar{f}_0 = \bar{f}$ и $\bar{f}_t \circ i = f_t$ для любого $t \in I$:

(10)

$$F(a, t) = f_t(a),$$

$$\bar{F}(x, t) = \bar{f}_t(x).$$

Пара (X, A) , состоящая из пространства X и его подпространства A , называется *парой Борсука*, если аксиоме **РГ** удовлетворяет вложение $i: A \rightarrow X$.

В частности, для любой пары Борсука (X, A) отсюда следует, что если отображения $f, g: A \rightarrow Y$ гомотопны и f распространимо на X , то g также распространимо на X . Иными словами, для пары Борсука (X, A) свойство отображения $f: A \rightarrow Y$ быть распространяемым на X зависит только от его гомотопического класса $[f]$. Это значит, что в задаче (1) мы можем вместо отображений рассматривать их гомотопические классы, что, согласно сказанному выше, переводит нас из мира континуальных мощностей в мир счетных множеств, для адекватного исследования которого сред-

ствами алгебры очевидных препятствий нет. Это объясняет, почему для пар Борсука метод алгебраической топологии позволяет эффективно решать задачу (1). В случае же, когда (X, A) не является парой Борсука, этот метод не работает. К счастью, все реально встречающиеся на практике задачи (1) либо обладают тем свойством, что для них пары (X, A) являются парами Борсука, либо тривиально сводятся к таким задачам.

Можно сказать, что естественным объектом изучения алгебраической топологии являются не столько непрерывные отображения, сколько их гомотопические классы. В этом смысле алгебраическая топология практически полностью поглощается теорией гомотопий.

Таким образом, хотя между алгебраической топологией и теорией гомотопий, вообще говоря, знак равенства ставить нельзя, но фактически они переплетаются настолько тесно, что становятся неотличимыми друг от друга.

Легко видеть, что *отношение гомотопности согласовано с композицией отображений*, т. е. если $f \sim g$, где $f, g: X \rightarrow Y$, то $f \circ k \sim g \circ k$ и $h \circ f \sim h \circ g$ для любых непрерывных отображений $k: Z \rightarrow X$ и $h: Y \rightarrow Z$. Действительно, если отображения f и g связаны гомотопией $f_t: X \rightarrow Y$, то отображения $f \circ k$ и $g \circ k$ будут связаны гомотопией $f_t \circ k: Z \rightarrow Y$, а отображения $h \circ f$ и $h \circ g$ — гомотопией $h \circ f_t: X \rightarrow Z$. $\square$

Отсюда следует, что формула

$$[g] \circ [f] = [g \circ f], \quad f: X \rightarrow Y, \quad g: Y \rightarrow Z$$

корректно определяет композицию гомотопических классов. Ясно, что по отношению к этой композиции совокупность всех топологических пространств и всех гомотопических классов их непрерывных отображений является категорией. Эта категория называется *гомотопической категорией* и обозначается символом $[TOP]$ (или $Ho-TOP$). Она и является естественной областью действия алгебраической топологии.

Для произвольной категории A и любых ее объектов A, B символом $A(A, B)$ обозначается множество всех морфизмов $A \rightarrow B$. В этих обозначениях

$$[X, Y] = [TOP](X, Y)$$

для любых топологических пространств X и Y .

Переход от категории TOP к категории $[\text{TOP}]$ может быть без труда аксиоматизирован.

Категорию A мы будем называть *категорией с гомотопиями*, если для любых ее объектов A, B в множестве $A(A, B)$ выделены некоторые семейства $\{f_t, t \in I\}$ морфизмов $f_t: A \rightarrow B$, называемые *гомотопиями*, причем выполнены следующие аксиомы:

1°. Каждое семейство $\{f_t: A \rightarrow B\}$, для которого $f_t = f_0$ для всех $t \in I$, является гомотопией.

2°. Для любой гомотопии $\{f_t: A \rightarrow B\}$ семейство $\{f_{1-t}: A \rightarrow B\}$ является гомотопией.

3°. Для любых гомотопий $\{f_t: A \rightarrow B\}$ и $\{g_t: A \rightarrow B\}$, обладающих тем свойством, что $f_1 = g_0$, семейство $\{h_t: A \rightarrow B\}$, определяемое формулой

$$h_t = \begin{cases} f_{2t}, & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ g_{2t-1}, & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

является гомотопией.

4°. Для любой гомотопии $\{f_t: A \rightarrow B\}$ и любых морфизмов $k: C \rightarrow A$ и $h: B \rightarrow C$ семейства $\{f_t \circ k: C \rightarrow B\}$ и $\{h \circ f_t: A \rightarrow C\}$ являются гомотопиями.

В такой категории определены гомотопические классы и осуществим переход к соответствующей гомотопической категории $\text{Ho-}A = [A]$.

Мы не будем систематически заниматься этой абстрактной чепухой¹⁾, но иметь ее в виду нам будет часто полезно.

ДОПОЛНЕНИЕ

Основные понятия общей топологии. — Экспоненциальный закон для множеств отображений. — Экспоненциальный закон для пространств отображений.

Перечислим основные понятия общей топологии, которые мы предполагаем известными (см., например, [1] или [8]).

Топологии и топологические пространства. Открытые и замкнутые множества. Окрестности. Базы и предбазы. Локальные базы (фундаментальные системы окрестностей). Аксиомы счетности (первая и вторая; условие сепарабельности).

¹⁾ «Абстрактная чепуха» (general nonsense) — это не ругательство, а термин, предложенный Н. Стиродом, для обозначения общекатегорных конструкций.

Непрерывные отображения. Открытые отображения. Монеоморфизмы, эпиморфизмы и гомеоморфизмы.

Подпространства. Факторпространства и фактортопологии. Прямые произведения и прямые суммы (дизъюнктные объединения) топологических пространств.

Аксиомы отделимости: хаусдорфовы, регулярные и нормальные пространства.

Покрывтия (открытые). Вписанность покрывтий. Компактные (= бикомпактные), локально компактные и паракомпактные пространства.

Нам понадобятся лишь самые простые свойства этих понятий. В частности, мы будем считать известным, что биективное непрерывное отображение компактного пространства на хаусдорфово пространство является гомеоморфизмом и что любое хаусдорфово локально компактное пространство регулярно.

Мы будем также считать известным, что для любого нормального пространства X и любого его замкнутого подпространства A каждое непрерывное отображение $A \rightarrow \mathbb{R}^n$ может быть распространено на все X . Это утверждение называется теоремой Титце (несмотря на то, что впервые оно было доказано Урысоном).

Частный случай теоремы Титце (необходимый, впрочем, для ее доказательства) утверждает, что для двух замкнутых непересекающихся подпространств A и B нормального пространства X существует непрерывная функция $\varphi: X \rightarrow I$, равная нулю на A и единице на B . Этот частный случай называется леммой Урысона, а любая такая функция φ называется функцией Урысона для A и B .

Другие менее известные (или более специальные) общетопологические результаты мы напомним, когда они нам понадобятся.

Исключением является так называемый экспоненциальный закон, который нам будет удобно изложить немедленно.

Пусть X и B — произвольные топологические пространства. Хотя существует довольно много способов топологизации множества $\text{TOP}(X, B)$ всех непрерывных отображений $X \rightarrow B$, но мы будем использовать только компактно открытую топологию этого множества (называемую также топологией компактной сходимости). В этой топологии множество тогда и только тогда открыто, когда оно яв-

ляется объединением конечных пересечений множеств $\mathscr{W}(K, U)$, каждое из которых задается компактным множеством $K \subset X$, открытым множеством $U \subset B$ и состоит из всех отображений $f: X \rightarrow B$, для которых $f(K) \subset U$. (В терминологии теории топологических пространств множества $\mathscr{W}(K, U)$ составляют предбазу компактно открытой топологии.)

Множество $\text{TOP}(X, B)$, снабженное компактно открытой топологией, мы будем обозначать символом B^X . Это обозначение оправдывается тем, что в случае, когда X является дискретным пространством, состоящим из n точек $x_1, \dots, x_n$, пространство B^X естественно гомеоморфно пространству $B \times \dots \times B = B^n$ посредством гомеоморфизма $B^X \rightarrow B^n$, задаваемого соответствием

$$f \mapsto (f(x_1), \dots, f(x_n)), \quad f \in B^X, \quad (f(x_1), \dots, f(x_n)) \in B^n.$$

(Другим оправданием этого обозначения является доказываемый ниже экспоненциальный закон $(B^X)^Y = B^{X \times Y}$.)

Для любых трех пространств X, Y и B и любого непрерывного отображения $f: X \times Y \rightarrow B$ формула

$$[(\theta f)(g)]x = f(x, y), \quad x \in X, y \in Y,$$

определяет некоторое отображение

$$\theta f: Y \rightarrow B^X$$

пространства Y в пространство B^X , называемое отображением, *ассоциированным с f* . Оказывается, что в компактно открытой топологии *отображение θf непрерывно*. Чтобы это доказать, достаточно, очевидно, показать, что для любого компактного множества $K \subset X$ и любого открытого множества $U \subset B$ прообраз $(\theta f)^{-1} \mathscr{W}(K, U)$ множества $\mathscr{W}(K, U) \subset B^X$ открыт в Y , т. е. что каждая его точка y_0 является его внутренней точкой. Но так как $(\theta f)(y_0) \in \mathscr{W}(K, U)$, т. е. $[(\theta f)(y_0)]K \subset U$, то $f(x, y_0) \in U$ для любой точки $x \in K$, т. е. $K \times y_0 \subset f^{-1}(U)$. С другой стороны, множество $f^{-1}(U)$ открыто в $X \times Y$ и потому является объединением множеств вида $G \times H$ («прямоугольников»), где G открыто в X , а H открыто в Y . В силу компактности множества K (а, значит, и множества $K \times y_0$) существует конечная система

$$G_1 \times H_1, \dots, G_m \times H_m$$

этих прямоугольников, покрывающая множество $K \times y_0$. Тогда открытое подмножество $H = H_1 \cap \dots \cap H_m$ пространства Y будет содержать точку y_0 и каждая его точка y будет обладать тем свойством, что $K \times y \subset f^{-1}(U)$, и, значит, $(\theta f)(y) \in \mathscr{W}(K, U)$. Иными словами, H будет окрестностью точки y_0 в Y , содержащейся в множестве $(\theta f)^{-1}\mathscr{W}(K, U)$, и, значит, точка y_0 будет внутренней точкой последнего множества. $\square$

Таким образом, соответствие $\theta: f \mapsto \theta f$ представляет собой отображение

$$\theta: \text{TOP}(X \times Y, B) \rightarrow \text{TOP}(Y, B^X)$$

множества $\text{TOP}(X \times Y, B)$ в множество $\text{TOP}(Y, B^X)$. Это отображение называется *отображением ассоциирования*.

Равенство $\theta f = \theta g$, где $f, g: X \times Y \rightarrow B$, означает, что $f(x, y) = [(\theta f)(y)]x = [(\theta g)(y)]x = g(x, y)$ для любых точек $x \in X$, $y \in Y$, т. е. что $f = g$. Следовательно, *отображение ассоциирования инъективно*.

Чтобы выяснить, когда отображение θ биективно, мы введем в рассмотрение отображение

$$\omega: X \times B^X \rightarrow B,$$

определяемое формулой

$$\omega(x, f) = f(x), \quad x \in X, f: X \rightarrow B,$$

и называемое *отображением вычисления*.

Оказывается, что *отображение ассоциирования $\theta: \text{TOP}(X \times Y, B) \rightarrow \text{TOP}(Y, B^X)$ тогда и только тогда биективно для любого пространства Y , когда отображение вычисления $\omega: X \times B^X \rightarrow B$ непрерывно.* Действительно, если отображение ω непрерывно, то для любого отображения $g: Y \rightarrow B^X$ отображение $f = \omega \circ (\text{id} \times g): X \times Y \rightarrow B$ (т. е. отображение $(x, y) \mapsto \omega(x, g(y)) = [g(y)]x$) будет непрерывно, т. е. будет лежать в $\text{TOP}(X \times Y, B)$, и, очевидно, будет обладать тем свойством, что $\theta f = g$. Следовательно, если отображение ω непрерывно, то отображение θ надъективно, и, значит, биективно (ибо, как выше уже было замечено, это отображение всегда инъективно). Обратно, если отображение θ биективно при любом Y и, в частности, при $Y = B^X$, то непрерывное отображение $\omega' = \theta^{-1}(\text{id}) \in \text{TOP}(X \times B^X, B)$ будет для любой точки $(x, f) \in X \times B^X$ удовлетворять соотношению

$$\omega'(x, f) = [\theta(\omega')f](x) = f(x) = \omega(x, f)$$

и, значит, будет совпадать с ω . Поэтому отображение ω непрерывно. $\square$

С другой стороны, легко показывается, что *если пространство X локально компактно и хаусдорфово, то для любого пространства B отображение вычисления ω непрерывно*. Действительно, пусть $(x_0, f_0) \in X \times B^X$, и пусть U — произвольная окрестность точки $\omega(x_0, f_0) = f_0(x_0)$ в пространстве B . Так как отображение $f_0: X \rightarrow B$ непрерывно, а пространство X локально компактно и хаусдорфово (и потому регулярно), то в X существует такая окрестность V точки x_0 с компактным замыканием $\bar{V}$, что $f_0(\bar{V}) \subset U$. Поэтому в B^X определено открытое множество $\mathscr{W}(\bar{V}, U)$, содержащее точку f_0 , а в $X \times B^X$ — открытое множество $W = V \times \mathscr{W}(\bar{V}, U)$, содержащее точку (x_0, f_0) . При этом для любой точки $(x, f) \in W$ имеет место включение

$$\omega(x, f) = f(x) \in f(\bar{V}) \subset U,$$

показывающее, что $\omega(W) \subset U$. Итак, для каждой точки $(x_0, f_0) \in X \times B^X$ и любой окрестности U точки $\omega(x_0, f_0) \in B$ существует такая окрестность W точки (x_0, f_0) , что $\omega(W) \subset U$. Следовательно, отображение ω непрерывно. $\square$

Таким образом, *если пространство X локально компактно и хаусдорфово, то для любых пространств Y и B отображение ассоциирования*

$$\theta: \text{TOP}(X \times Y, B) \rightarrow \text{TOP}(Y, B^X)$$

биективно.

Это утверждение называется экспоненциальным законом для множеств отображений. Довольно сильные условия, налагаемые в нем на пространство X (кстати сказать, очень близкие к необходимым), являются частным проявлением общей дефектности категории TOP в отношении прямого произведения. Общий способ избавления от такого рода условий (с которыми мы в дальнейшем столкнемся и в других ситуациях) состоит в переходе к категории, объектами которой являются топологические пространства, а морфизмами — такие отображения $f: X \rightarrow Y$ топологических пространств (называемые *каноническими отображениями*), что для любого компактного пространства K и любого непрерывного отображения $\varphi: K \rightarrow X$ составное отображение $f \circ \varphi: K \rightarrow Y$ непрерывно, или, что, по существу, равносильно, к категории, мор-

физмами которой являются непрерывные отображения, а объектами—такие топологические пространства X (называемые *каонными пространствами*), что множество $C \subset X$ тогда и только тогда замкнуто, когда для любого компактного пространства K и любого непрерывного отображения $\varphi: K \rightarrow X$ его прообраз $\varphi^{-1}C$ замкнут в K . Однако в этом курсе мы не будем гнаться за формальным совершенством теории и предпочтем остаться в более привычной категории ТОР.

В связи с экспоненциальным законом естественно возникает также вопрос о справедливости его для пространств отображений, т. е. о том, будет ли отображение ассоциирования гомеоморфизмом пространства $B^{X \times Y}$ на (или хотя бы в) пространство $(B^X)^Y$. Ответ оказывается, вообще говоря, утвердительным только для хаусдорфовых пространств X и Y . Хотя этот факт нам будет нужен лишь ограниченно, мы все же для полноты картины докажем его здесь в полной общности.

В первую очередь мы покажем, что *если пространство Y хаусдорфово, то для любых пространств X и B отображение ассоциирования*

$$\theta: B^{X \times Y} \rightarrow (B^X)^Y$$

непрерывно. Действительно, по определению каждое открытое множество в $(B^X)^Y$ является объединением конечных пересечений множеств вида $\mathscr{W}(L, V)$, где L —компактное подмножество в Y , а V —открытое подмножество в B^X . Поэтому достаточно показать, что для любого множества вида $\mathscr{W}(L, V)$ его прообраз при отображении θ открыт в $B^{X \times Y}$. Пусть $f \in \mathscr{W}(L, V)$ и $y \in L$. Так как $f(y) \in V$ и так как множество V в свою очередь является объединением конечных пересечений множеств вида $\mathscr{W}(K_i, U_i)$, где K_i —компактные множества в X , а U_i —открытые множества в B , то в X существуют такие компактные множества $K_1^y, \dots, K_{n_y}^y$, а в B —такие открытые множества $U_1^y, \dots, U_{n_y}^y$, что $f(y) \in V_y \subset V$, где

$$V_y = \mathscr{W}(K_1^y, U_1^y) \cap \dots \cap \mathscr{W}(K_{n_y}^y, U_{n_y}^y).$$

Но тогда, поскольку отображение $f: Y \rightarrow B^X$ непрерывно, в Y найдется такая окрестность G_y точки y , что $f(G_y) \subset V_y$. При этом, так как пространство L , будучи хаусдорфовым (как подпространство хаусдорфова пространства Y) и ком-

пактным, регулярно, то в L существует такая окрестность H_y точки $y \in L$, что $\bar{H}_y \subset G_y \cap L$.

Выберем теперь в L такую конечную систему точек $y_1, \dots, y_m$, что окрестности $H_{y_1}, \dots, H_{y_m}$ покрывают L (такая система существует в силу компактности L). Так как

$$f(\bar{H}_{y_i}) \subset f(G_{y_i}) \subset V_{y_i} \subset V, \quad i = 1, \dots, m,$$

и

$$V_{y_i} = \mathscr{W}(K_i^l, U_i^l) \cap \dots \cap \mathscr{W}(K_{n_i}^l, U_{n_i}^l),$$

где для краткости положено

$$K_j^l = K_j^{y_i}, \quad U_j^l = U_j^{y_i} \quad \text{и} \quad n_i = n_{y_i}$$

для любого $i = 1, \dots, m$ и любого $j = 1, \dots, n_i$, то

$$f \in \mathscr{W}(\bar{H}_{y_i}, \mathscr{W}(K_j^l, U_j^l)), \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n_i$$

(множества $\bar{H}_{y_i}$, будучи замкнутыми подмножествами компактного множества L , компактны) и, значит, $f \in W$, где

$$W = \bigcap_{i=1}^m \bigcap_{j=1}^{n_i} \mathscr{W}(\bar{H}_{y_i}, \mathscr{W}(K_j^l, U_j^l)).$$

С другой стороны, если $g \in W$, т. е. если

$$g(\bar{H}_{y_i}) \subset \bigcap_{j=1}^{n_i} \mathscr{W}(K_j^l, U_j^l) = V_{y_i} \subset V$$

для любого $i = 1, \dots, m$, то

$$g(L) = \bigcup_{i=1}^m g(\bar{H}_{y_i}) \subset V$$

и, значит, $g \in \mathscr{W}(L, V)$. Следовательно, $W \subset \mathscr{W}(L, V)$. Этим доказано, что любая точка $f \in \mathscr{W}(L, V)$ имеет в $\mathscr{W}(L, V)$ окрестность вида W и, значит, множество $\mathscr{W}(L, V)$ является объединением множеств вида W , т. е. конечных пересечений множеств вида $\mathscr{W}(L, \mathscr{W}(K, U))$, где K — компактное множество в X , а U — открытое множество в B . Поэтому нам достаточно доказать, что в $B^{X \times Y}$ открыт полный прообраз при отображении θ каждого множества вида $\mathscr{W}(L, \mathscr{W}(K, U))$. Но это очевидно, поскольку, как непосредственно следует из определения отображения θ , этим прообразом является множество $\mathscr{W}(K \times L, U)$. $\square$

Таким образом, при хаусдорфовом Y (и любых X и B) отображение θ является непрерывным (и, как мы знаем, инъективным) отображением пространства $B^{X \times Y}$ в пространство $(B^X)^Y$. Покажем, что если хаусдорфово также пространство X , то отображение θ является открытым (и, следовательно, гомеоморфным) отображением на $\text{Im } \theta = \theta(B^{X \times Y})$. Ясно, что для этого достаточно доказать, что для любого компактного множества M из $X \times Y$ и любого открытого множества U из B множество $\theta \mathcal{W}(M, U)$ открыто в $\text{Im } \theta$, т. е. что любая его точка $g_0 = \theta f_0$, где $f_0 \in \mathcal{W}(M, U)$, является его внутренней точкой. Пусть K и L — проекции множества M соответственно в X и Y . Так как отображение $f_0: X \times Y \rightarrow B$ непрерывно, а пространства K и L , будучи компактными и хаусдорфовыми, регулярны (даже нормальны), то для любой точки $z = (x, y) \in M$, где $x \in K$, $y \in L$, существуют такие окрестности $\bar{V}_z$ и $\bar{W}_z$ точек x и y в соответственно пространствах K и L , что $f_0(\bar{V}_z \times \bar{W}_z) \subset U$ и, значит, $(g_0 \bar{V}_z) \bar{W}_z \subset U$, т. е.

$$g_0 \in \mathcal{W}(\bar{V}_z, \mathcal{W}(\bar{W}_z, U))$$

(так как множества $\bar{V}_z$ и $\bar{W}_z$, будучи замкнутыми подмножествами компактных пространств, компактны, то символ $\mathcal{W}(\bar{V}_z, \mathcal{W}(\bar{W}_z, U))$ имеет смысл). С другой стороны, так как множество M компактно, то в нем существует такая конечная система точек $z_1, \dots, z_n$, что множества

$$V_{z_1} \times W_{z_1}, \dots, V_{z_n} \times W_{z_n}$$

покрывают M . Множество

$$\mathcal{W} = (\text{Im } \theta) \cap \bigcap_{i=1}^n \mathcal{W}(\bar{V}_{z_i}, \mathcal{W}(\bar{W}_{z_i}, U))$$

открыто в $\text{Im } \theta$ и, по только что сказанному, содержит отображение g_0 .

Пусть $g = \theta f$ — произвольное отображение из $\mathcal{W}$. Так как $g \in \mathcal{W}(\bar{V}_{z_i}, \mathcal{W}(\bar{W}_{z_i}, U))$ для любого $i = 1, \dots, n$, то $(g \bar{V}_{z_i}) \bar{W}_{z_i} \subset U$, т. е. $f(\bar{V}_{z_i} \times \bar{W}_{z_i}) \subset U$, и, значит,

$$f(M) \subset f\left(\bigcup_{i=1}^n (\bar{V}_{z_i} \times \bar{W}_{z_i})\right) \subset U,$$

т. е. $f \in \mathcal{W}(M, U)$. Этим доказано, что $W \subset \theta \mathcal{W}(K, U)$, и, значит, что точка g_0 является внутренней точкой множества $\text{Im } \theta$. $\square$

Комбинируя полученные результаты с экспоненциальным законом, мы получаем, что если

а) пространство X хаусдорфово и локально компактно,

б) пространство Y хаусдорфово,

то для любого пространства B отображение ассоциирования

$$\theta: B^{X \times Y} \rightarrow (B^X)^Y$$

является гомеоморфизмом.

Это утверждение известно как экспоненциальный закон для пространств отображений.

Гомотопии и пути.— Корасслоения и пары Борсука.— Амальгамы.— Амальгамы и коиндуцированные корасслоения.— Цилиндр отображения.— Характеризация корасслоений и пар Борсука.— Произведение пар Борсука.— Расслоения.— Коамальгамы и индуцированные расслоения.— Коцилиндр отображения и аксиома о накрывающем пути.— Расслоения пространств отображений.

Напомним, что *путем* в топологическом пространстве X называется произвольное непрерывное отображение $u: I \rightarrow X$. Точка $u(0)$ называется *началом* пути, а точка $u(1)$ — его *концом*. Говорят также, что точки $u(0)$ и $u(1)$ *соединены* путем u .

Все пути пространства X составляют топологическое пространство X^I .

Топологическое пространство X называется *связным* (или — точнее — *линейно связным*), если любые две его точки могут быть соединены путем. Каждое пространство X является объединением максимальных связных подмножеств, называемых его *компонентами*.

Обозначив символом pt топологическое пространство, состоящее из одной точки, мы можем каждый путь $I \rightarrow X$ рассматривать как отображение $pt \times I \rightarrow X$, т. е. как гомотопию из pt в X . В соответствии с этим компоненты пространства X являются не чем иным, как гомотопическими классами отображений $pt \rightarrow X$.

С другой стороны, ясно, что экспоненциальный закон (для множеств отображений) позволяет, наоборот, *любую гомотопию интерпретировать как некоторый путь*, поскольку отображение, ассоциированное с произвольной гомотопией $F: X \times I \rightarrow Y$, является не чем иным, как путем $I \rightarrow Y^X$ в пространстве отображений Y^X .

К сожалению, эта изящная и наглядная интерпретация гомотопий вполне адекватна только для локально компактных и хаусдорфовых пространств X . Для произвольных же пространств X не каждый путь в Y^X будет гомотопией из X в Y . Поэтому, в частности, только для локально компактных и хаусдорфовых пространств X гомотопические классы отображений из X в Y можно отождествлять с компонентами пространства Y^X . В общем же

случае, каждая такая компонента может состоять из нескольких гомотопических классов.

Более удовлетворительный результат получится, когда мы применим экспоненциальный закон, переставив предварительно X и I . Тогда отображение, ассоциированное с произвольной гомотопией $F: X \times I \rightarrow Y$ (которое мы позволим себе обозначать той же буквой F), будет задаваться формулой

$$(F(x))(t) = F(x, t), \quad x \in X, t \in I,$$

и будет представлять собой непрерывное отображение $X \rightarrow Y^I$. Поскольку пространство I (играющее здесь роль пространства X из формулировки экспоненциального закона) заведомо локально компактно и хаусдорфово, мы видим, следовательно, что для любых пространств X и Y гомотопии $X \times I \rightarrow Y$ из X в Y находятся в естественном биективном соответствии с непрерывными отображениями $X \rightarrow Y^I$. Поэтому отображения $X \rightarrow Y^I$ мы также будем называть гомотопиями из X в Y .

Как при этой интерпретации гомотопий получаются отображения f_0 и f_1 , ими связанные? Чтобы ответить на этот вопрос, мы заметим, что для любых пространств X и B , любого отображения $f: X \rightarrow B$ и любой точки $x_0 \in X$ формула

$$\omega_{x_0} f = f(x_0)$$

определяет некоторое отображение

$$\omega_{x_0}: B^X \rightarrow B$$

(срез по x_0 отображения вычисления ω). Хотя отображение ω , вообще говоря, разрывно, отображение ω_{x_0} для любой точки $x_0 \in X$ непрерывно, так как для каждого открытого множества $U \subset B$ его прообразом $\omega_{x_0}^{-1}U$ при отображении ω_{x_0} является открытое множество $\mathcal{W}^o(\{x_0\}, U)$ (в любом топологическом пространстве все одноточечные подмножества компактны).

В частности, непрерывны отображения

$$\omega_0: B^I \rightarrow B, \quad \omega_1: B^I \rightarrow B$$

пространства путей, сопоставляющие каждому пути соответственно его начальную и конечную точки.

Теперь ясно, что (мы заменяем B на Y) для каждой гомотопии $F: X \rightarrow Y^I$ композиции $\omega_0 \circ F: X \rightarrow Y$ и $\omega_1 \circ F: X \rightarrow Y$ являются отображениями, связанными этой гомотопией.

Поэтому, например, аксиома о распространении гомотопии может быть записана в виде диаграммы

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & X \\ \downarrow p & \searrow \omega & \downarrow j \\ Y & \xrightarrow{\omega_0} & Y \end{array}$$

значительно более наглядной и удобной, чем диаграмма (10) лекции 0.

Лемма 1. Каждое корасслоение $i: A \rightarrow X$ является инъективным отображением, а если его образ $i(A)$ замкнут в X , то и монееоморфизмом.

Доказательство. Пусть

$$CA = A \times I / A \times 0$$

— факторпространство произведения $A \times I$, получающееся стягиванием подпространства $A \times 0$ в точку. (Пространство CA называется *конусом* над A ; мы вернемся к нему в следующей лекции.) Пусть, далее, a_0 —образ подпространства $A \times 0$ в CA (*вершина конуса*), и пусть $j: A \rightarrow CA$ —монееоморфизм, индуцированный отображением $a \mapsto (a, 1)$, $a \in A$. Отображение факторизации $A \times I \rightarrow CA$ мы можем рассматривать как гомотопию из A в CA , связывающую постоянное отображение $\text{const}_A: A \rightarrow CA$, $a \mapsto a_0$, с отображением j . Следовательно, так как $\text{const}_A = \text{const}_X \circ i$, где const_X —отображение $X \rightarrow CA$, $x \mapsto a_0$, то, согласно аксиоме РГ, существует такое отображение $g: X \rightarrow CA$, что $g \circ i = j$. Но отображение j инъективно. Поэтому отображение i также инъективно. Кроме того, $iP = g^{-1}(jP) \cap iA$ для любого подмножества $P \subset A$. Поэтому, если iA замкнуто, то для любого замкнутого подмножества $P \subset A$ множество iP замкнуто (поскольку в силу непрерывности отображения g и монееоморфности отображения j множество $g^{-1}(jP)$ замкнуто). Следовательно, в этом случае отображение i является монееоморфизмом. $\square$

Согласно этой лемме корасслоения с замкнутыми образами по существу являются парами Борсука. Тем не менее в рассмотрениях общего характера предпочтительнее доказывать теоремы о корасслоениях, чем о парах Борсука, хотя бы потому, что, как мы увидим, понятие корасслоения допускает полезную и очень важную дуализацию.

Согласно общему предложению 1 лекции 0 аксиома о распространении гомотопий может быть сформулирована как требование о существовании некоей ретракции. Соответствующая конструкция вполне элементарна, но, имея в виду ее впоследствии дуализировать, мы изложим ее сейчас в общекатегорных терминах, что позволит нам, в частности, заново доказать предложение 1 лекции 0.

Пусть $\mathbf{A}$ — произвольная категория, и пусть $i_A: C \rightarrow A$ и $i_B: C \rightarrow B$ — два морфизма этой категории с одной и той же областью определения C .

Прямой конус над парой (i_A, i_B) называется каждая пара (j_A, j_B) морфизмов $j_A: A \rightarrow D$, $j_B: B \rightarrow D$, удовлетворяющая соотношению $j_A \circ i_A = j_B \circ i_B$, т. е. такая, что диаграмма

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{i_A} & A \\ i_B \downarrow & & \downarrow j_A \\ B & \xrightarrow{j_B} & D \end{array}$$

коммутативна. Морфизмом конуса $(j_A: A \rightarrow D, j_B: B \rightarrow D)$ в конус $(j'_A: A \rightarrow D', j'_B: B \rightarrow D')$ называется такой морфизм $\varphi: D \rightarrow D'$, что $j'_A \circ \varphi = j_A$ и $j'_B \circ \varphi = j_B$, т. е. что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} & & D & & \\ & \nearrow j_A & \downarrow \varphi & \nwarrow j_B & \\ A & & & & B \\ & \searrow j'_A & & \swarrow j'_B & \\ & & D' & & \end{array}$$

Ясно, что все прямые конусы (над данной парой (i_A, i_B)) и все их морфизмы составляют категорию $\overrightarrow{\text{CON}}(i_A, i_B)$.

Инициальный объект этой категории, т. е. такой конус $(j_A: A \rightarrow D, j_B: B \rightarrow D)$, что для любого другого конуса (j'_A, j'_B) над (i_A, i_B) в категории $\overrightarrow{\text{CON}}(i_A, i_B)$ существует единственный морфизм $(j_A, j_B) \xrightarrow{\quad} (j'_A, j'_B)$, называется амальгамой диаграммы $A \xleftarrow{i_A} C \xrightarrow{i_B} B$ или, допуская определенную неточность, амальгамой объектов A и B с амальгамируемым объектом C . Иногда амальгамой называют сам объект D . Диаграмма (2), в которой D является амальгамой, называется коуниверсальным (или декартовым) квадратом.

Поскольку в любой категории инициальный объект (когда он существует), с точностью до канонического изоморфизма определен единственным образом, то же самое верно и для амальгам.

Легко видеть, что в категории TOP амальгама существует для любой диаграммы $A \xleftarrow{i_A} C \xrightarrow{i_B} B$. Пространством D для нее будет факторпространство дизъюнктного объединения $A \sqcup B$ по минимальному отношению эквивалентности, в котором $a \sim b$, если существует такое $c \in C$, что $i_A(c) = a$ и $i_B(c) = b$, а отображениями $j_A: A \rightarrow D$ и $j_B: B \rightarrow D$ — отображения, индуцированные вложениями $A \rightarrow A \sqcup B$ и $B \rightarrow A \sqcup B$. Действительно, по построению $j_A \circ i_A = j_B \circ i_B$, и для любого конуса $(j'_A, j'_B) \in \text{CON}(i_A, i_B)$ отображения $a \mapsto j'_A(a)$, $b \mapsto j'_B(b)$ индуцируют (очевидно, единственное) отображение $\varphi: D \rightarrow D'$, для которого $j'_A = \varphi \circ j_A$ и $j'_B = \varphi \circ j_B$. $\square$

В случае, когда $C = A \cap B$, а отображения i_A и i_B являются вложениями, амальгамой D является объединение $A \cup B$. Это объясняет происхождение термина «амальгама».

Для диаграммы $X \xleftarrow{i} A \xrightarrow{f} Y$, где i — вложение, амальгамой будет построенное в лекции 0 пространство $X \cup_f Y$. Допуская определенную вольность, мы будем использовать обозначение $X \cup_f Y$ для амальгамы диаграммы $X \xleftarrow{i} A \xrightarrow{f} Y$ и в случае произвольного отображения i . Соответствующие отображения $X \rightarrow X \cup_f Y$ и $Y \rightarrow X \cup_f Y$ (являющиеся ограничениями отображения факторизации $X \sqcup Y \rightarrow X \cup_f Y$) мы будем обозначать символами $f_\#$ и i_f . Вместе с отображениями i и f они составляют коуниверсальный квадрат

$$(3) \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & X \\ f \downarrow & & \downarrow f_\# \\ Y & \xrightarrow{i_f} & X \cup_f Y \end{array}$$

Об отображении i_f говорят, что оно коиндуцировано отображением i посредством отображения f . Если отображение i инъективно, то отображение i_f будет монотонным морфизмом на замкнутое подпространство. В этом случае мы, отождествив точки y и $i_f(y)$, будем считать Y замкнутым подпространством пространства $X \cup_f Y$ (что согласуется

с соглашениями из лекции 0, касающимися случая, когда i является вложением).

Предложение 1 лекции 0, т. е. утверждение, что *распространение $\bar{f}: X \rightarrow Y$ отображения $f: A \rightarrow Y$ по отношению к отображению $i: A \rightarrow X$ существует тогда и только тогда, когда коиндуцированное отображение $i_*: Y \rightarrow X \cup Y$ ретрагируемо*, остается верным и для любого отображения i . Действительно, если отображение i_* ретрагируемо и $r: X \cup Y \rightarrow Y$ — соответствующая ретракция, то композиция $\bar{f} = r \circ f_*$ будет, очевидно, удовлетворять соотношению $\bar{f} \circ i = f$. Обратно, если $\bar{f}$ существует, то пара $(\text{id}: Y \rightarrow Y, \bar{f}: X \rightarrow Y)$ будет прямым конусом над (i, f) , и потому будет существовать морфизм $r: X \cup Y \rightarrow Y$ амальгамы $X \cup Y$ в этот конус. Но тогда $r \circ i_* = \text{id}$, так что морфизм r будет ретрактом отображения i_* . $\square$

Таким образом, *задача распространения отображения f равносильна задаче о существовании ретракции коиндуцированного отображения i_** . Однако это — по существу общекатегорное — утверждение было бы для нас фактически бесполезным, если бы при переходе от i к i_* мы выходили из класса корасслоений. На самом же деле в этом отношении все обстоит благополучно, т. е. *отображение $i_*: Y \rightarrow X \cup Y$, коиндуцированное корасслоением $i: A \rightarrow X$, также является корасслоением*. Действительно, из любой диаграммы вида

$$(4) \quad \begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{i_*} & X \cup Y \\ \downarrow G & \searrow \bar{f} & \downarrow \bar{r} \\ Y & \xrightarrow{\omega_0} & Z \end{array}$$

мы, компонируя ее вертикальные стрелки с вертикальными стрелками диаграммы (3), получим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & X \\ \downarrow G \circ f & \searrow f_* & \downarrow G \circ P_X \\ Z & \xrightarrow{\omega_0} & Z \end{array}$$

для которой гомотопия $\bar{F}$ по условию существует. Вместе с G гомотопия $\bar{F}$ образует, очевидно, конус $(\bar{F}; G)$ над

парой (i, f) . Поэтому существует морфизм $\bar{G}: X \cup_f Y \rightarrow Z'$ конуса $(f_\#, i_f)$ в конус $(\bar{F}, G)$, который и будет гомотопией, замыкающей диаграмму (4). Таким образом, для любой диаграммы вида (4) существует замыкающая гомотопия $\bar{G}$ и, значит, отображение i_f является корасслоением. $\square$

Наглядно это доказательство изображается пространственной диаграммой

$$(5) \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & X \\ \downarrow f & \searrow \bar{F} & \downarrow f_\# \\ Y & \xrightarrow{i_f} & X \cup_f Y \\ \downarrow \omega_0 & \searrow \bar{G} & \downarrow \omega_\# \\ Z' & \xrightarrow{\omega_0} & Z \end{array}$$

рассмотрение которой делает доказательство совершенно очевидным.

Определение 1. Цилиндром $\text{Cyl}(i)$ непрерывного отображения $i: A \rightarrow X$ называется амальгама $(A \times I) \cup_i X$ диаграммы

$$A \times I \xleftarrow{\sigma_0} A \xrightarrow{i} X.$$

Эта амальгама получается приклеиванием пространства $A \times I$ к пространству X по отображению $(a, 0) \mapsto i(a)$. Для нее имеет место коуниверсальный квадрат

$$(6) \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & X \\ \sigma_0 \downarrow & & \downarrow (\sigma_0)_\# \\ A \times I & \xrightarrow{i_\#} & \text{Cyl}(i) \end{array}$$

отображение $(\sigma_0)_\#$ которого является монеоморфизмом (обратим внимание, что мы «транспонировали» квадрат (3), что, конечно, ничему не мешает). Мы будем считать, что пространство X вложено в цилиндр $\text{Cyl}(i)$ посредством монеоморфизма $(\sigma_0)_\#$.

Для любой точки $(a, t) \in A \times I$ точку $i_\#(a, t) \in \text{Cyl}(i)$ мы будем обозначать символом $[a, t]$. Таким образом, каждая точка из $\text{Cyl}(i)$ либо имеет вид $[a, t]$, $a \in A$, $t \in I$, либо является точкой x из X . При этом $[a, 0] = i(a)$ для любой точки $a \in A$.

В силу коуниверсальности, формулы

$$j[a, t] = (ia, t), \quad (a, t) \in A \times I,$$

$$j(x) = (x, 0), \quad x \in X,$$

корректно определяют непрерывное отображение

$$j: \text{Cyl}(i) \rightarrow X \times I.$$

В важнейшем частном случае, когда $A \subset X$ и i является вложением, отображение j , как легко видеть, представляет собой инъективное отображение на подпространство $\bar{A} = (X \times 0) \cup (A \times I)$ произведения $X \times I$. Вообще говоря, оно монеоморфизмом не является. Однако если A замкнуто в X , то j представляет собой монеоморфизм, так что в этом случае мы, считая j вложением, можем цилиндр $\text{Cyl}(i)$ отождествить с подпространством $\bar{A}$ пространства $X \times I$. Действительно, по определению множество $C \subset \text{Cyl}(i)$ замкнуто, если замкнуты его прообразы в X и в $A \times I$. В случае, когда $A \subset X$, это равносильно тому, что пересечения $jC \cap (X \times 0)$ и $jC \cap (A \times I)$ замкнуты соответственно в $X \times 0$ и $A \times I$. Но поскольку $X \times 0$ замкнуто в $X \times I$, то пересечение $jC \cap (X \times 0)$ тогда и только тогда замкнуто в $X \times 0$, когда оно замкнуто в $X \times I$. Аналогично, если A замкнуто в X , то $A \times I$ замкнуто в $X \times I$, и, значит, пересечение $jC \cap (A \times I)$ тогда и только тогда замкнуто в $A \times I$, когда оно замкнуто в $X \times I$. Следовательно, если A замкнуто, то для любого замкнутого в $\text{Cyl}(i)$ множества C множество

$$jC = (jC \cap (X \times 0)) \cup (jC \cap (A \times I))$$

замкнуто в $X \times I$, а, значит, и в $\bar{A} = (X \times 0) \cup (A \times I)$. $\square$

Пары (X, A) с замкнутыми A называются *замкнутыми*.

Предложение 1. *Отображение $i: A \rightarrow X$ тогда и только тогда является корасслоением, когда отображение $j: \text{Cyl}(i) \rightarrow X \times I$ ретрагируемо.*

Доказательство: Гомотопия $F: A \times I \rightarrow Y$ и расширение $\bar{f}: X \rightarrow Y$ на X ее начального отображения $f_0 = F \circ \sigma_0$ задают отображение

$$F \sqcup \bar{f}: (A \times I) \sqcup X \rightarrow Y,$$

принимая одинаковые значения в точках $(a, 0)$ и $i(a)$, $a \in A$. Поэтому отображение $F \sqcup \bar{f}$ индуцирует некоторое отображение $g: \text{Cyl}(i) \rightarrow Y$, обладающее тем свойством, что $g[a, t] = F(a, t)$ и $g(x) = \bar{f}(x)$ для любых точек $[a, t]$ и

x из $\text{Cyl}(i)$. (Пара $(F, \bar{f})$ является конусом над (σ_0, i) и g является не чем иным, как морфизмом конуса $(i_*, (\sigma_0)_i)$ в конус $(F, \bar{f})$, предусмотренным свойством коуниверсальности амальгамы $\text{Cyl}(i)$.) Поэтому, если ретракция $r: X \times I \rightarrow \text{Cyl}(i)$ существует, то отображение $\bar{F} = g \circ r: X \times I \rightarrow Y$ будет гомотопией с начальным отображением f (ибо это отображение удовлетворяет соотношению $\bar{F} \circ j = g$, и потому $\bar{F}(x, 0) = (\bar{F} \circ j)(x) = g(x) = \bar{f}(x)$ для любой точки $x \in X$), являющейся распространением (по отношению к отображению i) гомотопии F (ибо $\bar{F}(ia, t) = (\bar{F} \circ j)[a, t] = g[a, t] = F(a, t)$ для любой точки $(a, t) \in A \times I$). Таким образом, если отображение j ретрагируемо, то отображение i является корасслоением.

Обратно, отображение i_* можно рассматривать как гомотопию из A в $\text{Cyl}(i)$ с начальным отображением, являющимся ограничением (по отношению к i) отображения $(\sigma_0)_i$; поэтому, если отображение $i: A \rightarrow X$ является корасслоением, то существует отображение $r: X \times I \rightarrow \text{Cyl}(i)$, удовлетворяющее соотношениям $r(x, 0) = x$ и $r(ia, t) = [a, t]$, т. е. являющееся ретракцией отображения j . $\square$

Следствие. *Замкнутая пара (X, A) тогда и только тогда является парой Борсука, когда подпространство $\bar{A} = (X \times 0) \cup (A \times I)$ является ретрактом пространства $X \times I$.* $\square$

Стрём показал, что предположение о замкнутости подпространства A в этом следствии на самом деле излишне. Однако в соответствии с нашей общей установкой мы будем это утверждение игнорировать, поскольку оно релевантно только для нехаусдорфовых пространств X , так как если для пары (X, A) пространство X хаусдорфово, а подпространство $\bar{A} = (X \times 0) \cup (A \times I)$ является ретрактом пространства $X \times I$, то пара (X, A) замкнута. Действительно, композиция $j \circ r$ ретрагирующего отображения $r: X \times I \rightarrow \bar{A}$ и вложения $j: \bar{A} \rightarrow X \times I$ представляет собой непрерывное отображение $X \times I \rightarrow X \times I$, множеством неподвижных точек которого является $\bar{A}$. В силу хаусдорфовости пространства $X \times I$ отсюда следует, что $\bar{A}$ замкнуто в $X \times I$. Но тогда замкнут (в X) и его прообраз A при непрерывном отображении $\sigma_1: x \mapsto (x, 1)$. $\square$

Заметим, кстати, что для замкнутой пары Борсука (X, A) подпространство A даже функционально выделяемо,

т. е. существует такая непрерывная функция $\varphi: X \rightarrow I$, что $\varphi(a) = 0$ тогда и только тогда, когда $a \in A$. Действительно, пусть $r: X \times I \rightarrow \bar{A}$ — ретрагирующее отображение, и пусть $\rho(x, t)$ — проекция в I точки $r(x, t)$, $(x, t) \in X \times I$. Рассмотрим функцию $\varphi: X \rightarrow I$, определенную формулой

$$\varphi(x) = \max_{t \in I} (t - \rho(x, t)), \quad x \in X.$$

В силу доказываемой ниже леммы 2 функция φ непрерывна на X . Если $a \in A$, то $\rho(a, t) = t$ для любого $t \in I$ и потому $\varphi(a) = 0$. Обратно, если $\varphi(a) = 0$, т. е. $\rho(a, t) \geq t$ при всех $t \in T$, то, в частности, $\rho(a, t) > 0$ при $t > 0$ и, значит, $r(a, t) \in A \times I$. Поскольку подпространство A (а потому и подпространство $A \times I$) по условию замкнуто, отсюда следует, что

$$(a, 0) = r(a, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} r(a, t) \in A \times I$$

и, значит, $a \in A$. $\square$

Лемма 2. Для любого компактного пространства C , произвольного топологического пространства X и любой непрерывной функции $\psi: X \times C \rightarrow \mathbb{R}$ функция $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$, определенная формулой

$$\varphi(x) = \max_{c \in C} \psi(x, c), \quad x \in X,$$

непрерывна на X .

Доказательство. Из компактности пространства C следует, во-первых, что для любой точки $x \in X$ максимум достигается, т. е. существует (вообще говоря, не единственная) такая точка $c_x \in C$, что $\varphi(x) = \psi(x, c_x)$. Во-вторых, функция ψ равномерно непрерывна по x в каждой точке пространства X , т. е. для любой $\varepsilon > 0$ и любой точки $x_0 \in X$ существует такая окрестность $U \subset X$ точки x_0 , что $|\psi(x, c) - \psi(x_0, c)| < \varepsilon$ для любых точек $x \in U$ и $c \in C$. Поэтому, если $x \in U$ и $\varphi(x) \geq \varphi(x_0)$, то

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \varphi(x_0)| &= \varphi(x) - \varphi(x_0) \leq \psi(x, c_x) - \psi(x_0, c_x) = \\ &= |\psi(x, c_x) - \psi(x_0, c_x)| < \varepsilon, \end{aligned}$$

а если $\varphi(x) \leq \varphi(x_0)$, то

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \varphi(x_0)| &= \varphi(x_0) - \varphi(x) \leq \psi(x_0, c_{x_0}) - \psi(x_0, c_{x_0}) = \\ &= |\psi(x, c_{x_0}) - \psi(x_0, c_{x_0})| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$ для любой точки $x \in U$, т. е. функция φ непрерывна. $\square$

Произведением $(X, A) \times (Y, B)$ пар (X, A) и (Y, B) называется пара $(X \times Y, X \times B \cup A \times Y)$.

Предложение 2 (теорема Стрёма). Произведение $(Z, C) = (X \times Y, X \times B \cup A \times Y)$

замкнутых пар Борсука (X, A) и (Y, B) является замкнутой парой Борсука.

Доказательство. Согласно следствию из предложения 1 подпространства $\tilde{A} = X \times 0 \cup A \times I$ и $\tilde{B} = Y \times 0 \cup B \times I$ являются ретрактами пространств $X \times I$ и $Y \times I$ соответственно. Пусть $r: X \times I \rightarrow \tilde{A}$ и $s: Y \times I \rightarrow \tilde{B}$ — соответствующие ретракции, и пусть

$$r(x, t) = (\bar{r}(x, t), \rho(x, t)), \quad (x, t) \in X \times I,$$

$$s(y, t) = (\bar{s}(y, t), \sigma(y, t)), \quad (y, t) \in Y \times I,$$

где $\bar{r}(x, t) \in X$, $\bar{s}(y, t) \in Y$ и $\rho(x, t), \sigma(y, t) \in I$, причем $\rho(x, t) = 0$, если $\bar{r}(x, t) \notin A$ и $\sigma(y, t) = 0$, если $\bar{s}(y, t) \notin B$. Как и выше, мы положим

$$\varphi(x) = \max_{t \in I} (t - \rho(x, t)), \quad x \in X,$$

и аналогично

$$\psi(y) = \max_{t \in I} (t - \sigma(y, t)), \quad y \in Y.$$

Пусть, далее,

$$P(x, y, t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \leq \min(\varphi(x), \psi(y)), \\ t - \min(\varphi(x), \psi(y)), & \text{если } t \geq \min(\varphi(x), \psi(y)), \end{cases}$$

и

$$\bar{R}(x, y, t) = (\bar{r}(x, \min(t, \psi(y))), \bar{s}(y, \min(t, \varphi(x)))).$$

Если $\bar{R}(x, y, t) \notin C = X \times B \cup A \times Y$, то $\bar{s}(y, \min(t, \varphi(x))) \notin B$, $\bar{r}(x, \min(t, \psi(y))) \notin A$ и, значит, $\sigma(y, \min(t, \varphi(x))) = 0$, $\rho(x, \min(t, \psi(y))) = 0$. Поэтому $\min(t, \varphi(x)) \leq \psi(y)$ и $\min(t, \psi(y)) \leq \varphi(x)$, т. е. $t \leq \min(\varphi(x), \psi(y))$, и, значит, $P(x, y, t) = 0$. Следовательно, формула

$$R(x, y, t) = (\bar{R}(x, y, t), P(x, y, t)), \quad (x, y, t) \in Z \times I,$$

определяет некоторое отображение

$$R: Z \times I \rightarrow \tilde{C} = Z \times 0 \cup C \times I.$$

При этом, если $(x, y, t) \in \tilde{C}$, т. е. либо $t=0$, либо $y \in B$ (и, значит, $\psi(y)=0$), либо $x \in A$ (и, значит, $\psi(x)=0$), то $P(x, y, t)=t$ и $\bar{R}(x, y, t)=(\bar{r}(x, 0), \bar{s}(y, 0))=(x, y)$, т. е. $R(x, y, t)=(x, y, t)$. Следовательно, отображение R является ретракцией, и потому пара (Z, C) — парой Борсука. $\square$

Следствие 1. Для любой замкнутой пары Борсука (X, A) и любого $n > 0$ пара $(X, A)^n$ является парой Борсука.

Доказательство. Очевидная индукция. $\square$

Следствие 2. Для любой замкнутой пары Борсука (X, A) и любого топологического пространства Y пара $(X \times Y, A \times Y)$ является замкнутой парой Борсука.

Доказательство. Это — частный случай предложения 2, получающийся при $B = \emptyset$. Впрочем, это следствие непосредственно вытекает и прямо из следствия предложения 1, поскольку для каждого ретрагирующего отображения $r: X \times I \rightarrow \tilde{A}$ отображение $r \times \text{id}: X \times I \times Y \rightarrow \tilde{A} \times Y$ будет ретрагирующим отображением пространства $X \times I \times Y = X \times Y \times I$ на подпространство $\tilde{A} \times Y = (X \times Y \times 0) \cup (A \times Y \times I) = \widetilde{A \times Y}$. $\square$

Ясно, что композиция двух корасслоений является корасслоением, так что, в частности, если $X \supset A \supset B$ и пары (X, A) и (A, B) являются парами Борсука, то пара (X, B) также будет парой Борсука.

Применив это утверждение к парам $(X \times Y, X \times B)$ и $(X \times B, A \times B)$ и воспользовавшись следствием 2, мы немедленно получим

Следствие 3. Для любых двух замкнутых пар Борсука (X, A) и (Y, B) пара $(X \times Y, A \times B)$ также является замкнутой парой Борсука. $\square$

Согласно общекатегорному принципу двойственности для понятия корасслоения должно существовать двойственное понятие, получающееся «обращением всех стрелок».

Определение 2. Отображение $p: E \rightarrow B$ называется *расслоением* (в смысле Гуревича), если для любого пространства X , любой гомотопии $f_t: X \rightarrow B$ и любого отображения $\bar{f}$, удовлетворяющего соотношению $p \circ \bar{f} = f_0$, существует такая гомотопия $\bar{f}_t: X \rightarrow E$, что $\bar{f}_0 = \bar{f}$ и $p \circ \bar{f}_t = f_t$ для любого $t \in Y$.

Таким образом, отображение $p: E \rightarrow B$ является расслоением, если из того, что начальное отображение $f_0: X \rightarrow B$ некоторой гомотопии $f_t: X \rightarrow B$ может быть поднято на E , следует, что на E можно поднять каждое отображение f_t , причем поднятия $\tilde{f}_t$ можно выбрать так, чтобы они составляли гомотопию.

Это требование называется *аксиомой о накрывающей гомотопии* (короче, *аксиомой НГ*).

Наглядно, аксиома о накрывающей гомотопии изображается диаграммой

$$(7) \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & E \\ \sigma_0 \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{F} & B \end{array}$$

двойственной диаграмме (1).

В частности, мы видим, что если отображения $f, g: X \rightarrow B$ гомотопны и f может быть поднято на E , то g также может быть поднято на E , так что для расслоений свойство отображения $f: X \rightarrow B$ допускать подъем на E зависит только от его гомотопического класса $[f]$. Таким образом, и в задаче поднятия (задача (3) лекции 0) мы можем перейти в гомотопическую категорию.

Это объясняет, почему в алгебраической топологии задача поднятия рассматривается только для расслоений. (Впрочем, как мы увидим в лекции 3, серьезным ограничением это не является.)

Лемма 3. Если отображение $p: E \rightarrow B$ является расслоением, то для любого пути $u: I \rightarrow B$ и любой точки $e \in E$, такой, что $p(e) = u(0)$, существует путь $v: I \rightarrow E$, начинающийся в точке e и накрывающий путь u (т. е. такой, что $p \circ v = u$).

Доказательство. Определим гомотопию $u_t: I \rightarrow B$ формулой

$$u_t(s) = u(ts), \quad s, t \in I.$$

Так как $u_0(s) = u(0) = p(e)$ для всех $s \in I$, то $p \circ 0_e = u_0$, где $0_e: s \mapsto e$ — постоянный путь в точке e . Поэтому существует такая гомотопия $v_t: I \rightarrow E$, что $p \circ v_t = u_t$ для всех $t \in I$ (и $v_0 = 0_e$). В частности, $p \circ v_1 = u_1$. Поскольку $v_1(0) = e$ и $u_1 = u$, это доказывает лемму (с $v = v_1$). $\square$

Следствие. Для любого расслоения $p: E \rightarrow B$ (с непустым E) множество $p(E)$ является объединением ком-

понент пространства B . В частности, если пространство B связно, то p является надъективным отображением.

Доказательство. Пусть $b \in p(E)$, и пусть $u: I \rightarrow B$ — произвольный путь, начинающийся в b . Нам нужно доказать, что $u(1) \in p(E)$. Пусть $p(e) = b$, и пусть $v: I \rightarrow B$ — путь, накрывающий путь u и начинающийся в e . Тогда $p(v(1)) = u(1)$ и, следовательно, $u(1) \in p(E)$. $\square$

Последнее утверждение этого следствия двойственно к первому утверждению леммы 1. Дуализация второго утверждения леммы 1 (вопрос об эпиморфности расслоений) мало интересна, и мы ей заниматься не будем. Можно, например, показать, что расслоение $E \rightarrow B$ будет эпиморфным отображением в случае, когда пространство B связно и локально связно, но обсуждение вопроса, может ли это условие на B считаться двойственным условием замкнутости подпространства iA из леммы 1, увело бы нас слишком далеко в сторону. Что какие-то условия на B необходимы, показывает пример тождественного отображения множества рациональных чисел в дискретной топологии на него же в обычной топологии. Не будучи эпиморфизмом, это отображение, как показывает легкая проверка, является расслоением.

Пусть A — произвольная категория, и пусть $p_A: A \rightarrow C$ и $p_B: B \rightarrow C$ — два морфизма этой категории с одной и той же областью значений. Обратным конусом над парой (p_A, p_B) называется пара (q_A, q_B) морфизмов $q_A: D \rightarrow A$ и $q_B: D \rightarrow B$ удовлетворяющая соотношению $p_A \circ q_A = p_B \circ q_B$, т. е. такая, что диаграмма

$$(8) \quad \begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{q_A} & A \\ q_B \downarrow & & \downarrow p_A \\ B & \xrightarrow{p_B} & C \end{array}$$

коммутативна. Морфизмом конуса $(q'_A: D' \rightarrow A, q'_B: D' \rightarrow B)$ в конус $(q_A: D \rightarrow A, q_B: D \rightarrow B)$ называется такой морфизм $\varphi: D' \rightarrow D$ категории A , что $q_A \circ \varphi = q'_A$ и $q_B \circ \varphi = q'_B$, т. е. такой, что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} & & D' & & \\ & q'_A \swarrow & \downarrow \varphi & \searrow q'_B & \\ A & & D & & B \\ & q_A \swarrow & \downarrow & \searrow q_B & \\ & & D & & \end{array}$$

Ясно, что все обратные конусы (над данной парой (p_A, p_B))

и все их морфизмы составляют категорию $\text{CON}(p_A, p_B)$.

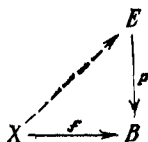
Терминальный объект этой категории, т. е. такой конус $(q_A: D \rightarrow A, q_B: D \rightarrow B)$, что для любого другого конуса (q'_A, q'_B) над (p_A, p_B) в категории $\text{CON}(p_A, p_B)$ существует единственный морфизм $(q'_A, q'_B) \rightarrow (q_A, q_B)$, называется коамальгамой диаграммы $A \xrightarrow{p_A} C \xleftarrow{p_B} B$ или, — допуская определенную неточность, — коамальгамой объектов A и B над объектом C . Иногда коамальгамой называют сам объект D . Диаграмма (8), в которой D является коамальгамой, называется универсальным (или кодекартовым) квадратом.

Поскольку в любой категории терминальный объект (когда он существует) с точностью до канонического изоморфизма определен единственным образом, то же самое верно и для коамальгам.

Легко видеть, что в категории TOP коамальгама существует для любой диаграммы $A \xrightarrow{p_A} C \xleftarrow{p_B} B$. Пространством D для нее будет подмножество прямого произведения $A \times B$, состоящее из таких точек $(a, b) \in A \times B$, что $p_A(a) = p_B(b)$, а отображениями $q_A: D \rightarrow A$ и $q_B: D \rightarrow B$ — ограничения естественных проекций $A \times B \rightarrow A$ и $A \times B \rightarrow B$. Действительно, по построению $p_A \circ q_A = p_B \circ q_B$ и для любого конуса $(q'_A: D' \rightarrow A, q'_B: D' \rightarrow B)$ формула $\varphi(x) = (q'_A(x), q'_B(x))$, $x \in D'$, определяет (очевидно, единственное) отображение $\varphi: D' \rightarrow D$, для которого $q'_A = q_A \circ \varphi$ и $q'_B = q_B \circ \varphi$. $\square$

В случае, когда $A \subset C$ и $B \subset C$, а отображения p_A и p_B являются вложениями, коамальгама D естественным образом отождествляется с пересечением $A \cap B$ подпространств A и B .

С каждой задачей поднятия



мы свяжем коамальгаму диаграммы

$$E \xrightarrow{p} B \xleftarrow{f} X.$$

Эту коамальгаму мы будем обозначать символом $E \cap, X$, а проекции $E \cap, X \rightarrow X$ и $E \cap, X \rightarrow E$ — символами p и f^* . Таким образом, $E \cap, X$ является подпространством прямого произведения $E \times X$, состоящим из точек (e, x) , для

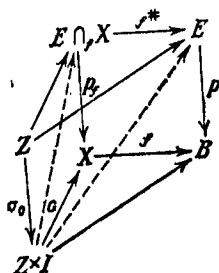
которых $p(e) = f(x)$, а отображения $p_!$ и $f^\#$ действуют по формулам $(e, x) \mapsto x$ и $(e, x) \mapsto e$. Вместе с отображениями f и p эти отображения составляют универсальный квадрат

$$\begin{array}{ccc} E \cap_f X & \xrightarrow{f^\#} & E \\ p_! \downarrow & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Об отображении $p_!: E \cap_f X \rightarrow X$ говорят, что оно *индуцировано* отображением $p: E \rightarrow B$ посредством отображения $f: X \rightarrow B$.

Естественно, что отображение $p_!$ обладает свойствами, двойственными свойствам коиндуцированного отображения $i_!$. Именно, отображение $\bar{f}: X \rightarrow E$, *накрывающее* отображение $f: X \rightarrow B$, существует тогда и только тогда, когда индуцированное отображение $p_!: E \cap_f X \rightarrow X$ обладает сечением. Действительно, если для отображения $p_!$ существует сечение $s: X \rightarrow E \cap_f X$, то композиция $\bar{f} = f^\# \circ s$ будет, очевидно, удовлетворять соотношению $p \circ \bar{f} = f$. Обратно, если отображение $\bar{f}$ существует, то пара $(\text{id}: X \rightarrow X, \bar{f}: X \rightarrow E)$ будет обратным конусом над (f, p) , и потому будет существовать морфизм $s: X \rightarrow E \cap_f X$ этого конуса в конус $(p_!, f^\#)$. В частности, будет иметь место равенство $p_! \circ s = \text{id}$, так что морфизм s будет сечением отображения $p_!$. $\square$

Таким образом, задача поднятия отображения f равносильна задаче о существовании сечения индуцированного отображения $p_!$. При этом в отношении применимости метода алгебраической топологии мы ничего не теряем, поскольку если отображение $p: E \rightarrow B$ было расслоением, то для любого отображения $f: X \rightarrow B$ индуцированное отображение $p_!: E \cap_f X$ также будет расслоением. Для доказательства достаточно рассмотреть диаграмму



двойственную диаграмме (5). $\square$

Отображения p_f и $f^\#$ обладают определенными свойствами естественности (функториальности). Например, если $f = \text{id}$, то пространство $E \cap_f X = E \cap_{\text{id}} B$ естественно отождествляется с E , а отображения $f^\#$ и p_f — с отображениями id и p соответственно. Аналогично, для любого отображения $g: Y \rightarrow X$ пространство $(E \cap_f X) \cap_g Y$ естественным образом отождествляется с пространством $E \cap_{f \circ g} Y$, а отображения $f^\# \circ g^\#$ и $(p_f)_g$ — с отображениями $(f \circ g)^\#$ и $p_{f \circ g}$ соответственно. Таким образом, по модулю указанных отождествлений

$$\text{id}^\# = \text{id}, \quad p_{\text{id}} = p$$

и

$$(f \circ g)^\# = f^\# \circ g^\#, \quad p_{f \circ g} = (p_g) f.$$

Конечно, аналогичные функториальные тождества имеют место и для отображений i_f и $f_\#$.

Замечание о терминологии. Конструкция пространства $E \cap_f X$ может рассматриваться как обобщение конструкции прямого произведения. Поэтому в английском языке это пространство (а также соответствующее расслоение $p_f: E \cap_f X \rightarrow X$) называется *fibre product*. Русская калька «расслоенное произведение» является бесспорным солецизмом, отнюдь не украшающим русскую математическую терминологию. Встречающееся же подчас употребление этого термина в общекатегорной ситуации уже совершенно бессмысленно и представляет собой явную порчу языка.

Следует также предостеречь от употребления несимметричного термина «индуцированное отображение» (индуцированный морфизм) вне рамок задачи поднятия и — аналогичным образом — термина «коиндуцированный морфизм» вне рамок задачи распространения.

Дуализируем теперь понятие цилиндра отображения.

Определение 3. Коцилиндром $\text{Cocyl}(p)$ непрерывного отображения $p: E \rightarrow B$ называется коамальгама $B' \cap_{\omega_0} E$ диаграммы

$$B' \xrightarrow{\omega_0} B \xleftarrow{p} E.$$

По определению эта коамальгама является подпространством прямого произведения $B' \times E$, состоящим из таких пар (u, e) , где $u: I \rightarrow B$, а $e \in E$; что $u(0) = p(e)$. Для нее

имеет место универсальный квадрат

$$(9) \quad \begin{array}{ccc} \text{Cosyl}(p) & \xrightarrow{\omega_0^\#} & E \\ p\omega_0 \downarrow & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{\omega_0} & B \end{array}$$

где $p\omega_0(u, e) = u$ и $\omega_0^\#(u, e) = e$. Кроме того, формула

$$q(v) = (p \circ v, v(0)), \quad v \in E^I,$$

определяет, очевидно, непрерывное отображение

$$q: E^I \rightarrow \text{Cosyl}(p).$$

Предложение 3. Отображение $p: E \rightarrow B$ тогда и только тогда является расслоением, когда для отображения $q: E^I \rightarrow \text{Cosyl}(p)$ существует сечение $s: \text{Cosyl}(p) \rightarrow E^I$.

Доказательству этого предложения мы предположим несколько замечаний, имеющих и самостоятельный интерес.

Задание диаграммы (7) без пунктирной стрелки равносильно, очевидно, заданию коммутативной диаграммы

$$(10) \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\bar{f}} & E \\ F \downarrow & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{\circ} & B \end{array}$$

в которой та же буква F использована для обозначения отображения $X \rightarrow B'$, ассоциированного с гомотопией $F: X \times I \rightarrow B$. Коммутативность диаграммы (10) означает, что пара $(F, \bar{f})$ составляет обратный конус над парой (ω_0, p) . Соответствующий морфизм $(F, \bar{f}) \rightarrow (p\omega_0, \omega_0^\#)$ представляет собой отображение $\varphi: X \rightarrow \text{Cosyl}(p)$, действующее по формуле $x \mapsto (\bar{f}x, Fx)$.

С другой стороны, имея диаграмму (10), мы можем в коцилиндре $\text{Cosyl}(\bar{f}) \subset X \times E^I$ отображения $\bar{f}$ выделить подпространство, состоящее из таких пар (x, v) , $x \in X$, $v: I \rightarrow E$, $\bar{f}(x) = v(0)$, что $F(x) = p \circ v$.

Мы будем обозначать это подпространство символом $\text{Cosyl}(\bar{F}, f)$ и будем называть его *коцилиндром пары $(\bar{F}, f)$* . Его проекцию $(x, v) \mapsto x$ на пространство X мы будем обозначать символом q_X . Как показывает непосредственная

проверка, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \text{Cosyl}(F, \bar{f}) & \rightarrow & E' \\ q_X \downarrow & & \downarrow q \\ X & \xrightarrow[\varphi]{} & \text{Cosyl}(p) \end{array}$$

верхняя горизонтальная стрелка которой представляет собой проекцию $(x, v) \mapsto v$.

При этом легко видеть, что для диаграммы (10) тогда и только тогда существует накрывающая гомотопия $\bar{F}: X \times I \rightarrow E$, когда проекция $q_X: \text{Cosyl}(F, \bar{f}) \rightarrow X$ обладает сечением $s_X: X \rightarrow \text{Cosyl}(F, \bar{f})$. Действительно, формула

$$s_X(x) = (x, \bar{F}x), \quad x \in X,$$

устанавливает биективное соответствие между сечениями s_X и гомотопиями $\bar{F}$, интерпретированными как отображения $X \rightarrow E'$. $\square$

Теперь предложение 3 делается почти очевидным.

Доказательство предложения 3. Если сечение $s: \text{Cosyl}(p) \rightarrow E'$ существует, то для любой диаграммы (10) формула

$$s_X(x) = (x, (s \circ \varphi)(x)), \quad x \in X,$$

будет определять некоторое сечение $s_X: X \rightarrow \text{Cosyl}(F, \bar{f})$ отображения q_X . Поэтому для диаграммы (10) будет существовать накрывающая гомотопия $\bar{F}: X \times I \rightarrow E$. Следовательно, отображение $p: E \rightarrow B$ является расслоением.

Обратно, пусть отображение $p: E \rightarrow B$ является расслоением и, значит, для любой диаграммы (10) соответствующее отображение q_X обладает сечением s_X . В частности, это будет так для диаграммы (9) при $X = \text{Cosyl}(p)$ и $F = p_{\omega_0}$, $\bar{f} = \omega_0^\#$. Но ясно, что проекция

$$\begin{array}{ccc} \text{Cosyl}(p_{\omega_0}, \omega_0^\#) & \rightarrow & E' \\ ((e, u), v) & \mapsto & v, \end{array}$$

является гомеоморфизмом (ибо $e = v(0)$ и $u = p \circ v$) и при этом гомеоморфизме сечениям $\text{Cosyl}(p) \rightarrow \text{Cosyl}(p_{\omega_0}, \omega_0^\#)$ проекции $((e, u), v) \mapsto (e, u)$ отвечают сечения $\text{Cosyl}(p) \rightarrow E'$ отображения $q: v \mapsto (v(0), p \circ v)$. $\square$

Утверждение, что отображение s является сечением отображения q , означает, что $s(e, u)$ представляет собой

путь в E , накрывающий данный путь u в B и начинающийся в данной точке $e \in E$, проектирующейся в начало пути u . Факт существования такого пути составляет содержание леммы 2. Новым является утверждение, что, во-первых, этот выбор можно осуществить непрерывным (по u и e) способом, а во-вторых, что возможность такого выбора не только необходима, но и достаточна для того, чтобы отображение p было расслоением.

Требование существования сечения s называется обычно аксиомой о накрывающем пути (короче — аксиомой НП).

Для произвольного пространства Y каждое непрерывное отображение $i: A \rightarrow X$ определяет по формуле

$$i_Y(f) = f \circ i, \quad f: X \rightarrow Y$$

некоторое отображение

$$i_Y: \text{TOP}(X, Y) \rightarrow \text{TOP}(A, Y).$$

Так как отображение i непрерывно, то для любого компактного множества $K \subset A$ множество $iK \subset X$ также компактно. Поэтому в $\text{TOP}(X, Y)$ для любого открытого множества $U \subset Y$ определено множество $\mathscr{W}(iK, U)$, являющееся, очевидно, прообразом при отображении i_Y множества $\mathscr{W}(K, U)$. Это показывает, что в компактно открытой топологии отображение i_Y непрерывно, т. е. является отображением $i_Y: Y^X \rightarrow Y^A$ топологических пространств.

Если $i: A \rightarrow X$ — вложение, то $i_Y(f)$ является не чем иным, как ограничением отображения $f: X \rightarrow A$ на A . Поэтому отображение i_Y мы будем в этом случае называть отображением ограничения.

Предложение 4. Если пространство X локально компактно и хаусдорфово, его подпространство A замкнуто и пара (X, A) является парой Борсука, то для любого пространства Y отображение ограничения

$$i_Y: Y^X \rightarrow Y^A$$

является расслоением.

Доказательство. Надо показать, что для любой диаграммы вида

$$(11) \quad \begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f} & Y^X \\ \sigma_0 \downarrow & \nearrow \bar{f} & \downarrow i_Y \\ Z \times I & \xrightarrow{F} & Y^A \end{array}$$

существует замыкающее отображение $\bar{F}$. Но поскольку пространство X (и, конечно, в силу замкнутости, подпространство A) локально компактно и хаусдорфово, к горизонтальным отображениям этой диаграммы применим экспоненциальный закон, т. е. эти отображения ассоциированы с некоторыми отображениями $\bar{g}: Z \times X \rightarrow Y$ и $G: Z \times A \rightarrow Y^I$ (мы разрешаем себе удобным для нас образом переставлять в прямых произведениях множители), составляющими, очевидно, диаграмму

$$\begin{array}{ccc} Z \times A & \xrightarrow{\text{Id} \times I} & Z \times X \\ \downarrow G & \nearrow \bar{g} & \downarrow \bar{F} \\ Y^I & \xrightarrow{\omega_0} & Y \end{array}$$

Поскольку в условиях предложения 4 пара $(Z \times X, Z \times A)$ является парой Борсука (см. следствие 2 предложения 2), для последней диаграммы существует замыкающее отображение $\bar{G}$. Ассоциированное с ним отображение $Z \times I \rightarrow Y^X$ и будет, очевидно, отображением $\bar{F}$, замыкающим диаграмму (11). $\square$

Пример. При $X = I$ и $A = \{1\}$ множество $\tilde{A} = (I \times 0) \cup \cup (1 \times I)$, представляющее собой объединение нижней и правой сторон квадрата $X \times I = I \times I$, очевидным образом является ретрактом этого квадрата (ретрагирующим

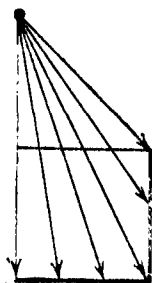


Рис. 1.

отображением является, например, проектирование с центром в точке $(0, 2)$; см. рис. 1). Поскольку в этом случае пространство Y^A естественно отождествляется с пространством Y и поскольку отображение ограничения i_Y переходит при этом в отображение $\omega_1: Y^I \rightarrow Y$, мы в силу предложения 4 получаем отсюда (обозначив Y через X), что для каждого пространства X отображение

$$\omega_1: X^I \rightarrow X$$

является расслоением.

Заметим теперь, что для любого расслоения $p: E \rightarrow B$ и любого подпространства $A \subset B$ отображение

$$p_A = p|_{p^{-1}(A)}: p^{-1}(A) \rightarrow A$$

является расслоением, поскольку это отображение естественным образом отождествляется с расслоением p_i , индуцированным расслоением p посредством отображения вложения $i: A \rightarrow B$.

Чтобы применить это общее замечание к расслоению ω_1 , мы для любого подпространства $A \subset X$ введем в рассмотрение подпространство $X^I(A)$ пространства X^I , состоящее из всех путей, кончающихся в A . Это подпространство в точности совпадает с прообразом $\omega_1^{-1}(A)$ подпространства A при отображении ω_1 . Обозначив ограничение отображения ω_1 на $X^I(A)$ снова через ω_1 , мы получим, следовательно, что для любой пары (X, A) отображение

$$\omega_1: X^I(A) \rightarrow A$$

является расслоением.

Последнее утверждение полезно обобщить. Для этого, снова возвращаясь к ситуации, к которой относится предложение 4, предположим, что нам заданы произвольные семейства $\{A_\mu\}$ и $\{Y_\mu\}$ подпространств пространств A и Y с индексами из одного и того же множества M . Пусть $[Y^A]_M$ — подпространство пространства Y^A , состоящее из таких отображений $f: A \rightarrow Y$, что $f(A_\mu) \subset Y_\mu$ для любого $\mu \in M$, а $[Y^X]_M$ — его прообраз при отображении ограничения i_Y (лежащий в пространстве Y^X). Обозначая ограничение отображения i_Y на $[Y^X]_M$ снова через i_Y , мы получим, следовательно, что в условиях предложения 4 для любых семейств $\{A_\mu\}$ и $\{Y_\mu\}$ отображение

$$i_Y: [Y^X]_M \rightarrow [Y^A]_M$$

является расслоением.

Пример. Пусть $X=I$ и $A=\{0, 1\}$. Легко видеть, что в этом случае условия предложения 4 выполнены (доказательство того, что пара $(I, \{0, 1\})$ является парой Борсука, т. е. что квадрат $I \times I$ ретрагируется на три его стороны $I \times 0 \cup \{0, 1\} \times I = I \times 0 \cup 0 \times I \cup 1 \times I$, иллюстрируется на рис. 2). Считая, что множество индексов M состоит только из одного элемента μ , и полагая $A_\mu = \{0\}$, $Y_\mu = \{y_0\}$, где y_0 — некоторая точка пространства Y , мы можем, очевидно, отождествить пространство $[Y^A]_M$ с компонентой пространства Y , содержащей точку y_0 , а пространство $[Y^X]_M$ — с подпространством всех путей пространства Y , начинающихся в точке y_0 . Заменяя снова Y на X

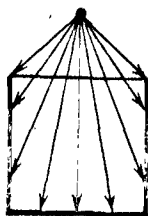


Рис. 2.

(а y_0 на x_0), и обозначая символом $P(X, x_0)$ множество всех путей пространства X , начинающихся в точке $x_0 \in X$, мы получаем, следовательно, что для любого связного пространства X и любой его точки x_0 отображение

$$\omega_1: P(X, x_0) \rightarrow X, \quad \omega_1: u \mapsto u(1),$$

является расслоением. При этом для каждой диаграммы вида

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\bar{f}} & P(X, x_0) \\ \omega_0 \downarrow & \nearrow F & \downarrow \omega_1 \\ C \times I & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

накрывающая гомотопия $\bar{F}$ может быть определена формулой

$$F(x, s)(t) = \begin{cases} \bar{f}(x)\left(\frac{2t}{2-s}\right), & \text{если } 0 \leq t \leq \frac{2-s}{2}, \\ f(x, s+2t-2), & \text{если } \frac{2-s}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Это расслоение называется *серровским расслоением* пространства путей.

Более общим образом мы можем рассмотреть пространство $P(X, A)$, состоящее из путей, начинающихся в $A \subset X$, или его подпространство $P(X, A, B)$, состоящее из путей, кончающихся в $B \subset X$. В обоих случаях отображения

$$\omega_1: P(X, A) \rightarrow X, \quad \omega_1: P(X, A, B) \rightarrow B$$

являются расслоениями.

Заметим в заключение, что условия предложения 4 не только достаточны, но и необходимы. Точнее, если пространство X локально компактно и хаусдорфово, пара (X, A) замкнута и для каждого пространства Y отображение ограничения $Y^X \rightarrow Y^A$ является расслоением, то пара (X, A) будет парой Борсука. Однако на практике этим фактом пользоваться не приходится, и мы его поэтому доказывать не будем.

ДОПОЛНЕНИЕ

Аксиома о мягком распространении накрывающей гомотопии.— Мягкие отображения.— Две леммы о мягких отображениях.— Лемма о покрытиях пространства $X \times I$.— Теорема Дольда.— Локально тривиальные расслоения.

По определению отображение $p: E \rightarrow B$ является расслоением, если оно удовлетворяет аксиоме о накрывающей гомотопии, которая выражается диаграммой

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\bar{f}} & E \\ \sigma_0 \downarrow & \nearrow \bar{F} & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{F} & B \end{array}$$

Пусть теперь $A \subset X$, и пусть накрывающая гомотопия $\bar{F}$ уже построена на $A \times I \subset X \times I$. Можно ли ее распространить до накрывающей гомотопии на всем $X \times I$?

Вместе с данным отображением $\bar{f}: X \rightarrow E$ (рассматриваемым как отображение $X \times 0 \rightarrow E$) данная гомотопия $A \times I \rightarrow E$ составляет некоторое отображение $\bar{A} \rightarrow E$, где $\bar{A} = (X \times 0) \cup (A \times I)$, которое мы по-прежнему обозначим через $\bar{f}$ и которое замыкает коммутативную диаграмму

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} \bar{A} & \xrightarrow{\bar{f}} & E \\ \bar{\sigma}_0 \downarrow & \nearrow \bar{F} & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{F} & B \end{array} \quad \bar{A} = (X \times 0) \cup (A \times I),$$

где $\bar{\sigma}_0$ — вложение. Наш вопрос сводится теперь к следующему вопросу: существует ли непрерывное отображение $\bar{F}: X \times I \rightarrow E$, обозначенное на этой диаграмме пунктирной стрелкой?

Конечно, здесь предполагается, что отображение $\bar{f}: \bar{A} \rightarrow E$ непрерывно (достаточным условием чего является замкнутость подпространства A).

Удивительно, что требования, чтобы отображение $p: E \rightarrow B$ было расслоением, достаточно, чтобы при не слишком ограничительных условиях на пару (X, A) ответ на вопрос о существовании гомотопии $\bar{F}$ оказался утвердительным для любых $\bar{f}$ и F . Например, как мы покажем

в следующей лекции, для этого достаточно, чтобы пара (X, A) была замкнутой парой Борсука.

Сейчас же мы рассмотрим достаточные условия несколько иного плана, связывающие существование гомотопии $\bar{F}$ с возможностью распространения гомотопии $A \times I \rightarrow E$ хотя бы на некоторую окрестность подпространства A .

Подмножество U пространства X называется *функциональной окрестностью* (или *ободком*) подмножества A , если $A \subset U$ и существует такая непрерывная функция $\varphi: X \rightarrow I$, что $\varphi|_A = 0$, $\varphi|_{X \setminus U} = 1$. Каждая функциональная окрестность является (не обязательно открытой) окрестностью замыкания $\bar{A}$ множества A , а если пространство X нормально, то в силу леммы Урысона (см. Дополнение к лекции 0) любая окрестность U множества $\bar{A}$ является функциональной окрестностью множества A .

Подчеркнем, что мы не требуем того, чтобы функциональная окрестность была открытым множеством. Поэтому любое подмножество, содержащее функциональную окрестность U множества A , также будет функциональной окрестностью множества A .

Заметим, что для любой непрерывной функции $\varphi: X \rightarrow I$ и каждого $t_0 \in I$, $t_0 \neq 0$, множество $V = \varphi^{-1}([0, t_0]) \subset U$ является функциональной окрестностью множества $A = \varphi^{-1}(0)$. (Действительно, функция

$$\psi(x) = \min \left(1, \frac{\varphi(x)}{t_0} \right), \quad x \in X,$$

непрерывна и обладает тем свойством, что $\psi = 0$ на A и $\psi = 1$ вне V .) Поскольку функциональная окрестность V замкнута, отсюда, в частности, следует, что *любая функциональная окрестность U содержит замкнутую функциональную окрестность*.

Если для подпространства A из диаграммы (2) нам задана некоторая его функциональная окрестность U , то мы можем рассмотреть диаграмму

(3)

$$\begin{array}{ccc} \tilde{A} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}'} & E \\ \downarrow \tilde{\varphi}_0' & \searrow \tilde{F}' & \downarrow p \\ U \times I & \xrightarrow{F'} & B \end{array}$$

где $\tilde{A}' = (U \times 0) \cup (A \times I)$, а $\tilde{f}' = \tilde{f}|_{\tilde{A}'}$, $\tilde{\sigma}_0 = \tilde{\sigma}_0|_{\tilde{A}'}$ и $F' = F|_{U \times I}$. Отображение $\tilde{F}'$ из этой диаграммы является не чем иным, как накрывающей гомотопией, представляющей собой расширение на U данной гомотопии $A \times I \rightarrow E$.

Определение 1. Мы будем говорить, что отображение $p: E \rightarrow B$ удовлетворяет аксиоме о мягком распространении накрывающей гомотопии (короче, аксиоме МРНГ), если отображение $\tilde{F}$ существует для каждой диаграммы (2), для которой можно найти такую функциональную окрестность U подпространства A , что для соответствующей диаграммы (3) существует отображение $\tilde{F}'$.

Ясно, что функциональную окрестность U мы можем здесь всегда предполагать замкнутой.

Предложение 1. Отображение $p: E \rightarrow B$ тогда и только тогда удовлетворяет аксиоме о мягком распространении накрывающей гомотопии, когда оно удовлетворяет аксиоме о накрывающей гомотопии, т. е. является расслоением.

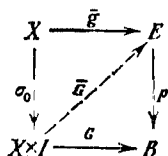
Доказательство. Поскольку при $A = \emptyset$ аксиома МРНГ переходит в аксиому НГ (достаточно положить $U = \emptyset$), в доказательстве нуждается лишь утверждение, что любое расслоение удовлетворяет аксиоме МРНГ. Иными словами, нам нужно показать, что для диаграммы (2) существует гомотопия $\tilde{F}$, если отображение $p: E \rightarrow B$ является расслоением и найдется такая замкнутая функциональная окрестность U подпространства A , что для соответствующей диаграммы (3) существует гомотопия $\tilde{F}'$.

Пусть $\varphi: X \rightarrow I$ — такая непрерывная функция, что $\varphi = 0$ на A и $\varphi = 1$ вне U , и пусть

$$G(x, t) = F(x, \min(1, 1 - \varphi(x) + t)), \quad (x, t) \in X \times I,$$

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } \varphi(x) = 1, \\ \tilde{F}'(x, 1 - \varphi(x)), & \text{если } x \in U \end{cases}$$

(отображение $\tilde{g}: X \rightarrow E$ определено корректно; оно непрерывно, поскольку множества U и $\varphi^{-1}(1)$ замкнуты). Автоматическая проверка показывает, что диаграмма



коммутативна. Поскольку отображение $p: E \rightarrow B$ является по условию расслоением, для этой диаграммы существует замыкающая гомотопия $\bar{G}: X \times I \rightarrow E$. Тогда формула

$$\bar{F}(x, t) = \begin{cases} \bar{F}'(x, t), & \text{если } x \in U \text{ и } 0 \leq t \leq 1 - \varphi(x), \\ \bar{G}(x, t - 1 + \varphi(x)), & \text{если } 1 - \varphi(x) \leq t \leq 1, \end{cases}$$

будет корректно определять гомотопию $\bar{F}: X \times I \rightarrow E$, замыкающую диаграмму (2). $\square$

Пусть $A \subset U \subset X$. Сечение $s: A \rightarrow E$ отображения $g: E \rightarrow X$ над A называется *продолжаемым на U* , если существует такое сечение $\bar{s}: U \rightarrow E$ отображения g над U , что $\bar{s}|_A = s$.

По аналогии с аксиомой МРНГ мы будем говорить, что отображение $g: E \rightarrow X$ удовлетворяет *аксиоме о мягком распространении сечений* (короче, *аксиоме МРС*), если для любого подпространства $A \subset X$ каждое сечение $s: A \rightarrow E$ отображения g над A , продолжаемое на некоторую функциональную окрестность U подпространства A , продолжаемо на все X .

Отображения, удовлетворяющие аксиоме МРС, мы для краткости будем называть *мягкими отображениями*.

Применив аксиому МРС к $A = \emptyset$, мы получим, в частности, что *любое мягкое отображение обладает сечением*.

В силу предложения 3 лекции 1 отсюда следует, что *если для отображения $p: E \rightarrow B$ естественное отображение*

$$g: E^I \rightarrow \text{Cosyl}(p), \quad v \mapsto (p \circ v, v(0))$$

мягко, то отображение $p: E \rightarrow B$ является расслоением.

Обратное утверждение также верно, т. е. для любого расслоения $p: E \rightarrow B$ отображение $q: E^I \rightarrow \text{Cosyl}(p)$ мягко. Действительно, для любого подмножества $A \subset \text{Cosyl}(p)$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\omega_0^*|_A} & E \\ \downarrow \varphi_0 & \nearrow \bar{F} & \downarrow p \\ A \times I & \xrightarrow{F} & B \end{array}$$

отображение F которой сопоставляет произвольной точке $((u, e), t)$ произведения $A \times I$, где $t \in I$, $u \in B^I$, $e \in E$ и

$u(0) = e$, точку $u(t) \in B$. При этом замыкающее отображение $\bar{F}: A \times I \rightarrow E$, рассматриваемое в силу экспоненциального закона, как отображение $A \rightarrow E'$, будет не чем иным, как сечением отображения q над A . Поэтому аксиома МРС для отображения q является следствием аксиомы МРНГ для отображения p .

Это объясняет наш интерес к мягким отображениям. Теория этих отображений была построена Дольдом. Мы изложим сейчас его основные результаты.

Лемма 1. Для любого мягкого отображения $q: E \rightarrow X$ и любого открытого множества $U \subset X$, дополнение к которому функционально выделяемо, отображение

$$q_U = q|_{q^{-1}(U)}: q^{-1}(U) \rightarrow U$$

также мягко.

Доказательство. Пусть $A \subset U$, и пусть s — такое сечение отображения q_U над A , что существуют такая непрерывная функция $\varphi: U \rightarrow I$, такое открытое множество $V \subset U$ и такое сечение $\bar{s}: V \rightarrow E$ отображения q_U над V , что $\varphi = 0$ на A , $\varphi = 1$ вне U и $\bar{s}|_A = s$. Нам нужно доказать, что существует такое сечение s^* отображения q_U на всем U , что $s^*|_A = s$. При этом без ограничения общности мы можем, очевидно, считать, что $A = \varphi^{-1}(0)$ и $V = U \setminus \varphi^{-1}(1)$.

По условию существует такая непрерывная функция $\omega: X \rightarrow I$, что $U = X \setminus \omega^{-1}(1)$. Для любого $n \geq 2$ мы положим

$$U_n = X \setminus \omega^{-1}\left(\left[\frac{n-1}{n}, 1\right]\right), \quad V_n = U \setminus \varphi^{-1}\left(\left[\frac{1}{n}, 1\right]\right)$$

и

$$W_n = U_{n+1} \cap V_n.$$

Ясно, что $U_n \subset U_{n+1}$, $U_n \subset U$ и $W_n \subset U$. Поэтому, в частности, для каждого $n \geq 2$ сечение $\bar{s}$ определено на W_n .

Оказывается, что при любом $n \geq 2$ существует такое сечение $s_n: X \rightarrow E$ отображения q , что:

а) если $x \in U_n$, то $s_{n+1}(x) = s_n(x)$;

б) если $x \in W_n$, то $s_n(x) = \bar{s}(x)$.

Действительно, непосредственная проверка показывает, что формула

$$\psi(x) = \begin{cases} \min(1, \max(0, 1 - 6(1 - \varphi(x))(1 - \omega(x)))) & \text{если } x \in U, \text{ т. е. } 0 \leq \omega(x) < 1, \\ 1, & \text{если } x \notin U, \text{ т. е. } \omega(x) = 1, \end{cases}$$

определяет такую непрерывную функцию $\psi: X \rightarrow I$, что $X \setminus \psi^{-1}(1) = U \setminus \varphi^{-1}(1) = V$ и $W_2 \subset \psi^{-1}(0)$. Следовательно, открытое (не только в U , но и в X) множество V является в X функциональной окрестностью множества W_2 . Поэтому ввиду мягкости отображения q существует его сечение s_2 , совпадающее на W_2 с сечением $\bar{s}$. Тем самым существование сечения s_n при $n=2$ полностью доказано (при $n=2$ условие а) бессодержательно).

Рассуждая по индукции, предположим теперь, что для некоторого $n \geq 2$ сечение s_n , удовлетворяющее условиям а) и б), уже построено. Легко видеть, что существуют такие числовые функции $\alpha_n, \beta_n: I \rightarrow I$, что

$$\frac{n-1}{n} \leq \alpha_n(t) < \beta_n(t) < 1 \quad \text{для всех } t \in I,$$

$$\beta_n(t) \leq \frac{n}{n+1}, \quad \text{если } t \geq \frac{1}{n},$$

$$\alpha_n(t) \geq \frac{n+1}{n+2}, \quad \text{если } t \leq \frac{1}{n+1}.$$

Например, можно положить

$$\alpha_n(t) = \begin{cases} \frac{n+1}{n+2} & \text{при } 0 \leq t \leq \frac{1}{n+1}, \\ \frac{n+3-2(n+1)t}{n+2} & \text{при } \frac{1}{n+1} \leq t \leq \frac{1}{n}, \\ \frac{n-1}{n} & \text{при } \frac{1}{n} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$$\beta_n(t) = \begin{cases} \frac{n+2}{n+3} & \text{при } 0 \leq t \leq \frac{1}{n+1}, \\ \frac{n^2+5n+2-2n(n+1)t}{(n+1)(n+3)} & \text{при } \frac{1}{n+1} \leq t \leq \frac{1}{n}, \\ \frac{n}{n+1} & \text{при } \frac{1}{n} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Пусть T_n — подмножество множества U , состоящее из точек $x \in X$, для которых $\omega(x) < \beta_n(\varphi(x))$. По условию, если $\varphi(x) \geq \frac{1}{n}$, то $\beta_n(\varphi(x)) \leq \frac{n}{n+1}$, и потому, если, кроме того, $x \in T_n$, то $\omega(x) < \frac{n}{n+1}$, т. е. $x \in U_{n+1}$. Это доказывает, что $T_n \subset U_{n+1} \cup V_n$. Поскольку же $U_{n+1} \cap V_n = W_n$ и $s_n = \bar{s}$ на W_n , отсюда следует, что формула

$$t_n(x) = \begin{cases} s_n(x), & \text{если } x \in U_{n+1}, \quad \text{т. е. } \omega(x) < \frac{n}{n+1}, \\ \bar{s}(x), & \text{если } x \in V_n, \quad \text{т. е. } \varphi(x) < \frac{1}{n}, \end{cases}$$

корректно определяет на T_n некоторое сечение $t_n: T_n \rightarrow E$ отображения q .

С другой стороны, формула

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \omega(x) \leq \alpha_n(\varphi(x)), \\ \frac{\alpha_n(\varphi(x)) - \omega(x)}{\alpha_n(\varphi(x)) - \beta_n(\varphi(x))}, & \text{если } \alpha_n(\varphi(x)) < \omega(x) < \beta_n(\varphi(x)), \\ 1, & \text{если } \beta_n(\varphi(x)) \leq \omega(x) \end{cases}$$

или $\omega(x) = 1$ (т. е. $x \notin U$),

определяет такую непрерывную функцию $\varphi_n: X \rightarrow I$, что $\varphi_n = 1$ вне T_n и $\varphi_n = 0$ на множестве X_n всех точек $x \in U$, для которых $\omega(x) < \alpha_n(\varphi(x))$. Следовательно, T_n является функциональной окрестностью множества X_n в X , а так как сечение t_n определено на T_n , то в силу мягкости отображения q существует его сечение $s_{n+1}: X \rightarrow E$, совпадающее на X_n с сечением t_n .

Если $x \in U_n$, т. е. $\omega(x) < \frac{n-1}{n}$, то $\omega(x) < \alpha_n(\varphi(x))$ и, значит, $x \in X_n$. Так как, кроме того, $x \in U_{n+1}$, то, следовательно, $s_{n+1}(x) = t_n(x) = s_n(x)$. Аналогично, если $x \in W_{n+1}$ и, значит, $\varphi(x) < \frac{1}{n+1}$, $\omega(x) < \frac{n+1}{n+2}$, то $\omega(x) < \alpha_n(\varphi(x))$, т. е. $x \in X_n$. Так как, кроме того, $x \in V_n$, то, следовательно, $s_{n+1}(x) = t_n(x) = \bar{s}(x)$.

Тем самым существование сечений s_n доказано для всех $n \geq 2$.

Ясно, что

$$\bigcup_{n=2}^{\infty} U_n = U.$$

Поэтому в силу условия а) формула

$$s^*(x) = s_n(x), \quad \text{если } x \in U_n,$$

корректно определяет на U некоторое сечение $s^*: U \rightarrow E$ отображения q (или, что равносильно, отображения q_U). Кроме того, так как $A \subset V_n$ для любого $n \geq 2$, то для каждой точки $x \in A$ существует такое n , что $x \in U_n$, и поэтому

$$s^*(x) = s_n(x) = \bar{s}(x) = s(x), \quad x \in A.$$

Следовательно, $s^*|_A = s$. $\square$

В силу леммы 1, если отображение $q: E \rightarrow X$ мягко, то для любого открытого покрытия $\{U_\alpha\}$ пространства X все отображения $q_\alpha = q_{U_\alpha}: q^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha$ также мягки.

Оказывается, что при весьма слабых общетопологических условиях на покрытие $\{U_\alpha\}$ верно и обратное, т. е. отображение q мягко, если все отображения q_α мягки.

Пусть X — произвольное топологическое пространство.

Семейство $\{\varphi_\alpha\}$ непрерывных функций $\varphi_\alpha: X \rightarrow I$ называется *локально конечным*, если для любой точки $x \in X$ существует ее окрестность $U \subset X$, в которой только конечное число функций φ_α отлично от нуля. Локально конечное семейство $\{\varphi_\alpha\}$ функций называется *разбиением единицы*, если для любой точки $x \in X$ имеет место равенство

$$\sum_{\alpha} \varphi_{\alpha}(x) = 1$$

(в силу условия локальной конечности эта сумма имеет смысл). Разбиение единицы $\{\varphi_\alpha\}$ называется *подчиненным* открытому покрытию $\{U_\alpha\}$ (с тем же множеством индексов), если $\varphi_\alpha = 0$ вне U_α для любого α . (Заметим, что в литературе встречается другое, более ограничительное определение, в котором требуется, чтобы в U_α содержалось не только множество, где $\varphi_\alpha \neq 0$, но и его замыкание.) Открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ называется *нумерируемым*, если существует подчиненное ему разбиение единицы $\{\varphi_\alpha\}$.

Замечание 1. Легко видеть, что хаусдорфово пространство тогда и только тогда паракомпактно, когда каждое его открытое покрытие нумерируемо. Поэтому условие нумерируемости покрытий является одним из вариантов условия паракомпактности.

Очевидно, что для любого непрерывного отображения $f: Y \rightarrow X$ и любого открытого покрытия $\{U_\alpha\}$ пространства X множества $f^{-1}(U_\alpha)$ составляют открытое покрытие пространства Y . При этом, если покрытие $\{U_\alpha\}$ было нумерируемым, то покрытие $\{f^{-1}(U_\alpha)\}$ также будет нумерируемым. Действительно, ясно, что для разбиения единицы $\{\varphi_\alpha\}$, подчиненного покрытию $\{U_\alpha\}$, функции $\varphi_\alpha \circ f: Y \rightarrow I$ будут составлять разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{f^{-1}(U_\alpha)\}$. $\square$

Поккрытие $\{f^{-1}(U_\alpha)\}$ мы будем называть *прообразом* покрытия $\{U_\alpha\}$ при отображении f .

Лемма 2. Если для отображения $q: E \rightarrow X$ существует такое нумерируемое покрытие $\{U_\alpha\}$ пространства X , что все отображения

$$q_\alpha: q^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha$$

мягки, то отображение $q: E \rightarrow X$ также мягко.

Доказательство. Пусть $A \subset X$ и $s_0: A \rightarrow E$ — такое сечение отображения q над A , что существует такая непрерывная функция $\varphi: X \rightarrow I$, такое открытое множество $V \supset A$ и такое сечение $\bar{s}_0: V \rightarrow E$ отображения q над V , что $\varphi = 0$ на A , $\varphi = 1$ вне V и $\bar{s}_0|_A = s_0$.

Рассмотрим произвольное разбиение единицы $\{\varphi_\alpha, \alpha \in A\}$, подчиненное покрытию $\{U_\alpha\}$. Предполагая, что символ 0 не содержится в множестве индексов A , мы положим

$$\psi_0 = 1 - \varphi, \quad \psi_\alpha = \varphi \varphi_\alpha, \quad \alpha \in A.$$

Ясно, что семейство $\{\psi_\beta\}$, где $\beta \in A \cup \{0\}$, является разбиением единицы. В силу локальной конечности семейства $\{\psi_\beta\}$ для любого подмножества $B \subset A \cup \{0\}$ определена непрерывная функция

$$\psi_B: x \mapsto \sum_{\beta \in B} \psi_\beta(x), \quad x \in X,$$

принимая значения в I . Пусть

$$V_B = X \setminus \psi_B^{-1}(0).$$

Ясно, что $A \subset V_B$, если $0 \in B$, и $A \cap V_B = \emptyset$, если $0 \notin B$. Кроме того, $A \subset V_{\{0\}} \subset V$.

Рассмотрим теперь множество S всех пар вида (B, s) , где B — произвольное подмножество из $A \cup \{0\}$, содержащее элемент 0, а s — такое сечение над V_B , что $s|_A = s_0$. Поскольку $(\{0\}, \bar{s}_0|_{V_{\{0\}}}) \in S$, множество S не пусто.

Введем в множество S частичное упорядочение, считая, что $(B, s) \leq (B', s')$, если $B \subset B'$ (и, значит, $V_B \subset V_{B'}$) и $s'(x) = s(x)$, если $\varphi_{B'}(x) = \varphi_B(x)$ (т. е. $\psi_\beta(x) = 0$ для любого $\beta \in B' \setminus B$).

Пусть K — произвольная цепь в S . Положив

$$\Gamma = \bigcup_{(B, s) \in K} B,$$

мы для любого открытого множества $W \subset V_\Gamma$ обозначим через Γ_W подмножество множества Γ , состоящее из всех индексов $\beta \in \Gamma$, для которых функция ψ_β отлична от нуля хотя бы в одной точке из W . Пусть $\{W\}$ — семейство всех открытых множеств $W \subset V_\Gamma$, для которых множество Γ_W конечно. В силу локальной конечности разбиения единицы $\{\psi_\beta\}$ семейство $\{W\}$ покрывает множество V_Γ .

Для каждого множества $W \in \{W\}$ мы рассмотрим подмножество K_W цепи K , состоящее из таких пар (B, s) , что

$\Gamma_W \subset B$. В силу конечности множества Γ_W для любой пары $(B, s) \in K$ существует такая пара $(B', s') \in K_W$, что $(B, s) \leq (B', s')$.

Если $(B, s) \in K_W$, то $W \subset V_B$, а если $(B, s), (B', s') \in K_W$, то $s = s'$ на W . Поэтому формула

$$t(x) = s(x), \quad x \in V_\Gamma,$$

где s — произвольное сечение отображения q , для которого существует такое множество индексов $B \subset \Gamma$ и такое открытое множество $W \in \{W\}$, содержащее точку x , что $(B, s) \in K_W$, корректно определяет на V_Γ сечение $t: V_\Gamma \rightarrow E$ отображения q , обладающее, очевидно, тем свойством, что $(\Gamma, t) \in S$.

Если $(B, s) \in K$, то по построению $B \subset \Gamma$. Пусть x — такая точка из V_B , что $\psi_\gamma(x) = 0$ для всех $\gamma \in \Gamma \setminus B$. Выбрав произвольную окрестность W точки x , принадлежащую семейству $\{W\}$, рассмотрим в K_W произвольный элемент $(B', s') \geq (B, s)$. Так как $\psi_\gamma(x) = 0$ при $\gamma \in B' \setminus B$, то $s(x) = s'(x)$. Но по построению $s'(x) = t(x)$. Следовательно, $s(x) = t(x)$.

Этим доказано, что $(B, s) \leq (\Gamma, t)$ для любого элемента $(B, s) \in K$, т. е. что элемент (Γ, t) является верхней гранью цепи K .

Таким образом, в частично упорядоченном множестве S любая цепь обладает верхней гранью. Поэтому в силу леммы Цорна множество S обладает максимальным элементом (B, s) .

Пусть $B \neq A \cup \{0\}$, и пусть $\alpha \in A \setminus B$. Формула

$$\psi_\alpha^!(x) = \max \left(0, \frac{\psi_\alpha(x) - \psi_B(x)}{\psi_\alpha(x)} \right), \quad \psi_\alpha(x) \neq 0,$$

определяет на множестве $V_\alpha = X \setminus \psi_\alpha^{-1}(0)$ непрерывную функцию $\psi: V_\alpha \rightarrow I$, обладающую, очевидно, тем свойством, что $V_\alpha \setminus \psi^{-1}(1) \subset V_B$. В частности, мы видим, что на множестве $V_\alpha \setminus \psi^{-1}(1)$ определено сечение s . Поскольку же это множество является, по определению, функциональной окрестностью множества $\psi^{-1}(0)$, мы получаем, таким образом, что сечение $s|_{\psi^{-1}(0)}$ отображения $q_{V_\alpha}: q^{-1}(V_\alpha) \rightarrow V_\alpha \setminus \psi^{-1}(1)$ удовлетворяет условиям аксиомы МРС. Но ясно, что $V_\alpha \subset U_\alpha$, и потому $q_{V_\alpha} = q_\alpha|_{q^{-1}(V_\alpha)}$. Так как отображение q_α по условию мягко, то, следовательно, согласно лемме 1, отображение q_{V_α} также мягко. Поэтому для сечения $s|_{\psi^{-1}(0)}$ существует такое сечение $s': V_\alpha \rightarrow E$ отображения q_{V_α} над V_α , что $s' = s$ на $\psi^{-1}(0)$.

Пусть теперь $\Gamma = B \cup \{\alpha\}$. Положив для любой точки $x \in V_\Gamma = V_B \cup V_\alpha$

$$t(x) = \begin{cases} s(x), & \text{если } \psi_\alpha(x) \leq \psi_B(x), \\ s''(x), & \text{если } \psi_\alpha(x) \geq \psi_B(x), \end{cases}$$

мы, очевидно, получим такое сечение $t: V_\Gamma \rightarrow E$ отображения q над V_Γ , что $(\Gamma, t) \in S$ и $(B, s) < (\Gamma, t)$. Поскольку это противоречит максимальности элемента (B, s) , тем самым доказано, что $B = A \cup \{0\}$ и, следовательно, что $V_B = X$.

Таким образом, сечение s определено на всем X и совпадает на A с сечением s_0 . Следовательно, отображение q мягко. $\square$

Чтобы применить полученные результаты к расслоениям, нам понадобится следующая техническая лемма, полезная и в других вопросах.

Лемма 3. Для каждого нумерируемого накрытия $\{U_\alpha, \alpha \in A\}$ пространства $X \times I$ можно найти нумерируемое покрытие $\{V_\beta, \beta \in B\}$ пространства X , обладающее тем свойством, что для любого $\beta \in B$ существует такое положительное число $\varepsilon_\beta > 0$, что для любого отрезка $J \subset I$ длины $\leq \varepsilon_\beta$ найдется такое $\alpha \in A$, что $V_\beta \times J \subset U_\alpha$.

Докажем предварительно следующую классическую лемму.

Лемма Лебега. Для произвольного накрытия $\{U_\alpha\}$ компактного метрического пространства X существует такое положительное число $\varepsilon > 0$, что любое подмножество $K \subset X$ диаметра, меньшего чем ε , содержится в некотором элементе покрытия $\{U_\alpha\}$.

Доказательство. Если такого числа ε не существует, то для любого $n > 0$ в X найдется подмножество K_n диаметра, меньшего чем $1/n$, не содержащееся ни в одном элементе покрытия $\{U_\alpha\}$. Пусть $x_n \in K_n$. Поскольку пространство X по условию компактно, существует точка $x_0 \in X$, любая окрестность которой содержит бесконечно много точек x_n . Пусть $x_0 \in U_{\alpha_0}$, и пусть d — расстояние от x_0 до $X \setminus U_{\alpha_0}$. Если $n > 2/d$ и $\rho(x_0, x_n) < d/2$, то для любой точки $x \in K_n$ имеет место неравенство

$$\rho(x_0, x) \leq \rho(x_0, x_n) + \rho(x_n, x) \leq \frac{d}{2} + \frac{1}{n} < d,$$

показывающее, что, вопреки предположению, $K_n \subset U_{\alpha_0}$. Полученное противоречие доказывает лемму. $\square$

Верхняя грань чисел ε называется *числом Лебега* покрытия $\{U_\alpha\}$.

Теперь мы уже можем доказать лемму 3.

Доказательство леммы 3. По условию существует разбиение единицы $\{\varphi_\alpha\}$, подчиненное покрытию $\{U_\alpha\}$, т. е. такое, что $X \setminus \varphi_\alpha^{-1}(0) \subset U_\alpha$ для любого $\alpha \in A$. Чтобы не вводить новых букв, мы предположим, что $X \setminus \varphi_\alpha^{-1}(0) = U_\alpha$. Ясно, что это предположение общности не ограничивает.

Пусть B — множество всех конечных последовательностей элементов множества A . Таким образом, каждый элемент $\beta \in B$ имеет вид $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, где $r \geq 0$. Длину r последовательности β мы обозначим символом $|\beta|$.

Каждому элементу $\beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in B$ мы сопоставим непрерывную функцию $\psi_\beta: X \rightarrow I$, определенную формулой

$$\psi_\beta(x) = \prod_{i=1}^r \min_{t_i \in I_i} \varphi_{\alpha_i}(x, t_i), \text{ где } I_i = \left[\frac{i-1}{r+1}, \frac{i+1}{r+1} \right].$$

Пусть $V_\beta = X \setminus \psi_\beta^{-1}(0)$. Ясно, что $x \in V_\beta$ тогда и только тогда, когда $\varphi_{\alpha_i} \neq 0$ на $\{x\} \times I_i$ для каждого $i = 1, \dots, r$.

В частности, мы видим, что $V_\beta \times I_i \subset U_{\alpha_i}$, $i = 1, \dots, r$.

Поскольку любой отрезок $J \subset I$ длины меньшей чем $\frac{1}{r+1}$ содержится в одном из отрезков I_i , $i = 1, \dots, r$,

отсюда следует, что при $\varepsilon_\beta = \frac{1}{|\beta|+1}$ семейство $\{V_\beta\}$ обладает свойством, утверждаемым леммой 3. Поэтому для доказательства леммы 3 нам нужно только показать, что семейство $\{V_\beta\}$ является нумерируемым покрытием пространства X .

По определению топологии прямого произведения каждая точка $(x, t) \in X \times I$ обладает «прямоугольной» окрестностью $U_{x,t} \times V_{x,t}$, содержащейся в некотором элементе покрытия $\{U_\alpha\}$. Здесь $U_{x,t}$ — некоторая окрестность точки $x \in X$ в X , а $V_{x,t}$ — некоторая окрестность точки $t \in I$ в I . Для любой точки $x \in X$ все окрестности вида $V_{x,t}$ составляют открытое покрытие отрезка I . Пусть r — такое целое

число, что длина $\frac{2}{r+1}$ соответствующих отрезков I_i , $i = 1, \dots, r$, не превосходит числа Лебега этого покрытия. Тогда каждое множество вида $\{x\} \times I_i$, $i = 1, \dots, r$, будет содержаться в некоторой окрестности $U_{x,t} \times V_{x,t}$, а потому и в некотором элементе U_{α_i} покрытия $\{U_\alpha\}$. Следовательно,

$\varphi_{\alpha_i^{(0)}} \neq 0$ на $\{x\} \times I_i$, и, значит, $x \in V_{\beta^{(0)}}$, где $\beta^{(0)} = (\alpha_1^{(0)}, \dots, \alpha_r^{(0)})$. Этим доказано, что семейство $\{V_\beta, \beta \in B\}$ является покрытием пространства X .

Чтобы не вводить новых обозначений, мы можем считать, что окрестности $U_{x,t} \times V_{x,t}$ обладают также и тем свойством, что каждая из них пересекается лишь с конечным числом элементов покрытия $\{U_\alpha\}$. Тогда, выбрав для каждой точки $x \in X$ из покрытия $\{V_{x,t}\}$ отрезка I (являющегося компактным пространством) конечное подпокрытие $\{V_{x,t_1}, \dots, V_{x,t_n}\}$ и положив

$$U = U_{x,t_1} \cap \dots \cap U_{x,t_n},$$

мы получим такую окрестность U точки x в пространстве X , что $U_\alpha \cap (U \times I) \neq \emptyset$ только для конечного числа индексов $\alpha \in A$. Следовательно, в последовательностях $\beta \in B$, для которых $U \cap V_\beta \neq \emptyset$, может участвовать лишь конечное число различных индексов $\alpha \in A$ и, значит, для любого $r > 0$ таких последовательностей с $|\beta| < r$ будет лишь конечное число. Поэтому формула

$$\lambda_r(x) = \sum_{|\beta| < r} \psi_\beta(x), \quad x \in X,$$

будет определять на X некоторую непрерывную неотрицательную функцию $\lambda_r: X \rightarrow \mathbb{R}$ (при $r=1$ мы, по определению, считаем, $\lambda_1=0$).

Пусть

$$\bar{\psi}_\beta(x) = \max(0, \psi_\beta(x) - r\lambda_r(x)), \quad \text{где } r = |\beta|, \beta \in B.$$

Ясно, что $\bar{\psi}_\beta(x) = 0$, если $\psi_\beta(x) = 0$. Поэтому последовательностей $\beta \in B$ с $|\beta| < r$, для которых $\bar{\psi}_\beta \neq 0$ на U , также существует лишь конечное число.

Выбрав теперь для точки $x \in X$ последовательность $\beta_0 \in B$ с $x \in V_{\beta_0}$, длина $|\beta_0| = r_0$ которой имеет наименьшее возможное значение, рассмотрим произвольное число $r > r_0$, для которого $\psi_{\beta_0}(x) > \frac{1}{r}$. Тогда $r\lambda_r(x) > 1$, и поэтому $r\lambda_r > 1$ в некоторой окрестности точки x (которую мы можем считать совпадающей с окрестностью U , построенной выше). Следовательно, для любого β с $|\beta| = r$ в окрестности U будет иметь место равенство $\bar{\psi}_\beta = 0$. Поэтому $\bar{\psi}_\beta \neq 0$ на U только для конечного числа последовательностей $\beta \in B$. Тем самым доказано, что семейство

$\{\bar{\psi}_\beta\}$ локально конечно, и потому формула

$$\bar{\psi}(x) = \sum_{\beta \in B} \bar{\psi}_\beta(x), \quad x \in X,$$

корректно определяет на X некоторую непрерывную функцию $\bar{\psi}: X \rightarrow \mathbb{R}$.

Так как по условию длина $r_0 = |\beta_0|$ последовательности β_0 , для которой $x \in V_{\beta_0}$, т. е. $\psi_{\beta_0}(x) \neq 0$, имеет наименьшее возможное значение, то $\psi_\beta(x) = 0$ при $|\beta| < r_0$, и, значит, $\lambda_{r_0}(x) = 0$. Поэтому $\bar{\psi}_{\beta_0}(x) = \psi_{\beta_0}(x) \neq 0$ и, следовательно, $\bar{\psi}(x) \neq 0$.

Этим доказано, что функции $\bar{\psi}_\beta/\bar{\psi}$ определены всюду на X . Поскольку они, очевидно, составляют разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{V_\beta\}$, лемма 3 тем самым полностью доказана. $\square$

Следствие 1. Для каждого нумерируемого покрытия $\{U_\alpha, \alpha \in A\}$ пространства B можно найти нумерируемое покрытие $\{V_\beta, \beta \in B\}$ пространства B' , обладающее тем свойством, что для любого $\beta \in B$ существует такое положительное число $\varepsilon_\beta > 0$, что для произвольного отрезка $J \subset I$ длины $\leq \varepsilon_\beta$ найдется такое $\alpha = \alpha(\beta, J) \in A$, что $u(J) \subset U_\alpha$ для каждого пути $u \in V_\beta$.

Доказательство. Достаточно применить лемму 3 к нумерируемому покрытию пространства $B' \times I$, являющемуся прообразом покрытия $\{U_\alpha\}$ при отображении вычисления

$$\omega: B' \times I \rightarrow X, \quad (u, t) \mapsto u(t). \quad \square$$

Используя введенные в Дополнении к лекции 0 обозначения для базисных множеств компактно открытой топологии, мы можем утверждаемое в этом следствии свойство множеств V_β записать в виде формулы

$$V_\beta \subset \bigcap_j \mathscr{W}(J, U_{\alpha(\beta, J)}),$$

где пересечение берется по всем отрезкам $J \subset I$ длины $\leq \varepsilon_\beta$.

Пусть теперь n_β — такое целое число, что $n_\beta \varepsilon_\beta > 1$, и пусть $I_{\beta, i}$ — отрезок $\left[\frac{i-1}{n_\beta}, \frac{i}{n_\beta} \right]$, где $i = 1, 2, \dots, n_\beta$. Тогда $V_\beta \subset W_\beta$, где

$$W_\beta = \bigcap_{i=1}^{n_\beta} \mathscr{W}(I_{\beta, i}, U_{\alpha_i(\beta)}), \quad \alpha_i(\beta) = \alpha(\beta, I_{\beta, i}).$$

Множества W_β открыты в пространстве B' и составляют нумерируемое покрытие этого пространства (разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{V_\beta\}$, будет, очевидно, подчинено и покрытию $\{W_\beta\}$). Обозначив их снова через V_β , мы получим

Следствие 2. Для каждого нумерируемого покрытия $\{U_\alpha, \alpha \in A\}$ пространства B можно найти нумерируемое покрытие $\{V_\beta, \beta \in B\}$ пространства B' , обладающее тем свойством, что для любого индекса β из B существуют такие индексы $\alpha_1 = \alpha_1(\beta), \dots, \alpha_{n_\beta} = \alpha_{n_\beta}(\beta)$ из A , что $u \in V_\beta$ тогда и только тогда, когда $u(I_{\beta, i}) \subset U_{\alpha_i(\beta)}$ для каждого $i = 1, \dots, n_\beta$. $\square$

Здесь удобно ввести в рассмотрение части путей $u \in V_\beta$ на отрезках $I_{\beta, i}$, т. е. пути $u_i, i = 1, \dots, n_\beta$, определяемые (с учетом необходимого преобразования параметра) формулой

$$u_i(t) = u\left(\frac{t+i-1}{n}\right), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Ввиду включения $u(I_{\beta, i}) \subset U_{\alpha_i(\beta)}$ мы можем путь u_i рассматривать как путь в $U_{\alpha_i(\beta)}$. Следовательно, сопоставив пути $u \in V_\beta$ последовательность $(u_1, \dots, u_{n_\beta})$ путей u_i , мы получим (как легко видеть гомеоморфное) отображение множества V_β на подмножество произведения $U_{\alpha_1(\beta)}^I \times \dots \times U_{\alpha_{n_\beta}(\beta)}^I$, состоящее из таких последовательностей $(u_1, \dots, u_{n_\beta})$, $u_i \in U_{\alpha_i(\beta)}^I$, что $u_i(0) = u_{i-1}(1)$ для любого $i > 1$. В дальнейшем, чтобы не вводить лишних обозначений, мы будем отождествлять пути $u \in V_\beta$ с соответствующими последовательностями $(u_1, \dots, u_{n_\beta})$.

Рассмотрим теперь произвольное отображение $p: E \rightarrow B$, его коцилиндр $\text{Cosyl}(p) \subset E \times B'$ и отображение $q: E' \rightarrow \text{Cosyl}(p)$, $u \mapsto (u(0), p \circ u)$. По-прежнему предполагая заданным нумерируемое покрытие $\{U_\alpha, \alpha \in A\}$ пространства B , обозначим через W_β прообразы при естественной проекции $p_{0*}: \text{Cosyl}'(p) \rightarrow B'$, $(u, e) \mapsto u$, предусмотренных следствием 2 леммы 3 множеств V_β . Согласно описанным выше отождествлениям точками каждого множества W_β мы можем считать наборы вида $(e, u_1, \dots, u_{n_\beta})$, где $u_i, i = 1, \dots, n_\beta$, — такие пути в $U_{\alpha_i(\beta)}$, что $u_i(0) = u_{i-1}(1)$ при $i > 1$, а e — такая точка из E (а на самом деле — из

$p^{-1}(U_{\alpha_i(\beta)})$, что $u_i(0) = p(e)$. Являясь прообразом нумерируемого покрытия при непрерывном отображении, семейство $\{W_\beta, \beta \in B\}$ представляет собой нумерируемое покрытие пространства $\text{Cocyl}(p)$.

Для каждого $\beta \in B$ мы введем в рассмотрение отображение

$$q_\beta = q|_{q^{-1}(W_\beta)}: q^{-1}(W_\beta) \rightarrow W_\beta.$$

Здесь пути $v \in q^{-1}(W_\beta) \subset E'$ также удобно разбить на части, т. е. каждый такой путь отождествить с последовательностью $(v_1, \dots, v_{n_\beta})$ путей

$$v_i(t) = v\left(\frac{t+i-1}{n_\beta}\right), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Поскольку, как легко видеть, $q^{-1}(W_\beta) = p_*^{-1}(V_\beta)$, где $p_*: E' \rightarrow B'$ — отображение $u \mapsto p \circ u$, последовательность $(v_1, \dots, v_{n_\beta})$ путей в E тогда и только тогда отвечает пути $v \in q^{-1}(W_\beta)$, когда $v_i(0) = v_{i-1}(1)$ при $i > 1$ и каждый путь v_i , $i = 1, \dots, n_\beta$, является путем в $p^{-1}(U_{\alpha_i(\beta)})$. Отображение q_β будет при этом определяться формулой $q_\beta(v_1, \dots, v_{n_\beta}) = (v_1(0), p \circ v_1, \dots, p \circ v_{n_\beta})$.

Соответственно этому каждое сечение $s: W_\beta \rightarrow q^{-1}(W_\beta)$ отображения q_β мы можем отождествить с последовательностью $(s_1, \dots, s_{n_\beta})$ непрерывных отображений $s_i: W_\beta \rightarrow E'$, обладающих следующими свойствами:

а) для любой точки $(e, u) \in W_\beta$ путь $v_i = s_i(e, u)$ является путем в $p^{-1}(U_{\alpha_i(\beta)})$;

б) если $u = (u_1, \dots, u_{n_\beta})$, то $p \circ v_i = u_i$ для каждого $i = 1, \dots, n_\beta$;

в) $v_1(0) = e$ и $v_i(0) = v_{i-1}(1)$ при $i > 1$.

Впрочем, отображения s_i удобнее интерпретировать как гомотопии $W_\beta \times I \rightarrow E$, или, точнее, — в силу условия а) — как гомотопии $W_\beta \times I \rightarrow p^{-1}(U_{\alpha_i})$, где $\alpha_i = \alpha_i(\beta)$. При этом условия б) и в) будут равносильны коммутативности диаграмм

$$(4) \quad \begin{array}{ccc} W_\beta & \xrightarrow{s_{i-1} \circ \sigma_i} & p^{-1}(U_{\alpha_i}) \\ \sigma_i \downarrow & \searrow s_i & \downarrow p_i \\ W_\beta \times I & \xrightarrow{\varphi_i} & U_{\alpha_i} \end{array} \quad i = 1, \dots, n_\beta,$$

где гомотопия $\varphi_i: W_\beta \times I \rightarrow U_{\alpha_i}$ определена формулой

$$\varphi_i((e, u), t) = u_i(t), \text{ если } u = (u_1, \dots, u_{n_\beta}),$$

а p_i представляет собой отображение $p_{\alpha_i}: p^{-1}(U_{\alpha_i}) \rightarrow U_{\alpha_i}$, индуцированное отображением p . (Под отображением $s_{i-1} \circ \sigma_1$ при $i=1$ здесь, естественно, подразумевается проекция $\omega_0^*: (e, u) \mapsto e$.)

Лемма 4. Если все отображения p_i , $i=1, \dots, n_\beta$, удовлетворяют аксиоме МРНГ, то отображение q_β мягко.

Доказательство. Пусть $A \subset U \subset W_\beta$, причем множество U является функциональной окрестностью множества A (в W_β), и пусть $\bar{s}: u \rightarrow q^{-1}(W_\beta)$ — произвольное сечение отображения q_β над U , т. е. последовательность гомотопий $\bar{s}_i: U \times I \rightarrow p^{-1}(U_{\alpha_i})$, для которых коммутативны диаграммы

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\bar{s}_{i-1} \circ \sigma_1} & p^{-1}(U_{\alpha_i}) \\ \sigma_0 \downarrow & \searrow \bar{s}_i & \downarrow p_i \\ U \times I & \xrightarrow{\varphi_i} & U_{\alpha_i} \end{array}$$

Мы должны доказать, что существует сечение s отображения q_β над всем множеством W_β , совпадающее на A с сечением $\bar{s}$, т. е. что существуют гомотопии $s_i: W_\beta \times I \rightarrow p^{-1}(U_{\alpha_i})$, $i=1, \dots, n_\beta$, для которых диаграммы (4) коммутативны и которые на $A \times I$ совпадают с гомотопиями $\bar{s}_i$.

Пусть φ — такая непрерывная функция, что $\varphi=0$ на A и $\varphi=1$ вне U , и пусть

$$U_i = \varphi^{-1}\left(\left[0, 1 - \frac{i}{n_\beta}\right]\right), \quad i=1, \dots, n_\beta.$$

Тогда

$$A \subset U_{n_\beta} \subset \dots \subset U_{i+1} \subset U_i \subset \dots \subset U_1 \subset U,$$

причем каждое множество U_i , $i < n_\beta$, будет функциональной окрестностью множества U_{i+1} , а множество U — функциональной окрестностью множества U_1 .

Мы будем строить гомотопии s_i индукцией по i , для проведения которой дополнительно потребуем, чтобы для

каждого $i = 1, \dots, n_\beta$ имело место равенство

$$s_i|_{U_i \times I} = \bar{s}_i|_{U_i \times I};$$

иными словами, каждую диаграмму (4) мы заменим диаграммой

$$(5) \quad \begin{array}{ccc} \tilde{U}_i & \xrightarrow{\varphi_i} & p^{-1}(U_{\alpha_i}) \\ \downarrow \tilde{\sigma}_i & \nearrow s_i & \downarrow p_i \\ W_\beta \times I & \xrightarrow{\varphi_i} & U_{\alpha_i} \end{array} \quad i = 1, \dots, n_\beta,$$

где $\tilde{U}_i = (W_\beta \times 0) \cup (U_i \times I)$, а φ_i — отображение, определенное формулой

$$\varphi_i((e, u), t) = \begin{cases} s_{i-1}((e, u), t), & \text{если } t = 0, \\ \bar{s}_i((e, u), t), & \text{если } (e, u) \in U_i \end{cases}$$

(при $i = 1$ вместо $s_{i-1}((e, u), t)$ надо писать θ).

Но диаграмма (5) имеет вид диаграммы (2) с $X = W_\beta$, $A = U_i$, $\bar{f} = \psi_i$, $F = \varphi_i$ и $p = p_i$. Так как в соответствующей диаграмме (3) (с $U = U_{i-1}$ при $i > 1$) замыкающее отображение $\bar{F}'$ очевидным образом существует (им будет ограничение на $U_{i-1} \times I$ гомотопии $\bar{s}_i$), то в силу аксиомы МРНГ гомотопия s_i в диаграмме (5) также существует. Тем самым гомотопии s_i шаг за шагом построены для всех $i = 1, \dots, n_\beta$. $\square$

Теперь мы можем доказать основную теорему Дольда.

Теорема 1. Если для отображения $p: E \rightarrow B$ существует такое нумерируемое покрытие $\{U_\alpha\}$ пространства B , что каждое отображение

$$p_\alpha = p|_{p^{-1}(U_\alpha)}: p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha$$

является расслоением, то отображение $p: E \rightarrow B$ также будет расслоением.

Доказательство. Согласно предложению 2 расслоения p_α удовлетворяют аксиоме МРНГ, и потому, согласно лемме 4, все отображения $q_\beta: q^{-1}(W_\beta) \rightarrow W_\beta$ мягки, где, напомним, W_β — подмножество пространства $\text{Cosyl}(p)$, являющееся прообразом при проекции $(u, e) \mapsto u$ подмножества $V_\beta \subset B'$ из следствия 2 леммы 3. Но, как уже было замечено выше, семейство $\{W_\beta\}$ является нуме-

рируемым покрытием пространства $\text{Cosyl}(p)$. Поэтому, согласно лемме 2, отображение $q: E' \rightarrow \text{Cosyl}(p)$ мягко, и, значит, отображение p является расслоением. $\square$

Важное применение теорема Дольда находит к так называемым локально тривиальным расслоениям.

Если в диаграмме

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\bar{f}} & E' \\ \downarrow \sigma_0 & \searrow \bar{f} & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{p} & B \end{array}$$

пространство E является произведением $B \times Y$ пространства B на некоторое пространство Y (и, значит, отображение $\bar{f}: X \rightarrow E$ задается формулой $\bar{f}(x) = (f_1(x), f_2(x))$, где $f_1: X \rightarrow B$, $f_2: X \rightarrow Y$), а $p: E \rightarrow B$ представляет собой проекцию $(b, y) \mapsto b$, $b \in B$, $y \in Y$, то гомотопия $\bar{F}$ очевидным образом существует (и задается формулой $\bar{F}(x, t) = (F(x, t), f_2(x))$). Следовательно, для любых пространств B и Y проекция $B \times Y \rightarrow B$ является расслоением.

Два отображения $p: E \rightarrow B$ и $p': E' \rightarrow B$ мы назовем *изоморфными*, если существует такой гомеоморфизм $E \xrightarrow{\approx} E'$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\approx} & E' \\ \downarrow p & & \downarrow p' \\ & B & \end{array}$$

коммутативна. Ясно, что отображение, изоморфное расслоению, само будет расслоением. Поэтому, в частности, расслоением будет каждое отображение $p: E \rightarrow B$ изоморфное проекции $B \times Y \rightarrow B$ прямого произведения. Такие расслоения называются *тривиальными расслоениями*.

Соответственно этому отображение $p: E \rightarrow B$ называется *локально тривиальным расслоением*, если существует такое открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ пространства B , что все отображения $p_\alpha: p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha$ являются тривиальными расслоениями.

Эта терминология находит свое оправдание в том, что, как непосредственно вытекает из теоремы 1, *если пространство B паракомпактно, то каждое локально тривиальное расслоение на самом деле является расслоением.*

Замечание 2. Дольд предпочитает вариант определения, в котором покрытие $\{U_\alpha\}$ предполагается нумеруемым. Тогда оговорка о паракомпактности пространства B становится ненужной.

Замечание 3. Следует иметь в виду, что в математике термин «расслоение» используется во многих различных смыслах, иногда почти не коррелирующих друг с другом. Поэтому, собственно говоря, всегда необходимо уточнение, какой смысл этого термина имеется в виду. В этих лекциях под «расслоением», если явно не оговорено противное, всегда будет пониматься расслоение в смысле определения 3 лекции 1 (т. е. в смысле Гуревича).

Замечание 4. Одним из наиболее важных классов расслоений являются так называемые *расслоения в смысле Стиррода*, называемые также *расслоениями со структурной группой* или *косыми произведениями* (по-английски *fibre bundle*). К их числу принадлежат известные из дифференциальной геометрии векторные расслоения и многочисленные расслоения, строящиеся с их помощью (скажем, расслоения на сферы). Все расслоения в смысле Стиррода, по определению, локально тривиальны и потому (если их база B паракомпактна) являются расслоениями в смысле Гуревича.

Все это дает нам неисчерпаемый запас примеров конкретных расслоений.

Гомотопические эквивалентности.— Редукция произвольного отображения к корасслоению.— Деформационные ретракты.— Стягиваемые пространства и конусы.— Относительные гомотопии и строгие деформационные ретракты.— Гомотопическая инвариантность операции приклеивания.— Окрестностные деформационные ретракты и пары Борсука.— Строгие деформационные ретракты и гомотопические эквивалентности.— Еще две аксиомы, характеризующие расслоения (аксиома о распространении накрывающего отображения и аксиома о распространении накрывающей гомотопии).— Прообраз пары Борсука.— Редукция произвольного отображения к расслоению.

Определение 1. Непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *гомотопической эквивалентностью*, если его гомотопический класс $[f]$ является изоморфизмом гомотопической категории $[TOP]$. Это равносильно тому, что существует такое непрерывное отображение $g: Y \rightarrow X$ (называемое *обратной гомотопической эквивалентностью*), что

$$(1) \quad f \circ g \sim id_Y \quad \text{и} \quad g \circ f \sim id_X.$$

Поскольку $[g]$ есть не что иное, как $[f]^{-1}$, и поскольку в любой категории морфизм, обратный изоморфизму, определен единственным образом, *обратная гомотопическая эквивалентность с точностью до гомотопии определена единственным образом.*

Пространства, изоморфные в категории $[TOP]$, т. е. связанные гомотопической эквивалентностью, называются *гомотопически эквивалентными*. О гомотопически эквивалентных пространствах говорят также, что они имеют один и тот же *гомотопический тип*.

Аналогично, два непрерывных отображения $f: X \rightarrow Y$ и $f': X' \rightarrow Y'$ называются *гомотопически эквивалентными*, если они изоморфны в категории морфизмов категории $[TOP]$, т. е. если существуют такие гомотопические эквивалентности $\varphi: X \rightarrow X'$ и $\psi: Y \rightarrow Y'$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array}$$

гомотопически коммутативна (коммутативна в категории [TOP]), т. е. обладает тем свойством, что $\psi \circ f \sim f' \circ \varphi$.

Замечательный факт, оправдывающий с новой и неожиданной стороны наш интерес к расслоениям и корасслоениям, указывается в следующей теореме.

Теорема 1. Любое непрерывное отображение гомотопически эквивалентно как расслоению, так и корасслоению.

Таким образом, в теории гомотопий мы без потери общности можем все отображения считать при желании расслоениями или корасслоениями!

Доказательство теоремы 1 основывается на введенных в лекции 1 понятиях цилиндра и коцилиндра [отображения]. Впрочем, по чисто техническим причинам (а если правду сказать, то в основном по традиции) здесь удобны «обращенные» цилиндры и коцилиндры, получающиеся при замене t на $1-t$. Кроме того, нам будет здесь удобно обозначать отображение, для которого строится цилиндр и коцилиндр, символом $f: X \rightarrow Y$, что освободит буквы i и p для других целей.

Таким образом, *обращенным цилиндром* отображения $f: X \rightarrow Y$ называется амальгама $(X \times I) \cup_f Y$ диаграммы $X \times I \xleftarrow{\sigma_1} X \xrightarrow{f} Y$, получающаяся приклеиванием прямого произведения $X \times I$ к пространству Y посредством отображения $(x, 1) \mapsto f(x)$, т. е. факторпространство дизъюнктного объединения $(X \times I) \sqcup Y$ по минимальному отношению эквивалентности, в котором $(x, 1) \sim f(x)$ для любой точки $x \in X$. Мы будем обозначать обращенный цилиндр тем же символом $\text{Cyl}(f)$, что и прямой цилиндр из лекции 1.

Для обращенного цилиндра коуниверсальный квадрат (6) лекции 1 имеет (после транспонирования) вид

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \sigma_1 \downarrow & f_{\#} & \downarrow (\sigma_1)_f \\ X \times I & \longrightarrow & \text{Cyl}(f) \end{array}$$

Для любой точки $(x, t) \in X \times I$ ее образ при отображении $f_{\#}$ мы будем обозначать символом $[x, t]$. Ясно, что $[x_1, t_1] = [x_2, t_2]$ тогда и только тогда, когда либо $x_1 = x_2$ и $t_1 = t_2$, либо $t_1 = t_2 = 1$ и $f(x_1) = f(x_2)$.

Коиндуцированное отображение $(\sigma_1)_f$ мы для упрощения формул будем обозначать символом j . Кроме того, мы введем в рассмотрение отображение $i = f_{\#} \circ \sigma_0: X \rightarrow \text{Cyl}(f)$,

т. е. отображение $x \mapsto [x, 0]$. Очевидно, что оба отображения i и j являются монeоморфизмами.

Как правило, точки $x \in X$ и $y \in Y$ мы будем отождествлять с точками ix и ju соответственно, т. е. будем считать отображения i и j вложениями. Таким образом, в силу этого соглашения $X \subset \text{Cyl}(f)$ и $Y \subset \text{Cyl}(f)$.

Каждая точка $z \in \text{Cyl}(f)$ имеет либо вид $[x, t]$, $x \in X$, $t \in I$, либо является некоторой точкой $y \in Y$. При этом $[x, 1] = f(x)$ для любой точки $x \in X$.

Лемма 1. *Отображение i является корасслоением (i , следовательно, пара $(\text{Cyl}(f), X)$ — парой Борсука).*

Доказательство. Формула

$$\bar{r}([x, t], \tau) = \begin{cases} ([x, t\tau + t - \tau], 0), & \text{если } t\tau + t - \tau \geq 0, \\ (x, -t\tau - t + \tau), & \text{если } t\tau + t - \tau \leq 0, \end{cases}$$

где $[x, t] \in \text{Cyl}(f)$, а $\tau \in I$, вместе с формулой

$$\bar{r}(y, \tau) = (y, 0), \quad y \in Y \subset \text{Cyl}(f), \quad 0 \leq \tau \leq 1,$$

корректно определяет ретрагирующее отображение

$$\bar{r}: \text{Cyl}(f) \times I \rightarrow (\text{Cyl}(f) \times 0) \cup (X \times I).$$

Поскольку X , очевидно, замкнуто в $\text{Cyl}(f)$, это доказывает лемму 1 (см. предложение 1 лекции 1). $\square$

Определим отображение

$$(3) \quad r: \text{Cyl}(f) \rightarrow Y$$

формулами

$$\begin{aligned} r([x, t]) &= [x, 1], & [x, t] &\in \text{Cyl}(f), \\ r(y) &= y, & y &\in Y \subset \text{Cyl}(f). \end{aligned}$$

Лемма 2. *Отображение r представляет собой гомотопическую эквивалентность.*

Доказательство. Пусть, как и выше, $j: Y \rightarrow \text{Cyl}(f)$ — вложение. Ясно, что $r \circ j = \text{id}$. С другой стороны, $H: j \circ r \sim \text{id}$, где гомотопия

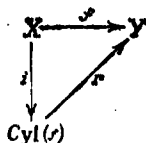
$$H: \text{Cyl}(f) \times I \rightarrow \text{Cyl}(f)$$

определена формулами

$$(4) \quad \begin{aligned} H([x, t], \tau) &= [x, t\tau + 1 - \tau], & [x, t] &\in \text{Cyl}(f), \\ H(y, \tau) &= y, & y &\in Y \subset \text{Cyl}(f). \end{aligned} \quad \square$$

Следствие. *Любое непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ гомотопически эквивалентно корасслоению $i: X \rightarrow \text{Cyl}(f)$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что $f(x) = [x, 1] = r[x, 0] = (r \circ i)(x)$ для любой точки $x \in X$, т. е. что диаграмма



коммутативна. $\square$

Это следствие доказывает теорему 1 в отношении корасслоений.

Гомотопическая эквивалентность r обладает тем свойством, что $r \circ j = \text{id}$ и, значит, является ретракцией. Этот тип ретракций заслуживает отдельного названия.

Пусть $A \subset X$ и $i: A \rightarrow X$ — вложение.

Определение 2. Отображение $r: X \rightarrow A$ называется *деформационной ретракцией*, если $r \circ i = \text{id}_A$ и $i \circ r \sim \text{id}_X$. Подпространство A , для которого существует деформационная ретракция $X \rightarrow A$, называется *деформационным ретрактом* пространства X . Гомотопия $X \times I \rightarrow X$, связывающая отображения $i \circ r$ и id_X , называется *ретрагирующей деформацией*.

Говорят, что пространство X *деформируемо* в подпространство A , если существует такая гомотопия $f_t: X \rightarrow X$, что $f_0 = \text{id}$ и $f_1(X) \subset A$, т. е. если существует такое отображение $\varphi: X \rightarrow A$, что $i \circ \varphi \sim \text{id}_X$. Легко видеть, что подпространство A тогда и только тогда является деформационным ретрактом пространства X , когда оно является ретрактом пространства X и пространство X деформируется в подпространство A . Действительно, если $r: X \rightarrow A$ — ретракция и $\varphi: X \rightarrow A$ — такое отображение, что $i \circ \varphi \sim \text{id}$, то $i \circ r \sim i \circ r \circ i \circ \varphi = i \circ \varphi \sim \text{id}$, и, значит, r является деформационной ретракцией. $\square$

Каждая деформационная ретракция $r: X \rightarrow A$ является, конечно, гомотопической эквивалентностью. Обратной гомотопической эквивалентностью будет в этом случае вложение $i: A \rightarrow X$. Обратно, если вложение $i: A \rightarrow X$ является гомотопической эквивалентностью, то в случае, когда пара (X, A) является парой Борсука, подпространство A будет деформационным ретрактом пространства X . Действительно, пусть $j: X \rightarrow A$ — гомотопическая

эквивалентность, обратная к вложению $i: A \rightarrow X$. По определению отображение $j|_A = j \circ i$ гомотопно тождественному отображению id_A . Поэтому отображение j гомотопно отображению $r: X \rightarrow A$, для которого $r|_A = \text{id}_A$, т. е. являющемуся ретракцией $X \rightarrow A$. Поскольку $i \circ r \sim i \circ j \sim \text{id}_X$, эта ретракция является деформационной. $\square$

Интересно, что к деформационным ретракциям и соответствующим вложениям сводится произвольная гомотопическая эквивалентность. Именно, оказывается, что для любой гомотопической эквивалентности $f: X \rightarrow Y$ существует такое пространство Z , содержащее оба пространства X и Y в качестве деформационных ретрактов, что $f = r \circ i$, где $i: X \rightarrow Z$ — вложение, а $r: Z \rightarrow Y$ — деформационная ретракция. Более того, за это пространство Z можно принять (обращенный) цилиндр $\text{Cyl}(f)$ отображения f . Все это непосредственно вытекает из следующего предложения.

Предложение 1. *Отображение $f: X \rightarrow Y$ тогда и только тогда является гомотопической эквивалентностью, когда пространство X является деформационным ретрактом цилиндра $\text{Cyl}(f)$.*

Доказательство. Если X — деформационный ретракт, то вложение $i: X \rightarrow \text{Cyl}(f)$ является гомотопической эквивалентностью. Таким образом, в разложении $f = r \circ i$ оба отображения i и r являются гомотопическими эквивалентностями. Поэтому гомотопической эквивалентностью будет и отображение f .

Обратно, пусть отображение $f: X \rightarrow Y$ является гомотопической эквивалентностью, и пусть $g: Y \rightarrow X$ — обратная гомотопическая эквивалентность. Нам следует построить ретрагирующее отображение $p: \text{Cyl}(f) \rightarrow X$ и гомотопию $K: \text{Cyl}(f) \times I \rightarrow \text{Cyl}(f)$, связывающую тождественное отображение $\text{id}: \text{Cyl}(f) \rightarrow \text{Cyl}(f)$ с отображением $i \circ p: \text{Cyl}(f) \rightarrow \text{Cyl}(f)$. Мы составим гомотопию K из четырех последовательно выполняемых гомотопий. Сначала мы на отрезке $[0, 1/4]$ выполним гомотопию (4). Это означает, что при $0 \leq \tau \leq 1/4$ гомотопия K будет определяться формулами

$$\begin{aligned} K([x, t], \tau) &= [x, t + 4\tau - 4\tau t], & [x, t] \in \text{Cyl}(f), \\ K(y, \tau) &= y, & y \in Y \subset \text{Cyl}(f). \end{aligned}$$

В результате из отображения $\text{id}: \text{Cyl}(f) \rightarrow \text{Cyl}(f)$ мы получим отображение $j \circ r: \text{Cyl}(f) \rightarrow \text{Cyl}(f)$, принимающее значения в Y .

На следующем отрезке $[1/4, 1/2]$ мы примем за гомотопию K композицию отображения $j \circ r$ и гомотопии $G: Y \times I \rightarrow Y$, связывающей тождественное отображение $\text{id}: Y \rightarrow Y$ с отображением $f \circ g: Y \rightarrow Y$, т. е., точнее, гомотопию

$$j \circ G \circ (r \times \text{id}): \text{Cyl}(f) \times I \rightarrow \text{Cyl}(f),$$

связывающую отображение $j \circ r$ с отображением $j \circ f \circ g \circ r$, и подвергнутую линейному преобразованию параметра. Таким образом, гомотопия K при $\tau \in [1/4, 1/2]$ будет определяться формулами

$$K([x, t], \tau) = jG(f(x), 4\tau - 1), [x, t] \in \text{Cyl}(f),$$

$$K(y, \tau) = jG(y, 4\tau - 1), y \in Y \subset \text{Cyl}(f).$$

Отображение $j \circ f \circ g \circ r$ точку $[x, t] \in \text{Cyl}(f)$ переводит в точку $f(g(f(x))) = [g(f(x)), 1]$, а точку $y \in \text{Cyl}(f)$ — в точку $f(g(y)) = [g(y), 1]$. Поэтому формулы $([x, t], \tau) \mapsto [g(f(x)), 1 - \tau]$ и $(y, \tau) \mapsto (g(y), 1 - \tau)$ будут корректно определять гомотопию этого отображения в отображение $[x, t] \mapsto g(f(x))$, $y \mapsto g(y)$. Мы и примем эту гомотопию за гомотопию K на отрезке $[1/2, 3/4]$. Учитывая сдвиг параметра, мы получаем, следовательно, что гомотопия K определяется при $\tau \in [1/2, 3/4]$ формулами

$$K'([x, t], \tau) = [g(f(x)), 3 - 4\tau], [x, t] \in \text{Cyl}(f),$$

$$K(y, \tau) = [g(y), 3 - 4\tau], y \in Y \subset \text{Cyl}(f).$$

При $\tau = 3/4$ мы фактически получаем отображение в X . Поэтому на точках $[x, t]$ к нему можно применить гомотопию $F: X \times I \rightarrow X$, связывающую отображение $g \circ f: X \rightarrow X$ с тождественным отображением $\text{id}: X \rightarrow X$. Эту гомотопию мы и примем за гомотопию K на отрезке $[3/4, 1]$. При этом, чтобы при $t = 1$ не возник разрыв, нужно параметр умножить на $1 - t$. Кроме того, надо учесть сдвиг области изменения параметра. Тем самым при $\tau \in [3/4, 1]$ мы получаем для гомотопии K формулы

$$K([x, t], \tau) = iF(x, (1 - t)(4\tau - 3)), [x, t] \in \text{Cyl}(f),$$

$$K(y, \tau) = ig(y), y \in Y \subset \text{Cyl}(f).$$

Получающаяся гомотопия $K: \text{Cyl}(f) \times I \rightarrow \text{Cyl}(f)$ связывает тождественное отображение $\text{id}: \text{Cyl}(f) \rightarrow \text{Cyl}(f)$ с отображением $i \circ r: \text{Cyl}(f) \rightarrow \text{Cyl}(f)$, где r — отображе-

ние $\text{Cyl}(f) \rightarrow X$, определенное формулами

$$\begin{aligned} \rho[x, t] &= F(x, 1-t) \quad [x, t] \in \text{Cyl}(f), \\ \rho(y) &= g(y), \quad y \in Y \subset \text{Cyl}(f) \end{aligned}$$

(в силу соотношения $F(x, 0) = g(f(x))$) отображение ρ определено корректно).

Для завершения доказательства предложения 1 осталось заметить, что так как $\rho[x, 0] = F(x, 1) = x$, то $\rho \circ i = \text{id}$. $\square$

Особо интересен случай, когда пространство Y состоит только из одной точки. Такое пространство мы будем обозначать символом pt , а (единственное) отображение $X \rightarrow \text{pt}$ — символом const_X (или просто const).

Определение 3. Пространство X называется *стягиваемым*, если отображение const_X является гомотопической эквивалентностью.

Так как обратная гомотопическая эквивалентность $g: \text{pt} \rightarrow X$ задается точкой $x_0 = g(\text{pt})$ пространства X , а $\text{const}_X \circ g = \text{id}_{\text{pt}}$ и $g \circ \text{const}_X = \text{const}_{x_0}$, где $\text{const}_{x_0}: X \rightarrow X$ — постоянное отображение $x \mapsto x_0$, то пространство X стягиваемо, если существует такая точка $x_0 \in X$, что $\text{const}_{x_0} \sim \text{id}_X$. Говорят, что пространство X *стягивается к точке* x_0 .

Любопытно, что *стягиваемое пространство стягивается к любой своей точке*. Действительно, если $x_0, x_1 \in X$ и $\text{const}_{x_0} \sim \text{id}$, то $\text{const}_{x_1} \sim \text{const}_{x_0} \circ \text{const}_{x_1} = \text{const}_{x_0} \sim \text{id}$. $\square$

Гомотопия, связывающая отображение id_X с отображением const_{x_0} , называется *стягиванием* пространства X .

Примером стягиваемого пространства является n -мерный шар E^n (и, в частности, отрезок $I = [0, 1]$) и, вообще, любое выпуклое — или хотя бы звездное относительно некоторой своей точки — тело.

Цилиндр отображения const_X называется *конусом* над пространством X . Возможны два конуса: прямой и обращенный. Первый получается из произведения $X \times I$ стягиванием в точку подпространства $X \times 0$, а второй стягиванием в точку подпространства $X \times 1$. Мы, как правило, будем рассматривать обращенный конус и будем обозначать его символом CX . Таким образом, по определению

$$CX = X \times I / X \times 1.$$

Образ точки $(x, t) \in X \times I$ при отображении факторизации $X \times I \rightarrow CX$ мы будем обозначать символом $[x, t]^C$ или

просто $[x, t]$. В частности, все символы вида $[x, 1]$ обозначают одну-единственную точку конуса CX , не зависящую от x . Эта точка обозначается символом p_0 и называется *вершиной* конуса CX .

Соответствие $[x, t] \mapsto [x, \tau + t - \tau t]$, $\tau \in I$, задает гомотопию из CX в CX , связывающую тождественное отображение с постоянным отображением $[x, t] \mapsto p_0$. Это означает, что конус CX стягивается к своей вершине (и, значит, к любой точке).

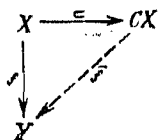
Каждое непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ определяет по формуле

$$(Cf)[x, t] = [f(x), t], \quad x \in X, t \in I,$$

непрерывное отображение $Cf: CX \rightarrow CY$, и ясно, что соответствия $X \mapsto CX$, $f \mapsto Cf$ составляют функтор из TOP в TOP .

Если $t_1, t_2 \neq 1$, то $[x_1, t_1] = [x_2, t_2]$ тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $t_1 = t_2$. В частности, мы видим, что соответствие $x \mapsto [x, 0]$ определяет монееоморфное отображение $X \rightarrow CX$. Подпространство конуса CX , состоящее из точек вида $[x, 0]$, $x \in X$, называется *основанием* конуса. Обычно посредством монееоморфизма $x \mapsto [x, 0]$ оно отождествляется с X . Согласно лемме 1 пара (CX, X) является парой Борсука, а согласно предложению 1 пространство X тогда и только тогда стягиваемо, когда X является деформационным ретрактом конуса CX .

Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *гомотопным нулю*, если оно гомотопно постоянному отображению $\text{const}_{y_0}: X \rightarrow Y$, $x \mapsto y_0$, где $y_0 \in Y$, т. е. если существует такая гомотопия $F: X \times I \rightarrow Y$, что $F(x, 0) = x$ и $F(x, 1) = y_0$ для любой точки $x \in X$. Поскольку такого рода гомотопии находятся в естественном биективном соответствии с отображениями $\bar{f}: CX \rightarrow X$, совпадающими на X с отображением f (отображению $\bar{f}$ отвечает гомотопия, являющаяся композицией отображения факторизации $X \times I \rightarrow CX$ и отображения $\bar{f}$), мы получаем, что отображение $f: X \rightarrow Y$ тогда и только тогда гомотопно нулю, когда оно может быть распространено на CX :



Очевидно также, что пространство Y тогда и только тогда стягиваемо, когда для каждого пространства X любое отображение $X \rightarrow Y$ гомотопно нулю.

Деформационная ретракция (3) обладает еще и тем свойством, что для соответствующей гомотопии (4) имеет место равенство $H(y, \tau) = y$ для любой точки $y \in Y$ и любого $t \in I$. Здесь также стоит ввести соответствующую общую терминологию.

Определение 4. Гомотопия $f_t: X \rightarrow Y$ называется неподвижной (или связанной) на подпространстве $A \subset X$, если $f_t(a) = f_0(a)$ для любой точки $a \in A$ и любого $t \in I$. Гомотопия, неподвижная на A , называется также гомотопией относительно A .

Конечно, гомотопией, неподвижной на A , могут быть связаны только отображения $f, g: X \rightarrow Y$, совпадающие на A , т. е. такие, что $f|_A = g|_A$. Совпадающие на A отображения называются (связанно) гомотопными относительно A (обозначение $f \sim g \text{ rel } A$ или $f \sim g$, если они связаны неподвижной на A гомотопией. Это отношение является отношением эквивалентности и соответствующие классы $[f] \text{ rel } A$ называются гомотопическими классами относительно A .

Все совпадающие на A отображения $X \rightarrow Y$ составляют подпространство $\langle Y^X, f_0 \rangle$ пространства Y^X , состоящее из распространений на X некоторого фиксированного отображения $f_0: A \rightarrow Y$. При этом гомотопии относительно A можно рассматривать как пути этого подпространства. Обратное верно, вообще говоря, только если пространство X хаусдорфово и локально компактно, и тогда классы $[f] \text{ rel } A$ являются не чем иным, как компонентами подпространства $\langle Y^X, f_0 \rangle$.

Определение 5. Деформационная ретракция $r: X \rightarrow A$ называется строгой (или сильной), если $i \circ r \sim \text{id} \text{ rel } A$. Если такая ретракция существует, то подпространство A называется строгим деформационным ретрактом пространства X . В этом случае мы будем писать $X \searrow A$.

Предложение 2. Если пара (X, A) является замкнутой парой Борсука, то каждая деформационная ретракция $r: X \rightarrow A$ является строгой деформационной ретракцией.

Для доказательства этого предложения нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3. Для любой замкнутой пары Борсука пара $(X \times I, X_A)$, где $X_A = (X \times 0) \cup (A \times I) \cup (X \times 1)$, также является парой Борсука.

Мы докажем эту лемму ниже, а пока воспользуемся ею для доказательства предложения 2.

Доказательство предложения 2. Пусть $i: A \rightarrow X$ — вложение и $F: X \times I \rightarrow X$ — свободная гомотопия, связывающая отображение $i \circ r: X \rightarrow X$ с тождественным отображением id_X . Так как, согласно лемме 3, пара $(X \times I, X_A)$ является парой Борсука, то существует гомотопия из $X \times I$ в X , начальным отображением которой является гомотопия F и которая при каждом $\tau \in I$ задается на X_A формулой

$$F_\tau^1(x, t) = \begin{cases} F((i \circ r)x, \tau), & \text{если } t = 0, \\ F(x, t + (1-t)\tau), & \text{если } x \in A, 0 \leq t \leq 1, \\ x, & \text{если } t = 1. \end{cases}$$

Концевое отображение F_1 этой гомотопии и будет гомотопией $X \times I \rightarrow X \text{ rel } A$, связывающей id с $i \circ r$. $\square$

Следствие 1. Для замкнутой пары Борсука (X, A) подпространство A тогда и только тогда является строгим деформационным ретрактом пространства X , когда вложение $i: A \rightarrow X$ является гомотопической эквивалентностью. $\square$

Следствие 2. Замкнутая пара (X, A) тогда и только тогда является парой Борсука, когда пространство $\tilde{A} = (X \times 0) \cup (A \times I)$ является строгим деформационным ретрактом пространства $X \times I$.

Доказательство. Если $X \times I \cong \tilde{A}$, то пара (X, A) является парой Борсука в силу следствия из предложения 1 лекции 1. Обратно, так как произведение $X \times I$, очевидно, деформируется в подпространство $X \times 0$ и, значит, в подпространство $\tilde{A}$, то в случае, когда существует ретракция $r: X \times I \rightarrow \tilde{A}$ (т. е. в силу того же следствия из предложения 1 лекции 1, когда пара (X, A) является парой Борсука), эта ретракция будет деформационной ретракцией и, значит, в силу предложения 2 (примененного к паре $(X \times I, \tilde{A})$) — строгой деформационной ретракцией. (Впрочем, можно обойтись и без каких-либо ссылок, если заметить, что, положив $r(x, t) = (\bar{r}(x, t), \rho(x, t))$, где $x \in X$, $t \in I$ и $\bar{r}(x, t) \in X$, $\rho(x, t) \in I$, мы можем определить ретрагирующую деформацию $g_t: X \times I \rightarrow X \times I$

явной формулой

$$g_\tau(x, t) = (\bar{r}(x, (1-\tau)t), (1-\tau)\rho(x, t) + \tau t), \\ x \in X, t, \tau \in I.$$

Действительно, ясно, что $g_0 = i \circ r$, $g_1 = \text{id}$ и $g_\tau(x, t) = \rho(x, t)$, если $(x, t) \in \tilde{A}$. $\square$

Пусть (X, A) — замкнутая пара Борсука, $F: A \times I \rightarrow Y$ — произвольная гомотопия и $f: A \rightarrow Y$, $a \mapsto F(a, 0)$ — начальное отображение гомотопии F . Так как $A \times I \subset X \times I$, то определено пространство $(X \times I) \cup_F Y$. Сравним его с пространством $X \cup_f Y$.

Рассмотрим с этой целью пространство $\tilde{A} \cup_F Y$.

Так как $A \times I \subset \tilde{A} \subset X \times I$ и $(X \times I) \supset \tilde{A}$, то пространство $\tilde{A} \cup_F Y$ содержится в пространстве $(X \times I) \cup_F Y$ и является его строгим деформационным ретрактом. С другой стороны, так как $(A \times I) \cap \tilde{A} = A \times 0$ и $F(a, 0) = f(a)$, $a \in A$, то пространство $\tilde{A} \cup_F Y$ естественным образом отождествляется с пространством $X \cup_f Y$. Этим доказано, что пространство $X \cup_f Y$ гомотопически эквивалентно пространству $(X \times I) \cup_F Y$.

Аналогичное утверждение имеет место, конечно, и для конечного отображения $g: A \rightarrow Y$, $a \mapsto F(a, 1)$, гомотопии F . Следовательно, если замкнутая пара (X, A) является парой Борсука, то для любых двух гомотопных отображений $f: X \rightarrow Y$ и $g: X \rightarrow Y$ пространства $X \cup_f Y$ и $X \cup_g Y$ гомотопически эквивалентны.

В этом смысле операция склеивания пространств гомотопически инвариантна.

Заметим, что в процессе доказательства нами фактически построена некоторая гомотопия $l_t: X \sqcup Y \rightarrow X \cup_f Y$, начальное отображение l_0 которой есть отображение факторизации $q: X \sqcup Y \rightarrow X \cup_f Y$ и которая обладает тем свойством, что ее ограничение $l_t|_A$ на A , рассматриваемое как гомотопия из A в Y , является не чем иным, как гомотопией $a \mapsto F(a, t)$, связывающей отображение f с отображением g . При этом отображение

$$\varphi: X \cup_g Y \rightarrow X \cup_f Y,$$

индуцированное отображением l_1 (т. е. такое, что $l_1 = \varphi \circ q'$, где q' — отображение факторизации $X \sqcup Y \rightarrow X \cup_g Y$), является гомотопической эквивалентностью.

Из этого замечания легко следует, что для любой замкнутой пары Борсука (X, A) и любого отображения $f: A \rightarrow Y$ каждая гомотопическая эквивалентность $h: Y \rightarrow Z$ распространяется до некоторой гомотопической эквивалентности

$$\bar{h}: X \sqcup_f Y \rightarrow X \sqcup_{h \circ f} Z.$$

Действительно, ясно, что отображение $\bar{h}: X \sqcup_f Y \rightarrow X \sqcup_{h \circ f} Z$, совпадающее на Y с отображением h и тождественное на X , однозначно определено и непрерывно. Поэтому нужно лишь доказать, что оно является гомотопической эквивалентностью.

Рассмотрим с этой целью обратную гомотопическую эквивалентность $g: Z \rightarrow Y$ и ее распространение

$$\bar{g}: X \sqcup_{h \circ f} Z \rightarrow X \sqcup_{g \circ h \circ f} Y,$$

тождественное на X . Так как $g \circ h \circ f \sim f$, то по доказанному существует гомотопическая эквивалентность

$$\varphi: X \sqcup_{g \circ h \circ f} Y \rightarrow X \sqcup_f Y.$$

В диаграмме

$$\begin{array}{ccccccc} X \sqcup Y & \xrightarrow{\text{id} \sqcup h} & X \sqcup Z & \xrightarrow{\text{id} \sqcup g} & X \sqcup Y & \xrightarrow{q} & X \sqcup_f Y \\ \downarrow q & & \downarrow q' & & \downarrow q'' & & \\ X \sqcup_f Y & \xrightarrow{\bar{h}} & X \sqcup_{h \circ f} Z & \xrightarrow{\bar{g}} & X \sqcup_{g \circ h \circ f} Y & \xrightarrow{\varphi} & X \sqcup_f Y \end{array}$$

вертикальные стрелки которой являются отображениями факторизации, оба квадрата коммутативны по построению, а правый треугольник гомотопически коммутативен по только что сделанному замечанию. Поэтому

$$\varphi \circ \bar{g} \circ \bar{h} \sim q \circ (\text{id} \sqcup (g \circ h)).$$

Но легко видеть, что формула

$$k_t = \begin{cases} q \circ (\text{id} \sqcup s_{2t}), & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ l_{2t-1} \circ (\text{id} \sqcup (g \circ h)), & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

где $s_t: Y \rightarrow Y$ — гомотопия, связывающая тождественное отображение пространства Y с отображением $g \circ h$, а $l_t: X \sqcup Y \rightarrow X \sqcup_f Y$ — гомотопия, связывающая отображение q с отображением $\varphi \circ q''$, корректно определяет гомотопию $k_t: X \sqcup Y \rightarrow X \sqcup_f Y$, связывающую отображение q с ото-

бражением

$$(\varphi \circ q'') \circ (\text{id} \sqcup (g \circ h)) = \varphi \circ \bar{g} \circ \bar{h} \circ q$$

и согласованную с проекцией q , т. е. имеющую вид $k_i = \bar{k}_i \circ q$, где $\bar{k}_i: X \cup_f Y \rightarrow X \cup_f Y$. При этом

$$\bar{k}_0 = \text{id} \text{ и } \bar{k}_1 = \varphi \circ \bar{g} \circ \bar{h}.$$

Таким образом, $\varphi \circ \bar{g} \circ \bar{h} \sim \text{id}$, где φ — гомотопическая эквивалентность.

Применив то же самое рассуждение не к f и k , а к $h \circ f$ и g , мы получим, что $\varphi \circ \bar{h} \circ \bar{g} \sim \text{id}$, где $\bar{h}$ — некоторое отображение, а φ — гомотопическая эквивалентность.

Но, если φ' — гомотопическая эквивалентность, обратная к гомотопической эквивалентности φ , то $\bar{g} \circ \bar{h} \sim \varphi'$, и, значит, $\bar{g} \circ \bar{h} \circ \varphi \sim \varphi \circ \varphi' \sim \text{id}$. Следовательно,

$$\varphi \circ \bar{h} \sim \varphi \circ \bar{h} \circ \bar{g} \circ \bar{h} \circ \varphi \sim \bar{h} \circ \varphi,$$

и потому $(\bar{h} \circ \varphi) \circ \bar{g} \sim \text{id}$.

Этим доказано, что $\bar{g}$ является гомотопической эквивалентностью (с обратной гомотопической эквивалентностью $\bar{h} \circ \varphi$). Поэтому гомотопической эквивалентностью будет и отображение $\bar{h}$. $\square$

Заметим, что лемма 3 у нас пока еще не доказана. Ее доказательство основывается на одном, интересном и самом по себе, предложении, дающем локальную характеристику замкнутых пар Борсука.

Определение 6. Подпространство A топологического пространства X называется *окрестностным строгим деформационным ретрактом* (сокращенно ОСДР), если оно является строгим деформационным ретрактом некоторого открытого множества $U \supset A$, т. е. если существует такая неподвижная на A гомотопия $g_t: U \rightarrow U$, что $g_0(x) = x$ и $g_1(x) \in A$ для любой точки $x \in U$.

Аналогично, подпространство A называется ОСДР'ом в слабом смысле, если существует такая неподвижная на A гомотопия $g_t: U \rightarrow X$, что $g_0(x) = x$ и $g_1(x) \in A$ для каждой точки $x \in U$.

ОСДР (в сильном или слабом смысле) называется *функционально выделяемым* (сокращенно ФОСДР), если существует такая непрерывная функция $\varphi: X \rightarrow I$, что $A = \varphi^{-1}(0)$ и $X \setminus U = \varphi^{-1}(1)$.

Лемма 4. Подпространство $A \subset X$ тогда и только тогда является ФОСДР'ом в слабом смысле, когда существует такая непрерывная функция $\psi: X \rightarrow I$ и такая неподвижная на A гомотопия $G: X \times I \rightarrow X$, что $A = \psi^{-1}(0)$, $G(x, 0) = x$ и $G(x, t) \in A$ при $\psi(x) < t$.

Доказательство. Если функция ψ и гомотопия G существуют, то ограничение гомотопии G на $U \times I$, где $U = X \setminus \psi^{-1}(1)$, $\varphi = \psi$, будет неподвижной на $A = \varphi^{-1}(0)$ гомотопией из U в X , обладающей тем свойством, что $g_0(x) = x$ и $g_1(x) \in A$ для каждой точки $x \in U$.

Обратно, пусть существует такая функция $\varphi: X \rightarrow I$, что $A = \varphi^{-1}(0)$, и такая неподвижная на A гомотопия $g_t: U \rightarrow X$, где $U = X \setminus \varphi^{-1}(1)$, что $g_0(x) = x$ и $g_1(x) \in A$ для каждой точки $x \in U$. Тогда $A = \psi^{-1}(0)$, где $\psi(x) = \min(2\varphi(x), 1)$, и формула

$$G(x, t) = \begin{cases} x, & \text{если } \varphi(x) \geq t, \\ g_\tau(x), & \text{если } \varphi(x) < t, \end{cases}$$

где

$$\tau = \begin{cases} \frac{t}{\varphi(x)} - 1, & \text{если } 0 < \varphi(x) < t \leq 2\varphi(x), \\ 1, & \text{если } t \geq 2\varphi(x), \end{cases}$$

корректно определяет такую гомотопию $G: X \times I \rightarrow X$, что $G(x, 0) = x$ и $G(x, t) \in A$ при $\psi(x) < t$. $\square$

Предложение 3 (локальная характеристика замкнутых пар Борсука). Замкнутая пара (X, A) тогда и только тогда является парой Борсука, когда подпространство A представляет собой ФОСДР в слабом смысле.

Доказательство. Пусть (X, A) — замкнутая пара Борсука, и пусть $r: X \times I \rightarrow \tilde{A}$ — произвольная ретракция, где, как всегда, $\tilde{A} = (X \times 0) \cup (A \times I)$. Пусть, как и выше,

$$r(x, t) = (\bar{r}(x, t), \rho(x, t)), \text{ где } \bar{r}(x, t) \in X, \rho(x, t) \in I.$$

Как было показано на стр. 47, для функции $\psi(x) = \max(t - \rho(x, t))$ имеет место равенство $\psi^{-1}(0) = A$.

Кроме того, если $\psi(x) < t$, то $\rho(x, t) > 0$, и потому $\bar{r}(x, t) \in A$. Таким образом, функция ψ и гомотопия $G = \bar{r}$ удовлетворяют условиям леммы 4, и потому A является ФОСДР'ом в слабом смысле.

Обратно, если A представляет собой ФОСДР в слабом смысле, то, согласно лемме 4, существует такая непре-

рывная функция $\psi: X \rightarrow I$, что $\psi^{-1}(0) = A$, и такая неподвижная на A гомотопия $G: X \times I \rightarrow X$, что $G(x, 0) = x$ и $G(x, t) \in A$ при $\psi(x) < t$. Тогда формула

$$r(x, t) = \begin{cases} (G(x, t), 0), & \text{если } t \leq \psi(x), \\ (G(x, t), t - \psi(x)), & \text{если } t \geq \psi(x), \end{cases} \quad (x, t) \in X \times I,$$

будет определять ретракцию $r: X \times I \rightarrow \tilde{A}$, и потому пара (X, A) будет парой Борсука. $\square$

Пример. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — произвольное отображение и $\text{Cyl}(f)$ — его обращенный цилиндр. Ясно, что формулы

$$\varphi[x, \tau] = \tau, \quad \varphi(y) = 1, \quad x \in X, \tau \in I, y \in Y,$$

определяют непрерывную функцию $\varphi: \text{Cyl}(f) \rightarrow I$, для которой $\varphi^{-1}(0) = X$ и $\varphi^{-1}(1) = Y$, а формула

$$g_t([x, \tau]) = [x, (1-t)\tau], \quad x \in X, \tau, t \in I,$$

определяет гомотопию $g_t: U \rightarrow \text{Cyl}(f)$, $U = \text{Cyl}(f) \setminus Y$, для которой $g_0[x, \tau] = [x, \tau]$ и $g_1[x, \tau] = [x, 0] \in X$. Это показывает, что подпространство X цилиндра $\text{Cyl}(f)$ является ФОСДР'ом в слабом смысле и, следовательно, пара $(\text{Cyl}(f), X)$ — парой Борсука. Тем самым мы заново доказали лемму 1.

Теперь мы уже можем доказать и лемму 3.

Доказательство леммы 3. Так как пара (X, A) является замкнутой парой Борсука, то, согласно предложению 3, существуют такая непрерывная функция $\varphi: X \rightarrow I$ и такая гомотопия $g_t: U \rightarrow X \text{ rel } A$, где $U = X \setminus \varphi^{-1}(1)$, что $\varphi^{-1}(0) = A$ и $g_0(x) = x$, $g_1(x) = A$ для любой точки $x \in U$. Но тогда, как показывает непосредственная проверка, непрерывная функция $\psi: X \times I \rightarrow I$, определенная формулой

$$\psi(x, \tau) = 2 \min(2\varphi(x), \tau, 1 - \tau), \quad (x, \tau) \in X \times I,$$

обладает тем свойством, что $\psi^{-1}(0) = X_A$, а гомотопия $h_t: V \rightarrow X \times I$, где $V = X \times I \setminus \psi^{-1}(1)$ — множество точек $(x, \tau) \in X \times I$, для которых либо $\tau \neq 1/2$, либо $\varphi(x) < 1/4$,

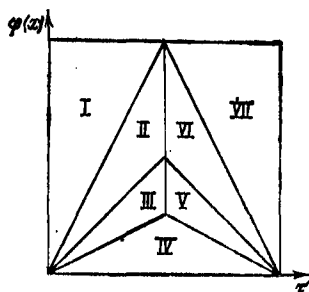


Рис. 3.

определенная (см. рис. 3) формулой

$$h_t(x, \tau) = \begin{cases} (x, \tau(1-t)), & \text{если } 2\tau \leq \varphi(x), \\ \left(g\left(x, \left(\frac{2\tau}{\varphi(x)} - 1\right)t\right), \tau(1-t)\right), & \text{если } \varphi(x) \leq 2\tau \leq \min(2\varphi(x), 1), \\ (g(x, t), (\tau - 2\varphi(x))t + \tau), & \text{если } \varphi(x) \leq \tau \leq \min(2\varphi(x), 1/2), \\ (g(x, t), \tau), & \text{если } 2\varphi(x) \leq \tau \leq 1 - 2\varphi(x), \\ (g(x, t), \tau + (2\varphi(x) + \tau - 1)t), & \text{если } \max(1 - 2\varphi(x), 1/2) \leq \tau \leq \\ & \leq 1 - \varphi(x), \\ \left(g\left(x, \left(\frac{2(1-\tau)}{\varphi(x)} - 1\right)t\right), \tau + t - \tau t\right), & \text{если } \max(2(1 - \varphi(x)), 1) \leq \\ & \leq 2\tau \leq 2 - \varphi(x), \\ (x, \tau + t - \tau t), & \text{если } 2 - \varphi(x) \leq 2\tau, \end{cases}$$

— тем свойством, что $h_0(x, \tau) = (x, \tau)$, $h_1(x, \tau) \in X_A$ для любой точки $(x, \tau) \in X \times I$ и $h_t(x, \tau) = (x, \tau)$ для любой точки $(x, \tau) \in X_A$. Таким образом, X_A является ФОСДР'ом в слабом смысле, и потому пара $(X \times I, X_A)$ — парой Борсука. $\square$

Вернемся теперь к отображению $f: X \rightarrow Y$ и его цилиндру $\text{Cyl}(f)$. Поскольку, как уже было замечено, гомотопия (4) является гомотопией относительно Y , мы видим, что для любого отображения $f: X \rightarrow Y$ пространство Y является строгим деформационным ретрактом цилиндра $\text{Cyl}(f)$.

Что же касается пространства X , то, согласно предложению 1, для того чтобы оно было строгим деформационным ретрактом цилиндра $\text{Cyl}(f)$, во всяком случае необходимо, чтобы отображение $f: X \rightarrow Y$ было гомотопической эквивалентностью. Довольно неожиданно, — если мы вспомним, что построенная при доказательстве предложения 1 ретрагирующая деформация заведомо не является гомотопией относительно X , — оказывается, что это необходимое условие также и достаточно.

Предложение 4. *Отображение $f: X \rightarrow Y$ тогда и только тогда представляет собой гомотопическую эквивалентность, когда пространство X является строгим деформационным ретрактом цилиндра $\text{Cyl}(f)$.*

Доказательство. Это предложение непосредственно вытекает из предложений 1, 2 и леммы 1. $\square$

Следствие. Пространство X тогда и только тогда стягиваемо, когда оно является строгим деформационным ретрактом конуса CX . $\square$

Понятие строгой деформационной ретракции позволяет также дать новую характеристику отображений, являющихся расслоениями.

Мы будем говорить, что отображение $p: E \rightarrow B$ удовлетворяет аксиоме о распространении накрывающего отображения (короче, аксиоме РНО), если для любой пары (X, A) , в которой подпространство A функционально выделяемо и является строгим деформационным ретрактом пространства X , для каждой коммутативной диаграммы вида

$$(5) \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{r} & E \\ \downarrow i & \searrow \bar{f} & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array} \quad (i — \text{вложение})$$

существует отображение $\bar{f}$.

Поскольку подпространство $X = X \times 0$ произведения $X \times I$, очевидно, функционально выделяемо и является его строгим деформационным ретрактом, каждое отображение $p: E \rightarrow B$, удовлетворяющее аксиоме о распространении накрывающего отображения, является расслоением.

Обратное утверждение также справедливо, т. е. любое расслоение удовлетворяет аксиоме о распространении накрывающего отображения. Действительно, пусть в диаграмме (5) отображение $p: E \rightarrow B$ является расслоением, а подпространство A пространства X функционально выделяемо и представляет собой строгий деформационный ретракт пространства X . Пусть, далее, $r: X \rightarrow A$ — строгая деформационная ретракция, $H: X \times I \rightarrow X$ — неподвижная на A гомотопия, связывающая отображение $i \circ r: X \rightarrow X$ с тождественным отображением $\text{id}: X \rightarrow X$, и $\varphi: X \rightarrow I$ — такая непрерывная функция, что $\varphi^{-1}(0) = A$. Тогда ясно, что формула

$$\bar{H}(x, t) = \begin{cases} H\left(x, \frac{t}{\varphi(x)}\right), & \text{если } t \leq \varphi(x) \text{ и } x \notin A, \\ x, & \text{если } t \geq \varphi(x) \text{ или } x \in A, \end{cases}$$

корректно определяет некоторое непрерывное отображение $\bar{H}: X \times I \rightarrow X$, также являющееся неподвижной на A гомотопией, связывающей отображение $i \circ r$ с тождественным отображением id . При этом, если мы аналогичным образом «возбудим» отображение σ_0 , т. е. рассмотрим отображение $\bar{\sigma}_0: X \rightarrow X \times I$, определенное формулой

$$\bar{\sigma}_0(x) = (x, \varphi(x)), \quad x \in X,$$

то будет иметь место равенство $\bar{H} \circ \bar{\sigma}_0 = \text{id}$ (тогда как $H \circ \sigma_0 = i \circ r$). Вместе с тем $\bar{\sigma}_0 = \sigma_0$ на A , т. е. $\bar{\sigma}_0 \circ i = \sigma_0 \circ i$.

Рассмотрим теперь диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{r} & A & \xrightarrow{g} & E \\ \downarrow i & & \downarrow \sigma_0 & & \downarrow i & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{\bar{\sigma}_0} & X \times I & \xrightarrow{\bar{H}} & X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Согласно только что сказанному эта диаграмма коммутативна.

Компонируя соответствующие отображения, мы можем объединить центральный и правый квадраты этой диаграммы в одну (также коммутативную) диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g \circ r} & E \\ \downarrow \sigma_0 & \nearrow \bar{G} & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{G} & B \end{array}$$

где $G = f \circ \bar{H}$. Поскольку отображение $p: E \rightarrow B$ является по условию расслоением, для этой диаграммы существует накрывающая гомотопия $\bar{G}: X \times I \rightarrow E$, и тогда непосредственно проверяется, что отображение $\bar{f} = \bar{G} \circ \bar{\sigma}_0$ замыкает диаграмму (5). $\square$

Полученный результат имеет важное следствие, касающееся задачи о распространении накрывающей гомотопии:

$$(6) \quad \begin{array}{ccc} \tilde{A} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{F}' \\ \downarrow \tilde{\sigma}_0 & \nearrow \tilde{F} & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{F} & B \end{array}$$

где $A \subset X$ и $\tilde{A} = (X \times 0) \cup (A \times I)$ (см. диаграмму (2) из Дополнения к лекции 1).

Мы будем говорить, что отображение $p: E \rightarrow B$ удовлетворяет аксиоме о распространении накрывающей гомотопии (короче, аксиоме РНГ), если для любой диаграммы (6), в которой (X, A) является замкнутой парой Борсука, существует накрывающая гомотопия $\tilde{F}$.

При $A = \emptyset$ аксиома РНГ переходит в аксиому НГ, так что любое отображение, удовлетворяющее аксиоме о распространении накрывающей гомотопии, является расслоением.

Оказывается, что и, наоборот, любое расслоение удовлетворяет аксиоме о распространении накрывающей гомотопии. Поскольку расслоения удовлетворяют аксиоме РНО, для доказательства этого утверждения достаточно показать, что из аксиомы РНО следует аксиома РНГ, т. е. что для любой замкнутой пары Борсука (X, A) диаграмма (6) является частным случаем диаграммы (5), или, иными словами, что подпространство $\tilde{A}$ пространства $X \times I$ является его строгим деформационным ретрактом и функционально выделяемо. Первое свойство обеспечивается доказанным выше следствием из предложения 4, а для доказательства второго достаточно показать, что для функционального выделяемого подпространства $A \subset X$ подпространство $\tilde{A} \subset X \times I$ также функционально выделяемо (ибо, как было замечено в конце лекции 1, для любой замкнутой пары Борсука (X, A) подпространство A функционально выделяемо). Но если $\varphi: X \rightarrow I$ — такая непрерывная функция, что $A = \varphi^{-1}(0)$, то функция $\psi: X \times I \rightarrow I$, определенная формулой $\psi(x, t) = \min(t, \varphi(x))$, $(x, t) \in X \times I$, будет обладать тем свойством, что $\tilde{A} = \psi^{-1}(0)$. $\square$

Объединив полученный результат с другими доказанными выше характеристизациями расслоений, мы получим следующую окончательную теорему.

Теорема 2. Для произвольного отображения $p: E \rightarrow B$ следующие аксиомы равносильны:

НГ. О накрывающей гомотопии.

НП. О накрывающем пути.

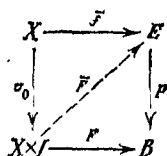
МРНГ. О мягком распространении накрывающей гомотопии.

РНГ. О распространении накрывающей гомотопии.

РНО. О распространении накрывающего отображения. $\square$

Таким образом, расслоения могут быть охарактеризованы каждой из этих аксиом.

Следствие. Пусть в диаграмме



(p — расслоение)

гомотопия F неподвижна на замкнутом подпространстве $A \subset X$. Тогда, если пара (X, A) является парой Борсука, то гомотопию $\bar{F}$ можно выбрать также неподвижной на A .

Доказательство. Условие неподвижности гомотопии $\bar{F}$ на A задает эту гомотопию на $\bar{A}$. Следовательно, мы находимся в условиях применимости аксиомы о пространстве накрывающей гомотопии. $\square$

Из этого следствия вытекает важное предложение, касающееся прообразов пар Борсука.

Предложение 5. Для любого расслоения $p: E \rightarrow B$ и любого замкнутого подпространства $A \subset B$, обладающего тем свойством, что пара (B, A) является парой Борсука, пара $(E, p^{-1}A)$ также будет парой Борсука.

Доказательство. Согласно предложению 3 и лемме 4 существует такая непрерывная функция $\psi: B \rightarrow I$, что $\psi^{-1}(0) = A$, и такая неподвижная на A гомотопия $g_t: B \rightarrow B$, что $g_0 = \text{id}_B$ и $g_t(x) \in A$ при $t > \psi(x)$. Гомотопия $p \circ g_t: E \rightarrow B$ неподвижна на $p^{-1}A$, и ее начальное отображение $p \circ g_0 = p$ накрывается отображением id_E . Поэтому, согласно следствию 1, существует такая неподвижная на $p^{-1}A$ гомотопия $h_t: E \rightarrow E$, что $h_0 = \text{id}_E$ и $h_t \circ p = p \circ g_t$ для любого $t \in I$. Рассмотрим на E функцию $\bar{\psi} = \psi \circ p: E \rightarrow I$ и гомотопию $\bar{g}_t: E \rightarrow E$, определенную формулой

$$\bar{g}_t(x) = h_\tau(x), \quad \text{где } \tau = \min(t, \bar{\psi}(x)), \quad x \in E.$$

Ясно, что $\bar{\psi}^{-1}(0) = p^{-1}A$, $\bar{g}_0(x) = x$ и $\bar{g}_t(x) \in p^{-1}A$ при $t > \bar{\psi}(x)$. Поэтому пара $(E, p^{-1}A)$ является парой Борсука. $\square$

Вернемся теперь к теореме 1 (которую, напомним, мы пока доказали только для корасслоений).

Обращенным коцилиндром отображения $f: X \rightarrow Y$ является по определению коамальга диаграммы $Y' \xrightarrow{\omega_1} Y \xleftarrow{f} X$, т. е. подмножество произведения $Y' \times X$, состоящее из таких точек (u, x) , $u: I \rightarrow Y'$, $x \in X$, что $u(1) = f(x)$. Мы будем обозначать этот коцилиндр прежним символом $\text{Cocyl}(f)$.

В обозначениях лекции 1 для обращенного коцилиндра имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \text{Cocyl}(f) & \xrightarrow{\omega_1^\#} & X \\ f \omega_1 \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{\omega_1} & Y \end{array}$$

Отображение $\omega_1^\#: (u, x) \mapsto x$ мы для упрощения формул будем обозначать символом r . Кроме того, мы введем в рассмотрение отображение $p = \omega_0 \circ f \omega_1: \text{Cocyl}(f) \rightarrow Y$, действующее по формуле $(u, x) \mapsto u(0)$.

Лемма 5. *Отображение $p: \text{Cocyl}(f) \rightarrow Y$ является расслоением.*

Доказательство. Пусть $\text{Cocyl}(p)$ — коцилиндр (необращенный) отображения p и $q: \text{Cocyl}(f)^I \rightarrow \text{Cocyl}(p)$ — отображение $\omega \mapsto (p \circ \omega, \omega(0))$, $\omega: I \rightarrow \text{Cocyl}(f)$. Согласно предложению 3 лекции 1 для доказательства леммы 5 нам достаточно построить такое отображение $s: \text{Cocyl}(p) \rightarrow \text{Cocyl}(f)^I$, что $g \circ s = \text{id}$. Экспоненциальный закон позволяет нам рассматривать отображение s как отображение $\text{Cocyl}(p) \times I \rightarrow \text{Cocyl}(f)$, т. е. (мы еще раз пользуемся этим законом) как пару отображений $a: \text{Cocyl}(p) \times I \times I \rightarrow Y$, $b: \text{Cocyl}(p) \times I \rightarrow X$, связанных для любых точек $c \in \text{Cocyl}(p)$, $t \in I$ соотношением

$$a(c, t, 1) = f(b(c, t)).$$

В этой интерпретации тождество $g \circ s = \text{id}$ равносильно, как легко видеть, тождествам

$$v(t) = a(c, t, 0), \quad u(\tau) = a(c, 0, \tau), \quad x = b(c, 0),$$

которые должны иметь место для любых чисел $t, \tau \in I$ и любой точки $c = (v, \bar{c}) \in \text{Cocyl}(p)$, где $v: I \rightarrow Y$, $\bar{c} = (u, x) \in \text{Cocyl}(f)$, т. е. для любой точки $x \in X$ и любых путей $v: I \rightarrow Y$ и $u: I \rightarrow Y$, связанных соотношениями

$$u(0) = v(0) \quad \text{и} \quad u(1) = f(x).$$

Допуская естественную вольность, мы будем тройку (v, u, x) обозначать прежним символом c .

Отображение b мы определим формулой

$$b(c, t) = x, \quad c = (v, u, x) \in \text{Cocyl}(p) \text{ и } t \in I.$$

Тогда отображение a будет удовлетворять соотношениям

$$v(t) = a(c, t, 0), \quad u(\tau) = a(c, 0, t), \quad a(c, t, 1) = f(x)$$

для любых точек $c = (v, u, x) \in \text{Cocyl}(p)$ и $(t, \tau) \in I \times I$. Но ясно, что этим соотношениям удовлетворяет отображение $a: \text{Cocyl}(p) \times I \times I \rightarrow Y$, определенное формулой

$$a(c, t, \tau) = (\tilde{c} \circ \varphi)(t, \tau), \quad c = (v, u, x) \in \text{Cocyl}(p), \quad t, \tau \in I,$$

где φ , как и выше, — ретрагирующее отображение $I \times I \rightarrow (I \times 0) \cup (0 \times I)$, для которого $\varphi(1 \times I) = (1, 0)$, а $\tilde{c}$ — отображение $(I \times 0) \cup (0 \times I) \rightarrow Y$, определяемое формулами

$$\tilde{c}(t, 0) = v(t), \quad \tilde{c}(0, \tau) = u(\tau), \quad t, \tau \in I.$$

(Вопрос: почему отображение a непрерывно?)

Тем самым лемма 5 полностью доказана. $\square$

Для каждой точки $y \in Y$ символом 0_y мы будем обозначать *постоянный путь* в точке y , задаваемый формулой

$$0_y(t) = y \quad \text{для любой точки } t \in I.$$

В частности, для каждой точки $x \in X$ символ $0_{f(x)}$ обозначает постоянный путь в точке $f(x) \in Y$. Поскольку $0_{f(x)}(1) = f(x)$, пара $(0_{f(x)}, x)$ лежит в $\text{Cocyl}(f)$. Обозначив эту пару символом $i(x)$, мы, следовательно, получим (очевидно, непрерывное) отображение

$$i: X \rightarrow \text{Cocyl}(f).$$

С отображением $r: \text{Cocyl}(f) \rightarrow X$, $(u, x) \mapsto x$, отображение i связано формулой $r \circ i = \text{id}$. Следовательно, i является монеоморфизмом, и потому, отождествив каждую точку $x \in X$ с точкой $i(x)$, мы вложим X в $\text{Cocyl}(f)$. При этом подпространство X окажется ретрактом пространства $\text{Cocyl}(f)$ с ретрагирующим отображением r .

Лемма 6. *Ретракт X является строгим деформационным ретрактом пространства $\text{Cocyl}(f)$, так что, в частности, отображение i представляет собой гомотопическую эквивалентность.*

Доказательство. Формула

$$H((u, x), t) = (v_t, x), \quad (u, x) \in \text{Cocyl}(f), \quad t \in I,$$

где v_t — путь $I \rightarrow Y$, определенный формулой

$$v_t(\tau) = u(1 - t + \tau t), \quad \tau \in I,$$

(очевидно, удовлетворяющий условию $v_t(1) = f(x)$), задает гомотопию $H: \text{Cosyl}(f) \times I \rightarrow \text{Cosyl}(f)$, неподвижную на X и связывающую отображение $i \circ r: (u, x) \mapsto (0_{f(x)}, x)$ с тождественным отображением $\text{id}: (u, x) \mapsto (u, x)$. $\square$

Следствие 1. Любое непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ гомотопически эквивалентно расслоению $p: \text{Cosyl}(f) \rightarrow Y$.

Доказательство. Достаточно заметить, что $f(x) = = 0_{f(x)}(0) = p(0_{f(x)}, x) = (p \circ i)(x)$ для любой точки $x \in X$, т. е. что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & \text{Cosyl}(f) & \\ i \nearrow & \downarrow p & \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

коммутативна ($f = p \circ i$). $\square$

Тем самым теорема 1 доказана и в отношении расслоений.

ДОПОЛНЕНИЕ

Категория TOP_{B_0} . — Гомотопии, корасслоения и расслоения категории TOP_{B_0} . — Гомотопические расслоения. — Гомотопические эквивалентности в сравнении с послойными гомотопическими эквивалентностями. — Коллапсирующие отображения. — Теорема Дольда о послойных гомотопических эквивалентностях. — Индуцированные гомотопические расслоения. — Расслоения, индуцированные гомотопными отображениями. — Отображения, являющиеся гомотопическими эквивалентностями на слоях.

Введенное ad hoc в конце Дополнения к лекции 1 понятие изоморфизма отображений $p: E \rightarrow B$ и $p': E' \rightarrow B$ может быть включено в общекатегорные рамки, что приводит к существенному и очень важному обобщению всех наших рассуждений.

Пусть A — произвольная категория и B_0 — некоторый ее фиксированный объект. Объект X категории A , рассматриваемый вместе с некоторым морфизмом $\pi_X: X \rightarrow B_0$, называется *объектом над B_0* . Морфизм π_X называется при этом *проекцией* объекта X .

При другой—равносильной—точке зрения объектами над B_0 считаются сами отображения π_X .

Для любых двух объектов X и Y над B_0 морфизмом над B_0 объекта X в объект Y называется произвольный морфизм $f: X \rightarrow Y$ категории $\mathbf{A}$, для которого диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \pi_X \searrow & & \swarrow \pi_Y \\ & B_0 & \end{array}$$

коммутативна. Ясно, что все объекты над B_0 и все их морфизмы над B_0 составляют категорию. Мы будем эту категорию обозначать символом $\mathbf{A}_{B_0}$.

В частности, для любого топологического пространства B_0 определена категория TOP_{B_0} , изоморфизмы которой и являются изоморфизмами отображений, введенными в Дополнении к лекции 1.

В случае, когда пространство B_0 состоит только из одной точки (является терминальным объектом категории TOP), категория TOP_{B_0} естественным образом отождествляется с категорией TOP . Таким образом, TOP_{B_0} обобщает TOP . Это обобщение вполне содержательно, поскольку в произвольной категории TOP_{B_0} возможна столь же продвинутая теория гомотопий, как и в категории TOP .

Однако по понятным причинам мы не будем здесь подробно развигать теорию гомотопий в категориях TOP_{B_0} , а ограничимся лишь самыми начальными ее понятиями и результатами. Для нас эта теория будет иметь лишь вспомогательное значение, как одно из орудий более углубленного изучения категории TOP .

Замечание о терминологии. Для топологического пространства X над B_0 прообраз $\pi_X^{-1}(b)$ произвольной точки $b \in B_0$ при проекции $\pi_X: X \rightarrow B_0$ называется обычно *слоем* этого пространства над точкой b . Для любых двух пространств X и Y над B_0 непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ тогда и только тогда является отображением над B_0 , когда для каждой точки $b \in B_0$ оно переводит слой $\pi_X^{-1}(b)$ в слой $\pi_Y^{-1}(b)$. Поэтому отображения над B_0 называются также *послойными отображениями*.

Гомотопии в категории TOP_{B_0} вводятся совершенно естественным образом.

Пусть X и Y — топологические пространства над B_0 (объекты категории TOP_{B_0}). Образования $f, g: X \rightarrow Y$ над B_0 (морфизмы категории TOP_{B_0}) называются *гомотопными в TOP_{B_0}* (или *над B_0*), а также *послойно гомотопными*, если существует такая гомотопия $f_t: X \rightarrow Y$, что $f_0 = f$, $f_1 = g$ и для любого $t \in I$ отображение $f_t: X \rightarrow Y$ является отображением над B_0 . О гомотопии f_t говорят, что она является *гомотопией над B_0* (или *послойной гомотопией*), связывающей отображения f и g . Отношение гомотопности над B_0 обозначается символом $f \sim_{B_0} g$.

Ясно, что послойные гомотопии удовлетворяют общим аксиомам 1°—4° из лекции 0, поэтому, в частности, отношение гомотопности над B_0 является отношением эквивалентности. Соответствующие классы эквивалентности называются *гомотопическими классами над B_0* (или *послойно гомотопическими классами*). Класс, содержащий отображение f , обозначается символом $[f]_{B_0}$.

Так как формула

$$[g]_{B_0} \circ [f]_{B_0} = [g \circ f]_{B_0}$$

корректно определяет композицию любых гомотопических классов над B_0 , то тем самым возникает категория $[\text{TOP}_{B_0}]$, объектами которой являются пространства над B_0 , а морфизмами — гомотопические классы над B_0 .

Замечание 1. Категорию $[\text{TOP}_{B_0}]$ следует отличать от категории $[\text{TOP}]_{B_0}$. Эти категории связаны очевидным функтором

$$(1) \quad [\text{TOP}_{B_0}] \rightarrow [\text{TOP}]_{B_0},$$

тождественным на объектах, но, вообще говоря, не инъективным и не надъективным на морфизмах. См. ниже стр. 111.

Морфизм $f: X \rightarrow Y$ категории TOP_{B_0} называется *гомотопической эквивалентностью над B_0* (или *послойной гомотопической эквивалентностью*), если существует такой морфизм $g: Y \rightarrow X$, что $g \circ f \sim_{B_0} \text{id}$ и $f \circ g \sim_{B_0} \text{id}$, т. е. если его гомотопический класс над B_0 является изоморфизмом категории $[\text{TOP}_{B_0}]$.

Каждое подпространство A пространства X над B_0 автоматически является пространством над B_0 (с проекцией $\pi_A = \pi_X|_A$), а вложение $i: A \rightarrow X$ — отображением над B_0 . В случае, когда существует такое отображение $r: X \rightarrow A$ над B_0 , что $r \circ i = \text{id}$, подпространство A назы-

вается ретрактом над B_0 (или послойным ретрактом) пространства X (а отображение $r \rightarrow$ ретракцией над B_0 или послойной ретракцией). Если, кроме того, $i \circ r \sim \text{id}_{B_0}$, то ретракт A называется деформационным ретрактом над B_0 , а если $i \circ r \sim \text{id} \text{ rel } A$ (т. е. если отображения $i \circ r$ и id_{B_0} связаны гомотопией над B_0 , неподвижной на A), то — строгим деформационным ретрактом над B_0 .

Для любого пространства X над B_0 произведение $X \times I$ мы будем считать пространством над B_0 с проекцией $(x, t) \mapsto \pi_X(x)$. Тогда гомотопии над B_0 будут не чем иным, как отображениями над B_0 вида $X \times I \rightarrow Y$.

Отображения $X \rightarrow Y'$, соответствующие по экспоненциальному закону таким гомотопиям, будут, очевидно, характеризоваться тем, что они переводят X в подпространство Y'_{B_0} пространства Y' , состоящее из таких путей $u: I \rightarrow Y$, что $\pi_Y \circ u = \text{const.}$ Положив $\pi_Y \circ u = 0_{\pi(u)}$, мы получим проекцию $\pi: Y'_{B_0} \rightarrow B_0$, по отношению к которой эти отображения будут отображениями над B_0 . Таким образом, гомотопии над B_0 мы можем также интерпретировать как отображения над B_0 вида $X \rightarrow Y'_{B_0}$.

Отображение $i: A \rightarrow X$ над B_0 называется корасслоением над B_0 , если для каждой диаграммы вида

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & X \\ \downarrow f & \searrow \bar{f} & \downarrow \bar{f} \\ Y'_{B_0} & \xrightarrow{\omega_0} & Y \end{array}$$

все отображения которой являются отображениями над B_0 , существует над B_0 замыкающее отображение $\bar{f}$.

Для любого отображения $f: X \rightarrow Y$ над B_0 его цилиндр $\text{Cyl}(f)$ является пространством над B_0 относительно проекции $[x, t] \mapsto \pi_X(x)$, $y \mapsto \pi_Y(y)$, и, как легко видеть, леммы 1 и 2 лекции 2 останутся при этом справедливыми и над B_0 , т. е. отображение $i: X \rightarrow \text{Cyl}(f)$ будет корасслоением над B_0 , а отображение $r: \text{Cyl}(f) \rightarrow Y$ — гомотопической эквивалентностью над B_0 (и даже строгой деформационной ретракцией над B_0).

Останется в силе и предложение 1 лекции 2, а также лемма 4 лекции 2 (в которой, естественно, от пары (X, A) нужно требовать, чтобы она была парой Борсука над B_0 , т. е. чтобы вложение $i: A \rightarrow X$ было корасслоением над B_0).

Поэтому предложение 5 лекции 2 также останется в силе. В частности, для любой гомотопической эквивалентности $f: X \rightarrow Y$ над B_0 подпространство X цилиндра $\text{Cyl}(f)$ будет его строгим деформационным ретрактом над B_0 .

Двойственным образом, отображение $p: E \rightarrow B$ над B_0 называется *расслоением над B_0* , если для каждой диаграммы вида

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\bar{f}} & E \\ \sigma_0 \downarrow & \searrow \bar{F} & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{f^*} & B \end{array}$$

или, что равносильно, диаграммы вида

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\bar{f}} & E \\ \downarrow F & \searrow \bar{F} & \downarrow p \\ B_{B_0}^I & \xrightarrow{\omega_0} & B \end{array}$$

все отображения которой являются отображениями над B_0 , существует над B_0 замыкающее отображение $\bar{F}$ (накрывающая гомотопия над B_0).

Коцилиндром над B_0 отображения $p: E \rightarrow B$ над B_0 называется подпространство $\text{Cocyl}_{B_0}(p) \subset \text{Cocyl}(p)$, состоящее из таких пар (u, e) , $u: I \rightarrow B$, $e \in E$, $u(0) = p(e)$, что $u \in B_{B_0}^I$, т. е. $\pi_B \circ u = \text{const}$. Оно является пространством над B_0 с проекцией $(u, e) \mapsto \pi_B(p(e))$. Ясно, что отображение $q: E^I \rightarrow \text{Cocyl}(p)$, $u \mapsto (p \circ u, u(0))$, переводит $E_{B_0}^I$ в $\text{Cocyl}_{B_0}(p)$ и потому индуцирует отображение

$$E_{B_0}^I \rightarrow \text{Cocyl}_{B_0}(p), \quad u \mapsto (p \circ u, u(0)),$$

которое мы также будем обозначать через q . Очевидно, что это отображение является отображением над B_0 .

Просмотрев теперь заново доказательство предложения 3 лекции 1, мы немедленно убедимся, что оно полностью сохраняется и для расслоений над B_0 , так что отображение $p: E \rightarrow B$ над B_0 тогда и только тогда будет расслоением над B_0 , когда для отображения $q: E_{B_0}^I \rightarrow \text{Cocyl}_{B_0}(p)$ существует сечение $\text{Cocyl}_{B_0}(p) \rightarrow E_{B_0}^I$ (автоматически являющееся отображением над B_0).

Касающиеся расслоений результаты лекции 2 также переносятся в категорию TOP_{B_0} .

Обращенным коцилиндром над B_0 отображения $f: X \rightarrow Y$ над B_0 называется подпространство коцилиндра $\text{Cosyl}(f)$, состоящее из таких пар (u, x) , $u: I \rightarrow Y$, $x \in X$, $u(1) = f(x)$, что $u \in Y'_{B_0}$. Оно обозначается символом $\text{Cosyl}_{B_0}(f)$ и является пространством над B_0 с проекцией $(u, x) \mapsto \pi_X(f(x))$, а отображение

$$p: \text{Cosyl}_{B_0}(f) \rightarrow Y, \quad (u, x) \mapsto u(0)$$

является отображением над B_0 . Более того, отображение p будет расслоением над B_0 . Доказательство состоит в дословном повторении доказательства леммы 5 лекции 2.

Аналогично, лемма 6 лекции 2 также сохраняется в категории TOR_{B_0} , т. е. для отображений

$$\begin{aligned} r: \text{Cosyl}_{B_0}(f) &\rightarrow X, \quad (u, x) \mapsto x, \\ i: X &\rightarrow \text{Cosyl}_{B_0}(f), \quad x \mapsto (0_{f(x)}, x), \end{aligned}$$

имеют место соотношения

$$r \circ i = \text{id}, \quad i \circ r \sim \text{id}_{B_0}.$$

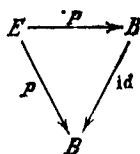
В частности, отображение i является гомотопической эквивалентностью над B_0 .

Поскольку $f = p \circ i$, мы видим, следовательно, что любое отображение $f: X \rightarrow Y$ над B_0 разлагается в композицию

$$X \xrightarrow{i} \text{Cosyl}_{B_0}(f) \xrightarrow{p} Y$$

гомотопической эквивалентности i над B_0 и расслоения p над B_0 .

Применение этих понятий и результатов к категории TOR основывается на том очевидном замечании, что любое отображение $p: E \rightarrow B$ мы можем рассматривать как отображение над B , считая пространства E и B пространствами над B с проекциями $\pi_E = p$ и $\pi_B = \text{id}$:



Тогда утверждение, что отображение $s: B \rightarrow E$ является сечением отображения p , будет равносильно утверждению, что оно является отображением над B .

Аналогично, в любой диаграмме вида

(2)

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & E \\ \sigma_0 \downarrow & \searrow \bar{f} & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

мы можем пространства X и $X \times I$ считать пространствами над B с проекциями $\pi_X = p \circ \bar{f} = \bar{F} \circ \sigma_0$ и $\pi_{X \times I} = \bar{F}$ соответственно. Тогда отображения σ_0 и $\bar{f}$ будут отображениями над B , так что над категорией TOP_B будет иметь место диаграмма

(3)

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \sigma_0 \swarrow & & \searrow \bar{f} \\ X \times I & \xrightarrow{\bar{F}} & E \end{array}$$

и, значит, условие, что отображение $p: E \rightarrow B$ является расслоением, будет равносильно тому, что для любой диаграммы (3) над B , т. е. для любого пространства X над B , для которого на произведении $X \times I$ задана такая структура пространства над B (т. е. задана проекция $\pi_{X \times I}: X \times I \rightarrow B$), что вложение $\sigma_0: X \rightarrow X \times I$ является отображением над B , и для любого отображения $\bar{f}: X \rightarrow E$ над B , существует отображение $\bar{F}: X \times I \rightarrow E$ над B , замыкающее эту диаграмму, т. е. такое, что $\bar{F} \circ \sigma_0 = \bar{f}$.

Эта переформулировка не совсем бессодержательна, поскольку она допускает немедленное обобщение.

Определение 1. Говорят, что отображение $p: E \rightarrow B$ является *гомотопическим расслоением* (или *расслоением в смысле Дольда*), если для любой диаграммы вида (3) (состоящей из отображений над B) существует такое отображение $\bar{F}: X \times I \rightarrow E$ (над B), что $\bar{F} \circ \sigma_0 \sim_B \bar{f}$, т. е.,

иначе говоря, если для каждой диаграммы вида (2) существует такое отображение $\bar{F}: X \times I \rightarrow E$, что ее верхний треугольник гомотопически коммутативен над B (тогда как нижний треугольник по-прежнему коммутативен). Другими словами, отображение $p: E \rightarrow B$ является гомотопическим расслоением, если в условиях аксиомы **РГ**

накрывающая гомотопия начинается, вообще говоря, не с данного отображения $X \rightarrow E$, а с отображения, которое над B ему гомотопно.

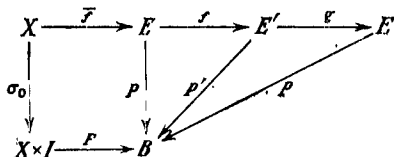
Любое расслоение является, конечно, гомотопическим расслоением, но, как показывают простейшие примеры (прямой угол $E = I \times \{0\} \cup \{0\} \times I$ на плоскости $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ и его проекция $p: (x, y) \mapsto x$ на отрезок $B = I$), обратное неверно.

Сейчас нам будет удобно несколько сместить акценты и считать объектами категории TOP_B сами отображения $p: E \rightarrow B$.

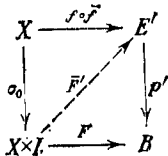
Лемма 1. Любое отображение $p: E \rightarrow B$, гомотопически эквивалентное над B гомотопическому расслоению $p': E' \rightarrow B$, также будет гомотопическим расслоением.

Иначе говоря, свойство быть гомотопическим расслоением инвариантно по отношению к послонным гомотопическим эквивалентностям.

Доказательство. По условию существуют такие отображения $f: E \rightarrow E'$, $g: E' \rightarrow E$ над B , что $f \circ g \sim_B \text{id}$ и $g \circ f \sim_B \text{id}$. Они позволяют каждую диаграмму вида (2) дополнить до коммутативной диаграммы



Поскольку отображение p' является гомотопическим расслоением, для составной диаграммы



существует замыкающее отображение $\bar{F}': X \times I \rightarrow E'$, для которого $p' \circ \bar{F}' = F$ и $\bar{F}' \circ \sigma_0 \sim_B f \circ \bar{f}$. Но тогда отображение $\bar{F} = g \circ \bar{F}': X \times I \rightarrow E$ будет удовлетворять соотношениям $p \circ \bar{F} = p \circ g \circ \bar{F}' = p' \circ \bar{F}' = F$ и $F \circ \sigma_0 \sim_B g \circ f \circ \bar{f} \sim_B \bar{f}$, т. е. будет замыкать диаграмму (3) в $[\text{TOP}_B]$. $\square$

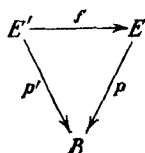
Замечание 2. Соотношение $f \circ g \underset{B}{\sim} \text{id}$ в доказательстве леммы 1 не используется.

Замечание 3. Гомотопическое расслоение $(I \times \{0\}) \cup \{0\} \times I \rightarrow I$ послойно гомотопически эквивалентно тождественному расслоению $I \rightarrow I$. Это показывает, что для расслоений аналог леммы 1 неверен.

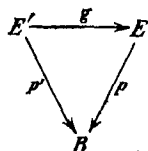
Справедливость леммы 1 для гомотопических расслоений и является для нас *raison d'être* этого понятия.

Важные обстоятельства, касающиеся гомотопических (а потому и обыкновенных) расслоений, выявляются в связи с вопросами о надъективности на морфизмах функтора (1) (при $B_0 = B$).

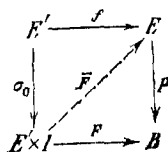
Для любых двух объектов $p': E' \rightarrow B$ и $p: E \rightarrow B$ категории TOP_B утверждение, что этот функтор надъективен для морфизмов из p' в p , означает, что для любой гомотопически коммутативной диаграммы вида



отображение f гомотопно отображению $g: E' \rightarrow E$ над B , т. е. отображению, для которого диаграмма



коммутативна. Оказывается, что это заведомо так, если отображение $p: E \rightarrow B$ является расслоением (хотя бы гомотопическим). Действительно, в этом случае в диаграмме



где F — гомотопия, связывающая отображения $p \circ f$ и p' , существует накрывающая гомотопия $\bar{F}$, для которой $\bar{F} \circ \sigma_0 \underset{B}{\sim} f$, и потому отображение $g = \bar{F} \circ \sigma_1$ будет гомотопно отображению f (ибо $\bar{F} \circ \sigma_1 \underset{B}{\sim} \bar{F} \circ \sigma_0$) и будет обладать тем свойством, что $p \circ g = p \circ \bar{F} \circ \sigma_1 = F \circ \sigma_1 = p'$. $\square$

Отсюда, в частности, следует, что если гомотопическое расслоение $p: E \rightarrow B$ обладает сечением в категории $[TOP]$, то оно будет обладать сечением и в категории TOP , т. е., иными словами, если существует такое отображение $t: B \rightarrow E$, что $p \circ t \sim id$, то существует и такое отображение $s: B \rightarrow E$, что $p \circ s = id$ (достаточно применить доказанное утверждение к случаю, когда $E' = B$, $p' = id$ и $f = t$). $\square$

Следующая лемма выражает существенно более глубокий факт.

Лемма 2. Если отображение $p: E \rightarrow B$ является гомотопическим расслоением, то для любого отображения $f: E \rightarrow E$ над B , гомотопного (в TOP) тождественному отображению id_E , существует над B такое отображение $g: E \rightarrow E$, что $f \circ g \underset{B}{\sim} id$.

Доказательство. По условию существует гомотопия $F: E \times I \rightarrow E$, связывающая отображение f с отображением id . Поскольку $p \circ f = p$, гомотопия $p \circ F: E \times I \rightarrow B$ будет связывать отображение p с самим собой. Поэтому диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{id} & E \\
 \sigma_0 \downarrow & \nearrow \bar{F} & \downarrow p \\
 E \times I & \xrightarrow{p \circ F} & B
 \end{array}$$

будет коммутативна, и, следовательно, для нее будет существовать гомотопия $\bar{F}: E \times I \rightarrow E$, накрывающая гомотопию $p \circ F$ и такая, что $\bar{F} \circ \sigma_0 \underset{B}{\sim} id$. Так как ввиду равенства $p \circ \bar{F} \circ \sigma_1 = p \circ F \circ \sigma_1 = p$ отображение $g = \bar{F} \circ \sigma_1: E \rightarrow E$ является отображением над B , то лемма 4 будет доказана, если мы покажем, что для этого отображения имеет место соотношение

$$f \circ g \underset{B}{\sim} id.$$

С этой целью мы введем в рассмотрение гомотопию $H: E \times I \rightarrow E$, определенную формулой

$$H(x, t) = \begin{cases} (f \circ \bar{F})(x, 1-4t), & \text{если } 0 \leq t \leq 1/4, \\ (f \circ G)(x, 4t-1), & \text{если } 1/4 \leq t \leq 1/2, \\ f(x), & \text{если } 1/2 \leq t \leq 3/4, \\ F(x, 4t-3), & \text{если } 3/4 \leq t \leq 1, \end{cases} \quad x \in E,$$

где $G: E \times I \rightarrow E$ — гомотопия над B , связывающая отображение $\bar{F} \circ \sigma_0$ с отображением id_E . Гомотопия H связывает отображение $f \circ g$ с отображением id_E , но не является гомотопией над B , поскольку

$$(p \circ H)(x, t) = \begin{cases} (p \circ F)(x, 1-4t), & \text{если } 0 \leq t \leq 1/4, \\ p(x), & \text{если } 1/4 \leq t \leq 3/4, \\ (p \circ F)(x, 4t-3), & \text{если } 3/4 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

тогда как для гомотопии над B равенство $(p \circ H)(x, t) = p(x)$ должно иметь место для всех точек $(x, t) \in E \times I$.

Чтобы исправить дело, мы рассмотрим отображение $\Phi: E \times I \times I \rightarrow B$, определенное формулой

$$\Phi(x, t, \tau) = \begin{cases} (p \circ F)(x, 1-4t(1-\tau)), & \text{если } 0 \leq t \leq \alpha(\tau), \\ p(x), & \text{если } \alpha(\tau) \leq t \leq \beta(\tau), \\ (p \circ F)(x, 1-4(1-t)(1-\tau)), & \text{если } \beta(\tau) \leq t \leq 1, \end{cases}$$

где $x \in E$, $0 \leq t, \tau \leq 1$ и

$$\alpha(\tau) = \min \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4(1-\tau)} \right), \quad \beta(\tau) = \max \left(\frac{1}{2}, \frac{3-4\tau}{4(1-\tau)} \right).$$

Непосредственная проверка показывает, что отображение Φ непрерывно и что

$$\Phi(x, t, 0) = (p \circ H), \quad (x, t), (x, t) \in E \times I,$$

т. е. что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E \times I & \xrightarrow{H} & E \\ \downarrow \sigma_0 & \searrow \bar{\Phi} & \downarrow p \\ E \times I \times I & \xrightarrow{\Phi} & B \end{array}$$

Поэтому существует отображение $\bar{\Phi}: E \times I \times I \rightarrow E$, накрывающее отображение Φ и такое, что $H \sim \bar{\Phi} \circ \sigma_0$.

Поскольку, как легко видеть, для любой точки $x \in E$ и любых $t, \tau \in I$ имеют место равенства

$$\Phi(x, 0, \tau) = \Phi(x, t, 1) = \Phi(x, 1, \tau) = p(x),$$

из того, что $\bar{\Phi}$ накрывает Φ , следует, что соответствия

$$(x, x) \mapsto \bar{\Phi}(x, 0, \tau), (x, t) \mapsto \bar{\Phi}(x, t, 1), (x, \tau) \mapsto \bar{\Phi}(x, 1, \tau)$$

определяют гомотопии над B , композиция которых связывает отображение $\bar{\varphi}_0: x \mapsto \bar{\Phi}(x, 0, 0) = (\bar{\Phi} \circ \sigma_0)(x, 0)$ с отображением $\bar{\varphi}_1: x \mapsto \bar{\Phi}(x, 1, 0) = (\bar{\Phi} \circ \sigma_0)(x, 1)$. Таким образом, $\bar{\varphi}_0 \sim_B \bar{\varphi}_1$.

С другой стороны, если $\Psi: E \times I \times I \rightarrow E$ — гомотопия над B , связывающая H с $\bar{\Phi} \circ \sigma_0$, то гомотопия $(x, \tau) \mapsto \Psi(x, 0, \tau)$ будет гомотопией над B , связывающей отображение $x \mapsto H(x, 0) = (f \circ g)(x)$ с отображением $x \mapsto \Psi(x, 0, 1) = \bar{\Phi}(x, 0, 0) = \bar{\varphi}_0(x)$, а гомотопия $(x, \tau) \mapsto \Psi(x, 1, \tau)$ будет гомотопией над B , связывающей отображение $x \mapsto H(x, 1) = x$ с отображением $x \mapsto \Psi(x, 1, 1) = \bar{\Phi}(x, 1, 0) = \bar{\varphi}_1(x)$.

Таким образом, $f \circ g \sim_B \bar{\varphi}_0$ и $\text{id}_E \sim_B \bar{\varphi}_1$.

Следовательно,

$$f \circ g \sim_B \bar{\varphi}_0 \sim_B \bar{\varphi}_1 \sim_B \text{id}_E,$$

и лемма 2 доказана. $\square$

Непосредственным следствием леммы 2 является следующее предложение, утверждающее, что послойное отображение расслоений (хотя бы гомотопических), является гомотопической эквивалентностью.

Предложение 1. Для любых гомотопических расслоений $p': E' \rightarrow B$ и $p: E \rightarrow B$ каждое отображение $f: E' \rightarrow E$ над B , являющееся гомотопической эквивалентностью, будет гомотопической эквивалентностью над B .

Доказательство. По условию существует такое непрерывное отображение $f': E \rightarrow E'$, что $f \circ f' \sim \text{id}$ и $f' \circ f \sim \text{id}$. При этом мы можем считать (заменив, если нужно, отображение f' гомотопным отображением), что f' является отображением над B . Тогда отображение $f \circ f'$:

$E \rightarrow E$ будет удовлетворять всем условиям леммы 2 и, значит, будет существовать такое отображение $f'': E \rightarrow E$ над B , что $(f \circ f') \circ f'' \underset{B}{\sim} \text{id}$. Следовательно, положив $g = f' \circ f''$, мы получим такое отображение $g: E \rightarrow E'$ над B , что $f \circ g \underset{B}{\sim} \text{id}$.

Поскольку отображение g также является гомотопической эквивалентностью, к нему применимо то же построение. Следовательно, над B существует такое отображение $h: E' \rightarrow E$, что $g \circ h \underset{B}{\sim} \text{id}$. Но тогда

$$h \underset{B}{\sim} (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) \underset{B}{\sim} f,$$

и потому $g \circ f \underset{B}{\sim} \text{id}$.

Таким образом, f является гомотопической эквивалентностью над B с обратной эквивалентностью g . $\square$

Следствие 1. Любое гомотопическое расслоение $p': E' \rightarrow B$ послойно гомотопически эквивалентно обыкновенному расслоению.

Доказательство. Согласно следствию леммы 6 лекции 2 отображение p' разлагается в композицию $p \circ i$ гомотопической эквивалентности $i: E' \rightarrow E$ и расслоения $p: E \rightarrow B$, где E — коцилиндр $\text{Cocyl}(p')$ отображения p' . Поскольку равенство $p' = p \circ i$ означает, что гомотопическая эквивалентность i является отображением над B гомотопического расслоения $p': E' \rightarrow B$ в расслоение $p: E \rightarrow B$ (рассматриваемых как объекты категории TOP_B), к ней применимо предложение 1. Следовательно, эта гомотопическая эквивалентность будет гомотопической эквивалентностью над B . $\square$

Другое важное применение предложения 1 относится к отображениям $p: E \rightarrow B$, являющимся, как отображения над B , гомотопическими эквивалентностями над B . Для таких отображений обратная эквивалентность $i: B \rightarrow E$, являясь отображением над B , автоматически будет сечением отображения p и, значит, монеоморфизмом. Вложив посредством этого монеоморфизма B в E , мы получим из p деформационную ретракцию над B . В этом смысле *каждое отображение $p: E \rightarrow B$, являющееся гомотопической эквивалентностью над B , будет и деформационной ретракцией над B .*

Отображения $p: E \rightarrow B$, являющиеся гомотопическими эквивалентностями над B , мы будем называть *коллапсирующими отображениями*. Согласно сказанному они представляют собой такие деформационные ретракции $p: E \rightarrow B$, что при гомотопии, связывающей отображения id и $i \circ p$, каждая точка $x \in E$ движется к точке $p(x) \in B$ по множеству $p^{-1}(p(x))$.

Замечание 4. Понятие коллапсирующего отображения двойственно понятию строгой деформационной ретракции.

По определению каждое отображение $p: E \rightarrow B$ представляет собой морфизм категории ТОР_B самого этого отображения, рассматриваемого как объект категории ТОР_B в объект $\text{id}: B \rightarrow B$. Поэтому коллапсирующее отображение $p: E \rightarrow B$ гомотопически эквивалентно над B расслоению id . Значит, в силу леммы 1 оно является гомотопическим расслоением. Кроме того, оно, конечно, будет и гомотопической эквивалентностью.

Обратно, пусть $p: E \rightarrow B$ — гомотопическое расслоение, являющееся гомотопической эквивалентностью. Поскольку это отображение является также отображением над B гомотопических расслоений (его самого в расслоение id), к нему применимо предложение 1, согласно которому оно будет гомотопической эквивалентностью над B , т. е. коллапсирующим отображением.

Тем самым доказано, что *отображение $p: E \rightarrow B$ тогда и только тогда является коллапсирующим, когда оно является гомотопическим расслоением и одновременно гомотопической эквивалентностью.*

Далее, легко видеть, что *любое коллапсирующее отображение $p: E \rightarrow B$ мягко* (удовлетворяет аксиоме **МРС** из Дополнения к лекции 1). Действительно, если U — функциональная окрестность в B подмножества $A \subset B$ и $\bar{s}: U \rightarrow E$ — произвольное сечение отображения p над U , то (в не ограничивающем общности предположении, что окрестность U замкнута) формула

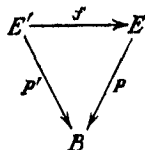
$$s(x) = \begin{cases} F(\bar{s}(x), \varphi(x)), & \text{если } x \in U, \\ i(x), & \text{если } \varphi(x) = 1, \end{cases}$$

где $i: B \rightarrow E$ — сечение отображения p , являющееся обратной гомотопической эквивалентностью над B , F — гомотопия $E \times I \rightarrow E$ над B , связывающая отображение $i \circ p$ с отображением id , а φ — такая функция $B \rightarrow I$, что $\varphi = 0$

на A и $\varphi = 1$ вне U , корректно определяет сечение $s: B \rightarrow E$ отображения p , совпадающее на A с сечением $\bar{s}$. $\square$

Теперь мы можем доказать важную теорему Дольда, утверждающую локальный характер понятия послойной гомотопической эквивалентности.

Пусть $p': E' \rightarrow B$ и $p: E \rightarrow B$ — произвольные отображения (объекты категории TOP_B), и пусть $f: E' \rightarrow E$ — отображение над B из p' в p :

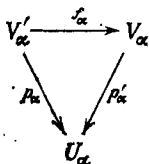


Пусть, далее, $\{U_\alpha, \alpha \in A\}$ — нумерируемое покрытие пространства B , и пусть $\{V'_\alpha\}$ и $\{V_\alpha\}$ — его прообразы при отображениях p' и p соответственно (являющиеся, как мы знаем, нумерируемыми покрытиями соответственно пространств E' и E).

Тогда для любого $\alpha \in A$ отображение f будет индуцировать некоторое отображение

$$f_\alpha: V'_\alpha \rightarrow V_\alpha,$$

замыкающее коммутативную диаграмму



$$p'_\alpha = p'|_{V'_\alpha}, \quad p_\alpha = p|_{V_\alpha},$$

т. е. являющееся отображением над U_α .

Если f является послойной гомотопической эквивалентностью (над B), то f_α также, очевидно, будут послойными гомотопическими эквивалентностями (над U_α): обратные эквивалентности $g_\alpha: V_\alpha \rightarrow V'_\alpha$ будут при этом индуцироваться обратной эквивалентностью $g: E \rightarrow E'$. Оказывается, что обратное утверждение также верно.

Теорема 1. Если для любого $\alpha \in A$ отображение $f_\alpha: V'_\alpha \rightarrow V_\alpha$ является послойной гомотопической эквивалентностью, то отображение $f: E' \rightarrow E$ также будет послойной гомотопической эквивалентностью.

Доказательство. Как было замечено в начале этого Дополнения, отображение f над B разлагается в композицию гомотопической эквивалентности $i: E' \rightarrow \text{Cocyl}_B(f)$ над B и расслоения $\bar{f}: \text{Cocyl}_B(f) \rightarrow E$ над B :

$$f: E' \xrightarrow{i} \text{Cocyl}_B(f) \xrightarrow{\bar{f}} E$$

(мы обозначаем расслоение символом $\bar{f}$, поскольку прежний символ p у нас сейчас занят). Аналогичное разложение

$$f_\alpha: V'_\alpha \xrightarrow{i'_\alpha} \text{Cocyl}_{U_\alpha}(f_\alpha) \xrightarrow{\bar{f}_\alpha} V_\alpha$$

допускает, конечно, и каждое отображение f_α . При этом коцилиндр $\text{Cocyl}_{U_\alpha}(f)$ естественным образом отождествляется с прообразом множества U_α при проекции $\text{Cocyl}_B(f) \rightarrow B$, $(x, u) \mapsto p(x)$, а отображение $\bar{f}_\alpha$ — с ограничением отображения $\bar{f}$ на этом прообразе.

Так как по условию отображения f_α являются гомотопическими эквивалентностями, то отображения f_α также будут гомотопическими эквивалентностями и потому, являясь расслоениями, будут коллапсирующими, а значит, и мягкими отображениями. Поскольку покрытие $\{V_\alpha\}$ нумерируемо и $V'_\alpha = f_\alpha^{-1}(V_\alpha)$ для каждого $\alpha \in A$, откуда в силу леммы 2 Дополнения к лекции 1 следует, что отображение $\bar{f}$ также мягко и потому обладает сечением $\bar{f}': E \rightarrow \text{Cocyl}_B(f)$, автоматически являющимся отображением над B . Поэтому отображение $g = j \circ \bar{f}'$, где j — гомотопическая эквивалентность $\text{Cocyl}_B(f) \rightarrow E'$, обратная к эквивалентности i , будет отображением над B , удовлетворяющим соотношению

$$f \circ g = \bar{f} \circ i \circ j \circ \bar{f}' \underset{B}{\sim} \bar{f} \circ \bar{f}' = \text{id}.$$

Кроме того, отображение g будет каждое множество V_α переводить в множество V'_α и, значит, будет индуцировать некоторое отображение $g_\alpha: V_\alpha \rightarrow V'_\alpha$, удовлетворяющее, очевидно, соотношению $f_\alpha \circ g_\alpha \underset{U_\alpha}{\sim} \text{id}$ и потому являющееся

гомотопической эквивалентностью над B , обратной к гомотопической эквивалентности $f_\alpha: V'_\alpha \rightarrow V_\alpha$.

Мы видим, следовательно, что отображение g удовлетворяет тем же условиям, что и отображение f (с перестановкой E и E'). Поэтому, по уже доказанному, существ-

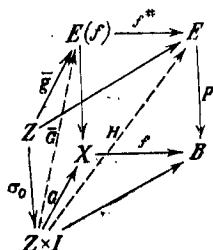
Будет такое отображение $h: E' \rightarrow E$, что $g \circ h \underset{B}{\sim} \text{id}$. Но тогда $h \underset{B}{\sim} f \circ g \circ h \underset{B}{\sim} f$, и, значит, $g \circ f \underset{B}{\sim} \text{id}$.

Таким образом, $f \circ g \underset{B}{\sim} \text{id}$ и $g \circ f \underset{B}{\sim} \text{id}$, так что f является гомотопической эквивалентностью над B . $\square$

Из лекции 1 мы знаем, что для любого расслоения $p: E \rightarrow B$ и любого непрерывного отображения $f: X \rightarrow B$ индуцированное отображение

$$p_f: E(f) \rightarrow X,$$

где для упрощения формул через $E(f)$ обозначена коамальтама $E \sqcup_f X$, также является расслоением. Легко видеть, что это утверждение остается в силе и для гомотопических расслоений, т. е. для любого гомотопического расслоения $p: E \rightarrow B$ отображение $p_f: E(f) \rightarrow X$ также является гомотопическим расслоением. Действительно, рассуждая, как и в лекции 1, рассмотрим произвольную диаграмму вида



Поскольку $p: E \rightarrow B$ является гомотопическим расслоением, существует такое отображение $H: Z \times I \rightarrow E$, что $p \circ H = f \circ G$ и $H \circ \sigma_0 \underset{B}{\sim} f \circ \bar{g}$ над B . Равенство $p \circ H = f \circ G$ означает, что пара (H, G) представляет собой обратный конус над парой (p, f) . Поэтому существует единственное отображение $\bar{G}: Z \times I \rightarrow E(f)$, для которого $f \circ \bar{G} = H$ и $p \circ \bar{G} = G$. Аналогично, если $h_t: Z \rightarrow E$ — гомотопия над B , связывающая отображения $H \circ \sigma_0$ и $f \circ \bar{g}$, то для любого $t \in I$ будет иметь место равенство $p \circ h_t = f \circ G \circ \sigma_0$, показывающее, что пара $(h_t, G \circ \sigma_0)$ является обратным конусом над парой (p, f) . Поэтому существует единственное отображение $\bar{h}_t: Z \rightarrow E(f)$, для которого $f \circ \bar{h}_t = h_t$ и $p \circ \bar{h}_t = G \circ \sigma_0$. Отображения $\bar{h}_t$ составляют гомотопию (почему?)

из Z в $E(f)$. Так как $f^* \circ \bar{h}_0 = h_0 = H_0 \circ \sigma_0 = f^* \circ \bar{G} \circ \sigma_0$ и $p_f \circ \bar{h}_0 = G \circ h_0 = p_f \circ \bar{G} \circ \sigma_0$, то в силу единственности $\bar{h}_0 = \bar{G} \circ \sigma_0$. Аналогично, так как $f^* \circ \bar{h}_1 = h_1 = f^* \circ \bar{g}$ и $p_f \circ \bar{h}_1 = G \circ \sigma_0 = p_f \circ \bar{g}$, то $\bar{h}_1 = \bar{g}$. Наконец, поскольку $p_f \circ \bar{h}_t = G \circ \sigma_0 = p_f \circ \bar{h}_0$, гомотопия $\bar{h}_t$ является гомотопией над X . Таким образом, $p_f \circ \bar{G} = G$ и $\bar{G} \circ \sigma_0 \sim \bar{g}$ над X , как и требуется. $\square$

Сравним теперь расслоение $p_f: E(f) \rightarrow X$ с расслоением $p_g: E(g) \rightarrow X$, где g — отображение $X \rightarrow B$, гомотопное отображению f .

С этой целью мы предварительно рассмотрим произвольное гомотопическое расслоение $p: E \rightarrow B_0 \times I$ с базой вида $B_0 \times I$. Пусть $E_0 = p^{-1}(B_0 \times 0)$ и $p_0: E_0 \rightarrow B_0$ — ограничение отображения p на E_0 (мы отождествляем $B_0 \times 0$ с B_0). Пусть, далее, $i_0: E_0 \rightarrow E$ — вложение.

Мы будем считать E_0 и E пространствами над B_0 с проекциями p_0 и $\text{pr}_{B_0} \circ p$ соответственно. Тогда i_0 будет, очевидно, отображением над B_0 .

Лемма 3. Отображение i_0 является гомотопической эквивалентностью над B_0 .

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\text{id}} & E \\ \sigma_0 \downarrow & \nearrow \bar{F} & \downarrow p \\ E \times I & \xrightarrow{F} & B_0 \times I \end{array}$$

отображение F которой определено формулой

$$F(e, t) = (b, \tau(1-t)), \quad \text{если } p(e) = (b, \tau), \\ e \in E, \quad b \in B_0, \quad \tau, t \in I.$$

Поскольку отображение p является по условию гомотопическим расслоением, для этой диаграммы существует накрывающая ($p \circ \bar{F} = F$) гомотопия $\bar{F}: E \times I \rightarrow E$, обладающая тем свойством, что $\text{id} \sim \bar{F} \circ \sigma_0$ над $B_0 \times I$, а значит, и над B_0 . При этом ясно, что гомотопия $\bar{F}$ является гомотопией над B_0 , так что $\bar{F} \circ \sigma_0 \sim \bar{F} \circ \sigma_1$ над B_0 . Следовательно, $\text{id} \sim \bar{F} \circ \sigma_1$ над B_0 . Но, так как $p \circ \bar{F} \circ \sigma_1 = F \circ \sigma_1: e \mapsto (b, 0)$, если $p(e) = (b, \tau)$, то $(\bar{F} \circ \sigma_1)(E) \subset E_0$ и, значит, $\bar{F} \circ \sigma_1 = i_0 \circ r$, где $r: E \rightarrow E_0$ — некоторое отображение над B_0 .

Таким образом, мы построили такое отображение $r: E \rightarrow E_0$, что $i_0 \circ r \sim \text{id}$ над B_0 . Поэтому для завершения доказательства леммы осталось лишь показать, что $r \circ i_0 \sim \text{id}$ над B_0 .

Поскольку гомотопия, связывающая отображения id_B и $\bar{F} \circ \sigma_0$, является гомотопией над $B_0 \times I$, она индуцирует некоторую гомотопию из E_0 в E_0 над B_0 , связывающую отображение id_{E_0} с отображением $(\bar{F} \circ \sigma_0)_0: E_0 \rightarrow E_0$, индуцированным отображением $\bar{F} \circ \sigma_0$. С другой стороны, если $e \in E_0$, т. е. $p(e) = (b, 0)$, то по построению $F(e, t) = (b, 0)$ и, значит, $(p \circ \bar{F})(e, t) = (b, 0)$, т. е. $\bar{F}(e, t) \in E_0$ для любого $t \in I$. Поэтому гомотопия $\bar{F}$ также индуцирует некоторую гомотопию из E_0 в E_0 над B_0 , связывающую отображение $(\bar{F} \circ \sigma_0)_0$ с отображением $(\bar{F} \circ \sigma_1)_0: E_0 \rightarrow E_0$, индуцированным отображением $\bar{F} \circ \sigma_1$. Следовательно, $\text{id} \sim (\bar{F} \circ \sigma_1)_0$ над B_0 .

Но тот факт, что отображение $(\bar{F} \circ \sigma_1)_0$ индуцировано отображением $\bar{F} \circ \sigma_1$, означает, что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E_0 & \xrightarrow{(\bar{F} \circ \sigma_1)_0} & E_0 \\ i \downarrow & & \downarrow i \\ E & \xrightarrow{\bar{F} \circ \sigma_1} & E \end{array}$$

Следовательно, $i_0 \circ (\bar{F} \circ \sigma_1)_0 = (\bar{F} \circ \sigma_1)_0 \circ i_0 = i_0 \circ r \circ i_0$, и потому $(\bar{F} \circ \sigma_1)_0 = r \circ i_0$. Значит, $r \circ i_0 \sim \text{id}$ над B_0 . $\square$

Замечание 5. Ясно, что аналогичное утверждение верно и для вложения $i_1: E_1 \rightarrow E$, где $E_1 = p^{-1}(B_0 \times 1)$.

Мы применим лемму 3 к гомотопическому расслоению $p_F: E(F) \rightarrow X \times I$, индуцированному посредством некоторой гомотопии $F: X \times I \rightarrow B$ из гомотопического расслоения $p: E \rightarrow B$. Если F связывает отображение $f: X \rightarrow B$ с отображением $g: X \rightarrow B$, то, как непосредственно вытекает из функториального свойства коамальгам, расслоение $(p_F)_0: E(F)_0 \rightarrow X$ для расслоения p_F совпадает с расслоением $p_f: E(f) \rightarrow X$ (так что, в частности, $E(F)_0 = E(f)$), а расслоение $(p_F)_1: E(F)_1 \rightarrow X$ совпадает с расслоением $p_g: E(g) \rightarrow X$. Таким образом, согласно лемме 3 имеют место гомотопические эквивалентности над X

$$E(f) \xrightarrow{i_0} E(F) \xleftarrow{i_1} E(g).$$

Следовательно, гомотопические расслоения $p_f: E(f) \rightarrow X$ и $p_g: E(g) \rightarrow X$ гомотопически эквивалентны над X .

Этим доказано следующее предложение.

Предложение 2. Гомотопические расслоения $p_f: E(f) \rightarrow X$ и $p_g: E(g) \rightarrow X$, индуцированные из гомотопического расслоения $p: E \rightarrow B$ гомотопными отображениями $f, g: X \rightarrow B$, послойно гомотопически эквивалентны. $\square$

Послойная гомотопическая эквивалентность, связывающая расслоения p_f и p_g , однозначно с точностью до послойной гомотопии определяется гомотопией F , связывающей отображения f и g . Мы будем обозначать ее символом $p(F)$.

По определению индуцированного расслоения для каждого отображения $f: X \rightarrow B$ определено отображение $f^\#: E(f) \rightarrow E$, для которого диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E(f) & \xrightarrow{f^\#} & E \\ p_f \downarrow & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

коммутативна. При этом ясно, что для любой гомотопии $F: X \times I \rightarrow B$, связывающей отображение f с отображением g , ограничения $(F^\#)_0 = F^\# \circ i_0$ и $(F^\#)_1 = F^\# \circ i_1$ отображения $F^\#: E(F) \rightarrow E$ на соответственно подпространствах $E(F)_0 = E(f)$ и $E(F)_1 = E(g)$ совпадают с отображениями $f^\#$ и $g^\#$, так что диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} E(f) & \xrightarrow{i_0} & E(F) & \xleftarrow{i_1} & E(g) \\ & \searrow f^\# & \downarrow F^\# & \swarrow g^\# & \\ & & E & & \end{array}$$

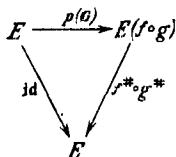
коммутативна. Для гомотопической эквивалентности $p(F)$ отсюда следует, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E(f) & \xrightarrow{p(F)} & E(g) \\ & \searrow f^\# & \swarrow g^\# \\ & & E \end{array}$$

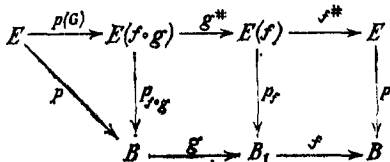
гомотопически коммутативна.

(Утверждение о гомотопической коммутативности является наилучшим возможным, поскольку отображение $p(F)$ определено с точностью до гомотопии.)

Пусть теперь $f: B_1 \rightarrow B$ — гомотопическая эквивалентность с обратной гомотопической эквивалентностью $g: B \rightarrow B_1$, и пусть $G: B \times I \rightarrow B$ — такая гомотопия, что $G: \text{id} \sim f \circ g$. Поскольку, как мы знаем (см. лекцию 1), $\text{id}^\# = \text{id}$ и $(f \circ g)^\# = f^\# \circ g^\#$, для композиции $f^\# \circ g^\#$ отображений $f^\#: E(f) \rightarrow E$ и $g^\#: E(f \circ g) \rightarrow E(f)$ имеет место гомотопически коммутативная диаграмма



означающая, что в диаграмме



композиция стрелок верхней строчки гомотопна тождественному отображению. Значит, $f^\# \circ g^\# \sim \hat{p}(G)$, где $\hat{p}(G)$ — гомотопическая эквивалентность, обратная к эквивалентности $p(G)$, а потому и $p(G) \circ f^\# \circ g^\# \sim p(G) \circ \hat{p}(G) \sim \text{id}$. Этим доказано, что существуют такие отображения $\varphi: E(f) \rightarrow E(f \circ g)$ и $\psi: E \rightarrow E(f)$ (а именно, отображения $\varphi = p(G) \circ f^\#$ и $\psi = g^\# \circ p(G)$), что $\varphi \circ g^\# \sim \text{id}$ и $f^\# \circ \psi \sim \text{id}$.

Применив это утверждение к расслоению $p_f: E(f) \rightarrow B_1$ и к отображению $g \circ f$ (также по условию гомотопному тождественному отображению), мы, в частности, получим, что существует такое отображение $\psi_1: E(f) \rightarrow E(f \circ g)$, что $g^\# \circ \psi_1 \sim \text{id}$. Но тогда $\psi_1 \sim (\varphi \circ g^\#) \circ \psi_1 = \varphi \circ (g^\# \circ \psi_1) \sim \varphi$ и, значит, $g^\# \circ \varphi \sim \text{id}$. Таким образом, $g^\#$ является гомотопической эквивалентностью с обратной гомотопической эквивалентностью φ .

Поскольку $f^\# \circ g^\# \circ p(G) \sim \text{id}$, отсюда следует, что отображение $f^\#$ также является гомотопической эквивалентностью (с обратной гомотопической эквивалентностью $g^\# \circ p(G)$).

Тем самым доказано

Следствие 1. Если в диаграмме

$$\begin{array}{ccc} E(f) & \xrightarrow{f^\#} & E \\ p_f \downarrow & & \downarrow p \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

отображение f является гомотопической эквивалентностью, то отображение $f^\#$ также будет гомотопической эквивалентностью. $\square$

Другой интересный случай возникает, когда отображение f гомотопно постоянному отображению.

Следствие 2. Если отображение $f: X \rightarrow B$ гомотопно постоянному отображению $\text{const}: X \rightarrow B$, $x \mapsto b_0$, то для любого гомотопического расслоения $p: E \rightarrow B$ индуцированное расслоение $p_f: E(f) \rightarrow X$ послойно гомотопически эквивалентно тривиальному расслоению со слоем $F = p^{-1}(b)$.

Доказательство. По определению пространство $E(\text{const})$ состоит из пар $(x, e) \in X \times E$, для которых $p(e) = \text{const}(x) = b_0$, и, значит, является произведением $X \times F$. Отображение же $p_{\text{const}}: E(\text{const}) \rightarrow X$, $(x, e) \mapsto x$, будет, следовательно, проекцией $X \times F \rightarrow X$. $\square$

Пространство B называется *полулокально стягиваемым*, если любая его точка обладает такой окрестностью U , что вложение $U \rightarrow B$ гомотопно постоянному отображению. Расслоение $p: E \rightarrow B$ называется *гомотопически локально тривиальным*, если любая точка пространства B обладает такой окрестностью U , что расслоение $p_U: p^{-1}(U) \rightarrow U$ послойно гомотопически эквивалентно тривиальному расслоению $U \times F \rightarrow U$ (где F , вообще говоря, зависит от U).

Следствие 3. Если пространство B полулокально стягиваемо, то любое гомотопическое расслоение $p: E \rightarrow B$ гомотопически локально тривиально. $\square$

Индуктированные расслоения обладают свойством функториальности и по отношению к послойным отображениям, т. е. для каждого непрерывного отображения $f: X \rightarrow B$ любое послойное отображение $h: E \rightarrow E'$ индуцирует (по формуле $h_f(x, e) = (x, h(e))$) некоторое послойное отображение $h_f: E(f) \rightarrow E'(f)$, причем $h_{\text{id}} = \text{id}$, $h_{f \circ g} = h_f \circ h_g$ и, аналогично, $\text{id}_f = \text{id}$, $(h \circ k)_f = h_f \circ k_f$. Кроме того, для любой гомотопии $F: X \times I \rightarrow B$, связывающей отображение f с отображением g , ограничения $(h_F)_0 = h_F \circ i_0$ и $(h_F)_1 = h_F \circ i_1$ отображения h_F на соответственно подпространствах $E(F)_0 = E(f)$ и $E(F)_1 = E(g)$ совпадают с ото-

бражениями h_f и h_g , так что диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} E(f) & \xrightarrow{i_0} & E(F) & \xleftarrow{i_1} & E(g) \\ h_f \downarrow & & \downarrow h_F & & \downarrow h_g \\ E'(f) & \xrightarrow{i'_0} & E'(F) & \xleftarrow{i'_1} & E'(g) \end{array}$$

коммутативна. Поэтому диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E(f) & \xrightarrow{p(F)} & E(g) \\ h_f \downarrow & & \downarrow h_g \\ E'(f) & \xrightarrow{p'(F)} & E'(g) \end{array}$$

гомотопически коммутативна.

В частном случае, когда g представляет собой постоянное отображение $\text{const}: X \rightarrow B$, $x \mapsto b_0$, и, значит, расслоения $p_g: E(g) \rightarrow X$ и $p'_g: E'(g) \rightarrow X$ имеют соответственно вид $X \times F \rightarrow X$ и $X \times F' \rightarrow X$, отображение h_g задается соответствием $(x, y) \mapsto (x, h(y))$, $y \in F$, и потому будет послойной гомотопической эквивалентностью, если гомотопической эквивалентностью является отображение $h_{b_0}: F \rightarrow F'$, индуцированное отображением h . Но тогда послойной гомотопической эквивалентностью будет, конечно, и отображение h_f .

Мы сформулируем этот результат в виде отдельного следствия.

Следствие 4. Если отображение $f: X \rightarrow B$ гомотопно постоянному отображению $\text{const}: X \rightarrow B$, $x \mapsto b_0$, то для любого послойного отображения $h: E \rightarrow E'$ гомотопического расслоения $p: E \rightarrow B$ в гомотопическое расслоение $p': E' \rightarrow B$, обладающего тем свойством, что отображение $h_{b_0}: p^{-1}(b_0) \rightarrow p'^{-1}(b_0)$ является гомотопической эквивалентностью, отображение

$$h_f: E(f) \rightarrow E'(f)$$

индуцированных расслоений будет послойной гомотопической эквивалентностью. $\square$

Пространство B называется *нумерируемо полулокально стягиваемым*, если существует такое его нумерируемое покрытие $\{U_\alpha\}$, что для любого α вложение $U_\alpha \rightarrow B$ гомотопно постоянному отображению.

Говорят, что послойное отображение $h: E \rightarrow E'$ гомотопического расслоения $p: E \rightarrow B$ в гомотопическое расслоение $p': E' \rightarrow B$ является *гомотопической эквивалентностью на слоях*, если для любой точки $b \in B$ отображение $h_b: p^{-1}(b) \rightarrow p'^{-1}(b)$ представляет собой гомотопическую эквивалентность. Ясно, что любая послойная гомотопическая

эквивалентность будет гомотопической эквивалентностью на слоях. Для нумерируемо полулокально стягиваемого пространства B верно и обратное:

Предложение 3. Если пространство B нумерируемо полулокально стягиваемо, то любое послойное отображение $h: E \rightarrow E'$ гомотопического расслоения $p: E \rightarrow B$ в гомотопическое расслоение $p': E' \rightarrow B$, являющееся гомотопической эквивалентностью на слоях, будет послойной гомотопической эквивалентностью.

Доказательство. Пусть $\{U_\alpha\}$ — такое нумерируемое покрытие пространства B , что для любого α вложение $U_\alpha \rightarrow B$ гомотопно постоянному отображению. Тогда согласно следствию 4 каждое отображение

$$h_{U_\alpha}: p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow p'^{-1}(U_\alpha)$$

будет послойной гомотопической эквивалентностью (напомним, что для любого множества $U \subset B$ расслоение $p_U = p|_{p^{-1}(U)}: p^{-1}(U) \rightarrow U$ совпадает с расслоением $p_i: E(i) \rightarrow U$, индуцированным вложением $i: U \rightarrow B$). Поэтому, согласно теореме 1, отображение $h: E \rightarrow E'$ также будет послойной гомотопической эквивалентностью. $\square$

Замечание 6. Для любой точки $b_0 \in B$ пространство $p^{-1}(b_0)$ является коамальгамой $E(f)$, соответствующей отображению $f: pt \rightarrow B$, переводящему точку pt в точку $b_0 \in B$. С другой стороны, каждый путь $u: I \rightarrow B$ пространства B мы можем рассматривать как гомотопию, связывающую отображения $pt \rightarrow B$, соответствующие точкам $b_0 = u(0)$ и $b_1 = u(1)$. Поэтому для отображений $h_{b_0}: p^{-1}(b_0) \rightarrow p'^{-1}(b_0)$ и $h_{b_1}: p^{-1}(b_1) \rightarrow p'^{-1}(b_1)$ имеет место гомотопически коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(b_0) & \longrightarrow & p^{-1}(b_1) \\ h_{b_0} \downarrow & & \downarrow h_{b_1} \\ p'^{-1}(b_0) & \longrightarrow & p'^{-1}(b_1) \end{array}$$

горизонтальные стрелки которой являются гомотопическими эквивалентностями. Значит, отображение h_{b_1} тогда и только тогда представляет собой гомотопическую эквивалентность, когда гомотопической эквивалентностью является отображение h_{b_0} . Следовательно, отображение $h: E \rightarrow E'$ тогда и только тогда является гомотопической эквивалентностью на слоях, когда в каждой компоненте связности пространства B существует такая точка b , что отображение $h_b: p^{-1}(b) \rightarrow p'^{-1}(b)$ представляет собой гомотопическую эквивалентность.

Гомотопически инвариантные функторы.— Функтор π_0 .— Представимые функторы.— Группы категории.— H -группы, H -моноиды и H -унитоиды (H -пространства).— Когруппы категории.— Категория TOP .— Категория $[\text{TOP}]$.— H -когруппы, H -комонотиды и H -коунитоиды.— Надстройки.— Приведенные надстройки.— Пространства петель.— Сопряженность функторов S' и Ω . Топологический моноид муровских петель.— Пространство петель является H -группой.

Как было объяснено в вводной лекции 0, главной задачей алгебраической топологии является построение и изучение различных алгебраических функторов Π , определенных на категории TOP , с целью последующего применения их к переработке геометрических задач в производные алгебраические задачи. Однако нам нужны не любые функторы. Поскольку мы имеем в виду рассматривать лишь геометрические задачи, постановка которых инвариантна по отношению к переходу к гомотопным отображениям (по разъясненным в лекции 0 «мощностным» аргументам только такие задачи могут рассчитывать на эффективное решение средствами алгебры), естественно ограничиваться *гомотопически инвариантными* функторами Π , обладающими тем свойством, что $\Pi f = \Pi g$, когда $f \sim g$, т. е., иными словами, являющимися композицией функтора факторизации $\text{TOP} \rightarrow [\text{TOP}]$ и некоторого функтора $\bar{\Pi}$, заданного на гомотопической категории $[\text{TOP}]$. (Вообще, более последовательно было бы покинуть категорию TOP и окончательно перейти в категорию $[\text{TOP}]$, но по чисто психологическим причинам мы предпочитаем оставаться в более привычной реальности категории TOP .) Поэтому мы сосредоточим наше внимание на методах построения лишь гомотопически инвариантных функторов.

Простейший пример гомотопически инвариантного функтора мы получим, рассмотрев для любого топологического пространства X множество $\pi_0 X$ всех его компонент. Так как для каждого непрерывного отображения $f: X \rightarrow Y$ компонента $[f(x)]$ пространства Y , содержащая точку $f(x)$, зависит, очевидно, лишь от компоненты $[x]$

пространства X , содержащей точку x , то соответствие

$$\pi_0 f: [x] \mapsto [f(x)]$$

корректно определяет некоторое отображение множеств $\pi_0 f: \pi_0 X \rightarrow \pi_0 Y$, и ясно, что тем самым мы получаем функтор

$$\pi_0: \text{TOP} \rightarrow \text{ENS}$$

из категории TOP в категорию множеств ENS, очевидным образом гомотопически инвариантный.

Соответствующий функтор $[\text{TOP}] \rightarrow \text{ENS}$ также обозначается символом π_0 .

Как мы уже отметили в лекции I, компоненты пространства X естественным образом отождествляются с гомотопическими классами отображений $\text{pt} \rightarrow X$, где pt — топологическое пространство, состоящее из одной точки. Следовательно, $\pi_0 X = [\text{pt}, X]$ и соответственно этому $\pi_0 [f]$ представляет собой не что иное, как отображение $f_*: [\text{pt}, X] \rightarrow [\text{pt}, Y]$, определенное формулой $[x] \mapsto [f \circ x]$, где $x: \text{pt} \rightarrow X$.

Эта интерпретация функтора π_0 допускает весьма далекое обобщение на любые категории $\mathbf{A}$. Именно, произвольно выбрав в категории $\mathbf{A}$ некоторый объект K , мы можем построить функтор K_* из $\mathbf{A}$ в ENS, сопоставляющий любому объекту X из $\mathbf{A}$ множество

$$K_*(X) = \mathbf{A}(K, X)$$

всех морфизмов $K \rightarrow X$, а любому морфизму $f: X \rightarrow Y$ из $\mathbf{A}$ отображение

$$K_*(f): K_*(X) \rightarrow K_*(Y)$$

(обозначаемое также символом f_K или f_*), определенное формулой

$$K_*(f)(\alpha) = f \circ \alpha, \quad \alpha: K \rightarrow X.$$

Аналогично, положив для любого объекта X из $\mathbf{A}$

$$K^*(X) = \mathbf{A}(X, K)$$

и сопоставив каждому морфизму $f: X \rightarrow Y$ из $\mathbf{A}$ отображение

$$K^*(f): K^*(Y) \rightarrow K^*(X)$$

(обозначаемое также символом f^* или f^K), определенное формулой

$$K^*(f)(\beta) = \beta \circ f \text{ для любого морфизма } \beta: Y \rightarrow K,$$

мы получим контравариантный функтор K^* из $\mathbf{A}$ в $\mathbf{ENS}$ (т. е. функтор из двойственной категории $\mathbf{A}^{\text{op}}$ в $\mathbf{ENS}$).

Получаемые этой конструкцией функторы называются *представимыми*. Об объекте K говорят, что он *представляет* функтор K_* (или функтор K^*).

Применительно к гомотопической категории этот общий прием позволяет по каждому топологическому пространству K построить два гомотопически инвариантных функтора

$$K_*: \mathbf{TOP} \rightarrow \mathbf{ENS}, \quad K^*: \mathbf{TOP}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{ENS},$$

представимых этим пространством (как функторы на $[\mathbf{TOP}]$). По определению

$$(1) \quad K_*(X) = [K, X], \quad K^*(X) = [X, K]$$

для любого топологического пространства X и

$$(2) \quad \begin{aligned} f_*(\alpha) &= [f \circ \alpha], & \alpha: K \rightarrow X, \\ f^*(\beta) &= [\beta \circ f], & \beta: Y \rightarrow K, \end{aligned}$$

для любого непрерывного отображения $f: X \rightarrow Y$.

При $K = \text{pt}$ мы получаем функтор π_0 .

В некоторых случаях при специальном выборе пространства K в множестве $[K, X]$ или $[X, K]$ удастся ввести алгебраическую структуру (группы, кольца и т. п.) так, чтобы получился функтор в соответствующую алгебраическую категорию. О таких функторах также говорят, что они *представлены* пространством K .

Оказывается, многие гомотопически инвариантные функторы алгебраической топологии (в том числе почти все контравариантные функторы) представимы. (Частично это объясняется теоремой Брауна о представимости, которую мы докажем в следующем семестре.) Поэтому на первых порах разумно ограничиться изучением лишь представимых функторов, определенных формулами (1) и (2).

Имеется очевидный случай, когда множество $K^*(X) = [X, K]$ обладает естественной (по X) структурой группы: это — случай, когда K представляет собой топологическую группу. Действительно, для любой топологической груп-

пы K и любого топологического пространства X множество $\text{TOP}(X, K)$ всех непрерывных отображений $X \rightarrow K$ очевидным образом является группой относительно операции умножения $(f, g) \mapsto fg$, определенной формулой

$$(3) \quad (fg)(x) = f(x)g(x), \quad x \in X, \quad f, g: X \rightarrow K.$$

Единицей этой группы служит постоянное отображение $\text{const}_e: X \rightarrow K$ в единицу e группы K , а элемент f^{-1} , обратный к элементу $f: X \rightarrow K$, определяется формулой

$$(4) \quad f^{-1}(x) = f(x)^{-1}$$

(не путать f^{-1} с обратным отображением!). Если $\{f_t\}: f_0 \sim f_1$ и $\{g_t\}: g_0 \sim g_1$, то $\{f_t g_t\}: f_0 g_0 \sim f_1 g_1$ и, значит, формула $[f][g] = [fg]$ корректно определяет в множестве $[X, K]$ умножение, по отношению к которому это множество является группой. При этом для любого непрерывного отображения $\varphi: X \rightarrow Y$ отображение $\varphi^*: [Y, K] \rightarrow [X, K]$, $[f] \mapsto [\varphi \circ f]$, будет, очевидно, гомоморфизмом.

Эта конструкция для наших целей безусловно слишком узка (что явствует, например, из того, что она дает слишком много — групповую структуру на множестве $\text{TOP}(X, K)$, совершенно нам не нужную), но она послужит нам отправной точкой для более широких обобщений. Для этого нужно осмыслить понятие группы с общих позиций теории категорий.

Умножение в группе K является не чем иным, как некоторым отображением

$$(5) \quad m: K \times K \rightarrow K, \quad (x, y) \mapsto xy,$$

прямого произведения $K \times K$ в K , а операция $x \mapsto x^{-1}$ перехода к обратному элементу — некоторым отображением

$$\mu: K \rightarrow K.$$

При этом тот факт, что элемент $e \in K$ является единицей группы K , означает, что для постоянного отображения $\text{const}_e: K \rightarrow K$, $x \mapsto e$, которое нам удобно обозначить символом e , составные отображения

$$\begin{aligned} K &\xrightarrow{\text{id} \times e} K \times K \xrightarrow{m} K, \quad x \mapsto (x, e) \mapsto xe, \\ K &\xrightarrow{e \times \text{id}} K \times K \xrightarrow{m} K, \quad x \mapsto (e, x) \mapsto ex, \end{aligned}$$

представляют собой тождественные отображения, т. е. что диаграммы

$$(6) \quad \begin{array}{ccc} & K \times K & \\ \text{id} \times e \nearrow & & \searrow m \\ K & \xrightarrow{\text{id}} & K \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & K \times K & \\ e \times \text{id} \nearrow & & \searrow m \\ K & \xrightarrow{\text{id}} & K \end{array}$$

коммутативны. (Здесь символом $\alpha \times \beta$, где $\alpha: X \rightarrow A$ и $\beta: X \rightarrow B$, мы обозначаем отображение $X \rightarrow A \times B$, определенное формулой $(\alpha \times \beta)(x) = (\alpha(x), \beta(x))$. В случае, когда $\alpha: X \rightarrow A$ и $\beta: Y \rightarrow B$, этот же символ будет у нас обозначать отображение $X \times Y \rightarrow A \times B$, определенное формулой $(\alpha \times \beta)(x, y) = (\alpha(x), \beta(y))$. Таким образом, при $X = Y$ возникает двусмысленность. Однако при известной внимательности она к недоразумениям не приводит.)

Аналогично, ассоциативность умножения (5) означает коммутативность $(m \circ (\text{id} \times m) = m \circ (m \times \text{id}))$ диаграммы

$$(7) \quad \begin{array}{ccc} K \times K \times K & \xrightarrow{\text{id} \times m} & K \times K \\ m \times \text{id} \downarrow & & \downarrow m \\ K \times K & \xrightarrow{m} & K \end{array}$$

а тождества $xx^{-1} = e$, $x^{-1}x = e$ — коммутативность диаграмм

$$(8) \quad \begin{array}{ccc} & K \times K & \\ \text{id} \times \mu \nearrow & & \searrow m \\ K & \xrightarrow{e} & K \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & K \times K & \\ \mu \times \text{id} \nearrow & & \searrow m \\ K & \xrightarrow{e} & K \end{array}$$

Пусть теперь $\mathbf{A}$ — произвольная категория. Напомним, что (прямым) произведением объектов A и B категории $\mathbf{A}$ называется такой объект C , рассматриваемый вместе с двумя морфизмами $\text{pr}_A: C \rightarrow A$, $\text{pr}_B: C \rightarrow B$, что для любого объекта $X \in \mathbf{A}$ и любых морфизмов $\alpha: X \rightarrow A$, $\beta: X \rightarrow B$ существует единственный морфизм $\gamma: X \rightarrow C$ обладающий тем свойством, что $\text{pr}_A \circ \gamma = \alpha$ и $\text{pr}_B \circ \gamma = \beta$. Объект C , если он существует, с точностью до канонического изоморфизма единствен. Он обозначается символом $A \times B$, а морфизм γ — символом $\alpha \times \beta$.

Аналогичным образом определяется произведение любого (в том числе и пустого!) семейства объектов категории $\mathbf{A}$. При этом произведением пустого семейства объектов

будет объект 0 , обладающий тем свойством, что для любого объекта $A \in \mathbf{A}$ существует один и только один морфизм $A \rightarrow 0$. Такой объект называется *терминальным объектом* категории $\mathbf{A}$. (Этот термин у нас уже встречался в лекции 1 в связи с понятием коамальгамы.)

Категория $\mathbf{A}$ называется *финитно мультипликативно замкнутой* (короче — *фм-замкнутой*), если для любого конечного семейства ее объектов существует их произведение. В частности, фм-замкнутая категория обладает терминальным объектом.

Морфизм $A \rightarrow B$ фм-замкнутой категории называется *постоянным*, если он пропускается через терминальный объект, т. е. является составным морфизмом вида $A \rightarrow 0 \rightarrow B$.

Примерами фм-замкнутых категорий могут служить категории $\mathbf{ENS}$, $\mathbf{TOP}$, $[\mathbf{TOP}]$ и $\mathbf{GROUPS}$. В каждой из этих категорий произведениями являются обыкновенные прямые произведения множеств, топологических пространств или групп, а терминальными объектами — одноэлементные множества, пространства или группы. Постоянными морфизмами этих категорий являются постоянные отображения (для категории групп — тривиальные гомоморфизмы).

Теперь ясно, что понятие группы может быть перенесено в произвольную фм-замкнутую категорию $\mathbf{A}$. Именно, объект K такой категории естественно называть *группой категории $\mathbf{A}$* (или *$\mathbf{A}$ -группой*), если для него заданы какие морфизмы $m: K \times K \rightarrow K$, $\mu: K \rightarrow K$, $\varepsilon: K \rightarrow K$, что:

а) морфизм ε постоянен;

б) диаграммы (6), (7) и (8) коммутативны.

Группы категории множеств $\mathbf{ENS}$ — это обыкновенные абстрактные группы, группы категории $\mathbf{TOP}$ — это топологические группы (а, скажем, группы категории $\mathbf{DIFF}$ гладких многообразий — это группы Ли).

Вопрос: каковы группы категории $\mathbf{GROUPS}$? Ср. с леммой 3 из Дополнения к лекции 4.

Очевидно, что аналогичную «категоризацию» допускают и другие алгебраические структуры. Например, *моноидом категории $\mathbf{A}$* (или *$\mathbf{A}$ -моноидом*), где $\mathbf{A}$ — произвольная фм-замкнутая категория, называется объект K категории $\mathbf{A}$, для которого заданы такой морфизм $m: K \times K \rightarrow K$ и такой постоянный морфизм $\varepsilon: K \rightarrow K$, что диаграммы (6) и (7) коммутативны.

В интересующих нас ситуациях условие ассоциативности (коммутативность диаграммы (7)) будет, как ни стран-

но, часто излишне. К сожалению, для соответствующей алгебраической структуры (умножения с единицей) до сих пор нет общепринятого названия. Мы множество, в котором задано умножение с единицей, будем называть *унитойдом* и соответственно этому для любой фм-замкнутой категории $\mathbf{A}$ будем называть *унитойдом категории $\mathbf{A}$* (или *$\mathbf{A}$ -унитойдом*) ее объект K , для которого задан такой морфизм $m: K \times K \rightarrow K$ и такой постоянный морфизм $e: K \rightarrow K$, что диаграммы (6) коммутативны.

Формула (3) в категорных обозначениях имеет вид

$$fg = m \circ (f \times g), \quad f, g: X \rightarrow K,$$

а формула (4)—вид

$$f^{-1} = \mu \circ f, \quad f: X \rightarrow K.$$

Эти формулы имеют смысл для любой $\mathbf{A}$ -группы K и любого объекта $X \in \mathbf{A}$ и, как автоматически проверяется, задают в множестве $\mathbf{A}(X, K)$ всех морфизмов $X \rightarrow K$ структуру группы. Единицей этой группы служит постоянный морфизм $X \rightarrow K$, являющийся композицией произвольного морфизма $\alpha: X \rightarrow K$ и морфизма $e: K \rightarrow K$ (и не зависящий, очевидно, от выбора морфизма α). Тривиальная проверка показывает при этом, что для любого морфизма $f: X \rightarrow Y$ категории $\mathbf{A}$ отображение $f^*: \beta \mapsto \beta \circ f$ из $\mathbf{A}(Y, K)$ в $\mathbf{A}(X, K)$ является гомоморфизмом групп и что соответствия $X \mapsto \mathbf{A}(X, K)$, $f \mapsto f^*$ задают функтор из категории $\mathbf{A}$ в категорию групп, т. е., иными словами, что структура группы в $\mathbf{A}(X, K)$ естественна по X .

Обратно, предположим, что для некоторого объекта K категории $\mathbf{A}$ все множества $\mathbf{A}(X, K)$, $X \in \mathbf{A}$, снабжены естественной по X структурой группы. Тогда, в частности, группой будет множество $\mathbf{A}(K \times K, K)$ всех морфизмов $K \times K \rightarrow K$. По определению, эта группа содержит два морфизма $\text{pr}_1: K \times K \rightarrow K$ и $\text{pr}_2: K \times K \rightarrow K$. Произведение этих морфизмов (как элементов группы $\mathbf{A}(K \times K, K)$) мы обозначим через m . Аналогично, множество $\mathbf{A}(K, K)$ также является группой. Мы примем за e единицу этой группы, а за μ —элемент, обратный к элементу $\text{id}: K \rightarrow K$. Равенства $\text{id} \cdot e = e \cdot \text{id} = \text{id}$ в группе $\mathbf{A}(K, K)$ в точности равносильны коммутативности диаграмм (6), а равенства $\text{id} \cdot \mu = \mu \cdot \text{id} = e$ —коммутативности диаграмм (8). Что же касается диаграммы (7), то ее коммутативность равносильна соотношению $\text{pr}_1 \cdot (\text{pr}_2 \cdot \text{pr}_3) = (\text{pr}_1 \cdot \text{pr}_2) \cdot \text{pr}_3$.

для элементов $pr_1, pr_2, pr_3: K \times K \times K \rightarrow K$ группы $A(K \times K \times K, K)$. Кроме того, из того, что отображение f^* для любого морфизма $f: X \rightarrow Y$ категории A является гомоморфизмом группы $A(Y, K)$ в группу $A(X, K)$ и потому переводит единицу первой группы в единицу второй группы, немедленно следует, что для любого морфизма $f: K \rightarrow K$ имеет место равенство $\varepsilon = \varepsilon \circ f$. В частности, это равенство имеет место для каждого постоянного морфизма $f: K \rightarrow K$ (существующего в силу непустоты группы $A(0, K)$), что возможно только тогда, когда сам морфизм ε постоянен. Таким образом, морфизмы m, μ и ε удовлетворяют всем условиям определения A -группы, так что по отношению к ним объект K является группой категории A . Наконец, как показывает очевидная автоматическая проверка, структура группы в каждом множестве $A(X, K)$, определяемая формулами (3) и (4), совпадает с заданной.

Этим доказано, что множества $A(X, K)$ тогда и только тогда обладают естественной по X структурой группы, когда объект K является группой категории A .

Ясно, что аналогичное утверждение справедливо и по отношению к моноидам и унитоидам.

Применительно к категории $[TOP]$ мы получаем, в частности, что множества $[X, K]$ тогда и только тогда обладают естественной по X структурой группы, моноида или унитоида, когда топологическое пространство K является группой, моноидом или унитоидом категории $[TOP]$.

Для групп категории $[TOP]$ морфизмы m, μ и ε являются по определению гомотопическими классами непрерывных отображений. Однако на практике оказывается удобно вместо этих классов рассматривать некоторые их представители (выбирая, конечно, в классе ε постоянное отображение const_e , где e — некоторая точка). Таким образом, мы приходим к концепции топологического пространства K , для которого заданы такие непрерывные отображения

$$m: K \times K \rightarrow K, \quad \mu: K \rightarrow K$$

и такая точка $e \in K$, что диаграммы (6), (7) и (8) (с $\varepsilon = \text{const}_e$) гомотопически коммутативны. Такого рода топологическое пространство мы будем называть H -группой (естественный термин «гомотопическая группа», к сожалению, занят).

Аналогично определяются Н-моноиды и Н-унитоиды. Впрочем, Н-унитоиды в топологии принято называть Н-пространствами. Несмотря на бесцветность этого термина (утвердившегося только из-за отсутствия в алгебре хорошего названия для множеств с умножением, обладающим единицей), мы, чтобы не порывать с традицией, также будем им пользоваться.

Для любых двух элементов x, y произвольного Н-пространства K элемент $m(x, y)$ обозначается обычно символом xu и называется *произведением* этих элементов. Аналогично (в случае, когда K является Н-группой), элемент $\mu(x)$ обозначается символом x^{-1} и называется элементом, *обратным* (или — более распространено — *гомотопически обратным*) к элементу x . Элемент e называется *гомотопической единицей*.

Согласно полученному выше общему утверждению для каждого Н-пространства K и любого топологического пространства X множество $[X, K]$ обладает естественной по X структурой унитоида (структурой моноида, если K является Н-моноидом, и структурой группы, если K является Н-группой). При этом умножение в $[X, K]$ определяется формулой

$$[f][g] = [h], \quad f, g: X \rightarrow K,$$

где h — отображение $X \rightarrow K$, определенное формулой (3), т. е. формулой

$$h(x) = f(x)g(x), \quad x \in X.$$

Единицей этого умножения является гомотопический класс $[\text{const}_e]$ постоянного отображения $\text{const}_e: X \rightarrow K$, а операция $[f] \mapsto [f]^{-1}$ задается (в случае, когда K является Н-группой) формулой $[f]^{-1} = [f^{-1}]$, где $f^{-1}: x \mapsto f(x)^{-1}$ для любой точки $x \in X$.

Ясно, что, заменив отображение m (а в случае Н-группы и отображение μ) произвольным гомотопным ему отображением, а элемент e — произвольным элементом, лежащим в той же компоненте связности, мы из данного Н-пространства (Н-моноида или Н-группы) снова получим Н-пространство (Н-моноид или Н-группу). Это Н-пространство (Н-моноид или Н-группа) называется *эквивалентным* исходному Н-пространству (Н-моноиду или Н-группе). Иными словами, два Н-пространства (Н-моноида или Н-группы) эквивалентны, если они определяют

один и тот же унитар (соответственно один и тот же моноид или одну и ту же группу) категории [TOP].

С точки зрения общей алгебры морфизмами Н-пространств (Н-моноидов и Н-групп) следует называть непрерывные отображения $f: K \rightarrow L$, для которых коммутативны диаграммы

$$(9) \quad \begin{array}{ccc} K \times K & \xrightarrow{f \times f} & L \times L \\ m \downarrow & & \downarrow m \\ K & \xrightarrow{f} & L \end{array} \quad \begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{f} & L \\ e \downarrow & & \downarrow e \\ K & \xrightarrow{f} & L \end{array}$$

а также—в случае Н-групп—диаграмма

$$(10) \quad \begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{f} & L \\ \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\ K & \xrightarrow{f} & L \end{array}$$

Мы будем такого рода отображения называть *алгебраическими морфизмами*.

Однако, поскольку Н-пространства являются для нас лишь представителями унитаров категории [TOP], значительно больший интерес для нас будут иметь отображения $f: K \rightarrow L$, для которых диаграммы (9) и (10) лишь гомотопически коммутативны. Такие отображения мы будем называть *гомотопическими морфизмами*.

Замечание 1. В случае, когда K и L являются Н-группами, непрерывное отображение $f: K \rightarrow L$ будет их гомотопическим морфизмом, если для него гомотопически коммутативна лишь первая диаграмма (9). Действительно, перейдя в гомотопическую категорию [TOP], мы можем это утверждение переформулировать как утверждение о том, что отображение групп категории [TOP], сохраняющее умножение, переводит единицу в единицу и обратные элементы в обратные. Для групп категории ENS это—известное утверждение с тривиальным доказательством (так как $e^2 = e$, то $f(e)^2 = f(e)$, и потому $f(e) = f(e)^2 f(e)^{-1} = f(e) f(e)^{-1} = e$; так как $xx^{-1} = e$, то $f(x) f(x^{-1}) = f(e) = e$, и благодаря этому $f(x)^{-1} = f(x)^{-1} f(x) f(x^{-1}) = f(x^{-1})$). Но, переформулировав это доказательство на языке диаграмм, мы немедленно обнаружим, что оно сохраняет силу в произвольной категории, а значит, и в категории [TOP].

Ясно, что все Н-пространства (Н-моноиды или Н-группы) и все их гомотопические (или только алгебраические) морфизмы составляют категорию. При этом, со-

гласно замечанию 1, категория H -групп и их гомотопических морфизмов будет полной подкатегорией H -моноидов или H -пространств.

Замечание 2. Категория H -групп и их алгебраических морфизмов *не является* полной подкатегорией соответствующей категории H -моноидов или H -пространств.

Гомотопические морфизмы, являющиеся гомотопическими эквивалентностями, мы будем называть *гомотопическими изоморфизмами*.

Замечание 3. Гомотопические изоморфизмы не являются изоморфизмами никакой категории.

Эквивалентности H -пространств—это их гомотопические изоморфизмы, являющиеся тождественными отображениями.

Если $f: K \rightarrow L$ —гомотопическая эквивалентность H -пространства K с произвольным пространством L , то в L можно, очевидно, ввести структуру H -пространства, по отношению к которой отображение f будет гомотопическим изоморфизмом. С точностью до эквивалентности эта структура единственна.

При этом ясно, что H -пространство, гомотопически изоморфное H -моноиду или H -группе, само будет H -моноидом или соответственно H -группой.

Рассмотрим теперь двойственную ситуацию.

Пусть снова A —произвольная категория. Объект C категории A , рассматриваемой вместе с двумя морфизмами $\text{in}_A: A \rightarrow C$, $\text{in}_B: B \rightarrow C$, называется *суммой* (или *копроизведением*) объектов A и B , если для любого объекта $X \in A$ и любых морфизмов $\alpha: A \rightarrow X$, $\beta: B \rightarrow X$ существует единственный морфизм $\gamma: C \rightarrow X$, обладающий тем свойством, что $\gamma \circ \text{in}_A = \alpha$, $\gamma \circ \text{in}_B = \beta$. Объект C , если он существует, с точностью до канонического изоморфизма единствен. Он обозначается символом $A \sqcup B$, а морфизм γ —символом $\alpha \sqcup \beta$.

Аналогичным образом определяется сумма любого (в том числе и пустого!) семейства объектов категории A . При этом суммой пустого семейства объектов будет объект $0'$, обладающий тем свойством, что для любого объекта $A \in A$ существует один и только один морфизм $0' \rightarrow A$. Такой объект называется *инициальным объектом* категории A .

Категория A называется *финитно аддитивно замкнутой* (короче, *фа-замкнутой*), если для любого конечного

семейства ее объектов существует их сумма. В частности, фа-замкнутая категория обладает инициальным объектом.

Морфизм $A \rightarrow B$ фа-замкнутой категории называется *копостоянным*, если он пропускается через инициальный объект, т. е. является составным морфизмом вида $A \rightarrow 0' \rightarrow B$.

Примерами фа-замкнутых категорий служат все те же категории ENS, TOP, [TOP] и GROUPS. Суммой объектов в первых трех категориях является их дизъюнктное объединение, а в последней — их свободное произведение. Инициальным объектом категорий ENS, TOP и [TOP] является пустое множество $\emptyset$ (пустое пространство), а инициальным объектом категории GROUPS — тривиальная группа (являющаяся одновременно и терминальным объектом). Единственными копостоянными морфизмами категорий ENS, TOP и [TOP] являются «отображения» вида $\emptyset \rightarrow X$, а в категории GROUPS копостоянные морфизмы совпадают с постоянными (т. е. являются тривиальными гомоморфизмами).

Объект K произвольной фа-замкнутой категории $\mathbf{A}$ называется *когруппой категории $\mathbf{A}$* (короче, *$\mathbf{A}$ -когруппой*), если для него заданы такие морфизмы $m: K \rightarrow K \sqcup K$, $\mu: K \rightarrow K$, $\varepsilon: K \rightarrow K$, что:

- морфизм ε копостоянен;
- коммутативны диаграммы

$$(11) \quad \begin{array}{ccc} & K \sqcup K & \\ m \nearrow & & \searrow \text{id} \cup \varepsilon \\ K & \xrightarrow{\text{id}} & K \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & K \sqcup K & \\ m \nearrow & & \searrow \varepsilon \cup \text{id} \\ K & \xrightarrow{\text{id}} & K \end{array}$$

$$(12) \quad \begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{m} & K \sqcup K \\ m \downarrow & & \downarrow m \cup \text{id} \\ K \sqcup K & \xrightarrow{\text{id} \cup m} & K \sqcup K \sqcup K \end{array}$$

$$(13) \quad \begin{array}{ccc} & K \sqcup K & \\ m \nearrow & & \searrow \text{id} \cup \mu \\ K & \xrightarrow{\varepsilon} & K \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & K \sqcup K & \\ m \nearrow & & \searrow \mu \cup \text{id} \\ K & \xrightarrow{\varepsilon} & K \end{array}$$

двойственные диаграммам (6), (7), (8) соответственно.

Если заданы только морфизмы m и e , а коммутативны только диаграммы (11), то объект K называется *коунитоидом категории A* (или *A -коунитоидом*). Коунитоид категории, для которого коммутативна также диаграмма (12), называется *комоноидом категории A* (или *A -комоноидом*).

Для любой A -когруппы K и любого объекта $X \in A$ формула

$$(14) \quad f + g = (f \sqcup g) \circ m, \quad f, g: K \rightarrow X,$$

определяет в множестве $A(K, X)$ всех морфизмов $K \rightarrow X$ операцию сложения, нулем которой служит — как непосредственно вытекает из коммутативности диаграмм (11) — копостоянное отображение $K \rightarrow X$ вида $\beta \circ e$, где β — произвольный морфизм $K \rightarrow X$ (легко видеть, что морфизм $\beta \circ e$ не зависит от выбора морфизма β). Из коммутативности диаграммы (12) следует ассоциативность сложения (14), а из коммутативности диаграммы (13), — что элемент $\rightarrow f = f \circ \mu$ противоположен элементу f относительно сложения (14). Таким образом, по отношению к операции (14) множество $A(K, X)$ является группой, причем, как легко видеть, эта структура группы естественна по X .

Обратно, пусть для объекта K категории A все множества $A(K, X)$, $X \in A$, снабжены естественной по X структурой (аддитивной) группы. Тогда в группе $A(K, K \sqcup K)$ будет определен элемент m — сумма морфизмов in_1 и in_2 , а в группе $A(K, K)$ — нулевой элемент e и элемент μ , противоположный элементу id . Более или менее автоматическая проверка показывает, что для этих морфизмов диаграммы (11), (12) и (13) коммутативны и что операция (14) в множестве $A(K, X)$ совпадает с заданным в $A(K, X)$ сложением. Кроме того, из свойства естественности вытекает, что морфизм e копостоянен. Таким образом, в полной двойственности к ситуации для групп $A(X, K)$ мы получаем, что множества $A(K, X)$ тогда и только тогда обладают естественной по X структурой группы, когда объект K является когруппой категории A .

Ясно, что аналогичное утверждение справедливо и по отношению к комоноидам и коунитоидам.

Для интересующего нас в первую очередь случая категорий TOP и $[TOP]$ полученные результаты имеют катастрофический характер. Действительно, так как ко-

постоянное отображение $K \rightarrow X$ в категории TOP существует только при $K = \emptyset$, то в категориях TOP и $[\text{TOP}]$ непустых когрупп не существует, и потому ни для одного непустого K в множествах $\text{TOP}(K, X)$ и $[\text{TOP}](K, X) = [K, X]$ нельзя ввести естественной по X структуры группы!

Для исправления ситуации можно предложить несколько различных способов. Простейший — и, по-видимому, наиболее важный — основывается на следующем определении.

Определение 1. *Пунктированным пространством называется пара (X, x_0) , состоящая из топологического пространства X и некоторой его точки x_0 (называемой отмеченной точкой пунктированного пространства). Очень часто отмеченная точка лишь подразумевается и пунктированное пространство обозначается просто через X .*

Часто также отмеченная точка обозначается символом pt (или $*$), одним и тем же для всех пространств.

Пунктированным отображением $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ пунктированного пространства (X, x_0) в пунктированное пространство (Y, y_0) называется такое непрерывное отображение $X \rightarrow Y$, что $f(x_0) = y_0$.

Ясно, что пунктированные пространства и их пунктированные отображения составляют категорию. Мы будем обозначать эту категорию символом TOP^* . Она связана с категорией TOP функтором игнорирования отмеченных точек

$$\text{TOP}^* \rightarrow \text{TOP},$$

переводящим (X, x_0) в X .

В категории TOP^* существует произведение любого семейства объектов: им будет их произведение как топологических пространств, в котором отмечена точка, каждая координата которой является отмеченной точкой соответствующего множителя. В частности, для двух множителей

$$(X, x_0) \times (Y, y_0) = (X \times Y, (x_0, y_0)).$$

Терминальным объектом категории TOP^* является одноточечное пунктированное пространство $(\{\text{pt}\}, \text{pt})$.

Таким образом, с точностью до отмеченных точек произведения и терминальные объекты категории TOP^* те же, что и в категории TOP .

Иначе дело обстоит с суммами и инициальными объектами (что и является *raison d'être* категории TOP^*).

Определение 2. *Букетной суммой* (или, короче, *букетом*) семейства пунктированных пространств X_α называется факторпространство их дизъюнктного объединения, получающееся отождествлением отмеченных точек. За отмеченную точку букета принимается образ отмеченных точек слагаемых.

Букет пространств X_α обозначается символом $\vee X_\alpha$. Для обозначения букета конечного семейства пунктированных пространств употребляется также запись

$$X_1 \vee X_2 \vee \dots \vee X_n.$$

Букет $X_1 \vee X_2 \vee \dots \vee X_n$ естественно гомеоморфен координатному кресту произведения $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$, состоящему из точек, все координаты которых, кроме, быть может, одной, являются отмеченными точками. Например, для двух слагаемых

$$X \vee Y = (X \times y_0) \cup (x_0 \times Y).$$

Точку (x, y_0) букета $X \vee Y$ мы будем обозначать также символом x_I , а точку (x_0, y) — символом y_{II} .

Каждое семейство пунктированных отображений $f_\alpha: X_\alpha \rightarrow Z$ очевидным образом определяет пунктированное отображение

$$f = \vee f_\alpha: \vee X_\alpha \rightarrow Z,$$

обладающее тем свойством, что $f \circ \text{in}_\alpha = f_\alpha$ для любого α , где

$$\text{in}_\alpha: X_\alpha \rightarrow \vee X_\alpha$$

— канонические вложения. Так как последнее свойство, очевидно, единственным образом характеризует отображение f , то, следовательно, *букетная сумма является суммой в категории ТОР**.

Для конечного семейства $f_1, \dots, f_n$ отображений f_α отображение $\vee f_\alpha$ обозначается также символом $f_1 \vee \dots \vee f_n$. В частности, для двух отображений $f: X \rightarrow Z$ и $g: Y \rightarrow Z$ определено отображение $f \vee g: X \vee Y \rightarrow Z$, действующее по формулам

$$(f \vee g)(x_I) = f(x), \quad (f \vee g)(y_{II}) = g(y), \quad x \in X, y \in Y.$$

Любое семейство отображений $f_\alpha: X_\alpha \rightarrow Y_\alpha$ естественным образом определяет также отображение $\vee X_\alpha \rightarrow \vee Y_\alpha$, которое мы будем обозначать тем же символом $\vee f_\alpha$ (или соответственно $f_1 \vee \dots \vee f_n$).

Заметим, что отображение $\forall f : \forall X_\alpha \rightarrow Z$ (отображение $\forall f_\alpha : \forall X_\alpha \rightarrow \forall Y_\alpha$) является ограничением отображения $\Pi f : \Pi X \rightarrow Z$ (отображения $\Pi f_\alpha : \Pi X_\alpha \rightarrow \Pi Y_\alpha$).

Инициальные объекты категории TOP^* совпадают с терминальными объектами ($\{\text{pt}\}$, pt) и, значит, копостоянные отображения — с постоянными.

Обратим внимание, что, как и в категории групп, в категории TOP^* для любых двух объектов X, Y имеется единственное постоянное (оно же копостоянное) отображение $\text{const} : X \rightarrow Y$.

По аналогии с категорией TOP^* можно ввести категорию ENS^* *пунктированных множеств*, объектами которой являются множества с отмеченной в них точкой, а морфизмами — отображения, переводящие отмеченные точки в отмеченные. Удобно, впрочем, считать эту категорию полной подкатегорией категории TOP^* , рассматривая каждое множество как топологическое пространство с дискретной топологией.

На языке алгебры пунктированное множество представляет собой не что иное, как множество с единственной нулевой операцией. Таким образом, структура пунктированного множества является слабой из всех возможных алгебраических структур. К сожалению, во многих ситуациях на нужных нам множествах нет никакой другой структуры, и приходится ограничиваться тем, что есть.

Например, функтор π_0 на категории TOP^* естественным образом является функтором со значениями в ENS^* (отмечается компонента, содержащая отмеченную точку), но в общем случае в множества $\pi_0 X$ никакой более богатой алгебраической структуры ввести нельзя.

Введя категорию TOP^* , мы должны теперь построить соответствующую гомотопическую категорию $[\text{TOP}^*]$. Для этого нам следует определить для пунктированных отображений понятие гомотопии. Мы это сделаем самым естественным образом, принимая за *гомотопию пунктированных отображений* $(X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ (или, короче, *пунктированную гомотопию*) произвольную гомотопию $f_t : X \rightarrow Y$, обладающую тем свойством, что для любого $t \in I$ отображение f_t является пунктированным отображением $X \rightarrow Y$, т. е. удовлетворяет соотношению $f_t(x_0) = y_0$. Иначе говоря, пунктированные гомотопии — это в точности гомотопии $\text{rel } \{x_0\}$.

В интерпретации гомотопий как отображений $F: X \times I \rightarrow Y$ условие $f_t(x_0) = y_0$ означает, что $F(x_0, t) = y_0$ для всех $t \in I$, т. е. что $F(x_0 \times I) = y_0$. В связи с этим в категории ТОР^* вместо пространства $X \times I$ целесообразно рассматривать пространство

$$X \dot{\times} I = X \times I / x_0 \times I,$$

получающееся из произведения $X \times I$ стягиванием отрезка $x_0 \times I$ в точку. Это пространство естественным образом пунктировано — его отмеченной точкой является образ отрезка $x_0 \times I$, и гомотопии пунктированных отображения являются не чем иным, как пунктированным отображением $X \dot{\times} I \rightarrow Y$.

Иногда (очень редко) нам придется рассматривать обычные гомотопии пунктированных отображений, не удовлетворяющие условию $f_t(x_0) = y_0$. Такие гомотопии мы будем называть *свободными*.

Для гомотопических классов $[f] \text{ rel } \{x_0\}$ пунктированных отображений мы будем употреблять более выразительное обозначение $[f]^*$, а множество всех гомотопических классов $[f]^*$ пунктированных отображений $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ мы будем обозначать либо символом $[(X, x_0), (Y, y_0)]$, либо символом $[X, Y]^*$. Отношение пунктированной гомотопности мы будем иногда обозначать символом $\sim$. Таким образом, формулы $f \sim g$, $f \sim g \text{ rel } \{x_0\}$ и $[f]^* = [g]^*$ означают одно и то же.

Ясно, что гомотопический класс композиции пунктированных отображений зависит только от гомотопических классов этих отображений, что позволяет определить композицию классов $[f]^*$, по отношению к которой совокупность всех пунктированных пространств и всех гомотопических классов их пунктированных отображений является категорией. Мы будем эту категорию обозначать символом $[\text{ТОР}]^*$ (или символом $[\text{ТОР}^*]$).

Для любых пунктированных гомотопий $f_t: X \rightarrow Z$ и $g_t: Y \rightarrow Z$ отображения $f_t \times g_t$ и их ограничения $f_t \vee g_t$ составляют, очевидно, гомотопии. Поэтому произведения (суммы) пунктированных пространств в категории ТОР^* будут произведениями (суммами) и в категории $[\text{ТОР}]^*$. То же самое, конечно, верно и по отношению к инициальным (= терминальным) объектам. Что же касается постоянных (= копостоянных) морфизмов категории $[\text{ТОР}]^*$, то ими будут гомотопические классы постоянных отображений. Поэтому в категории $[\text{ТОР}]^*$, как и в ка-

тегории TOP^* , для любых двух объектов X и Y существует один и только один постоянный ($=$ копостоянный) морфизм $X \rightarrow Y$.

Таким образом, мы видим, что формальных препятствий к существованию в категории $[\text{TOP}]^*$ когрупп, комонOIDов и коунитOIDов нет. Впрочем, как и в аналогичной ситуации для $[\text{TOP}]$ -групп, мы предпочтем вместо гомотопических классов m , μ и e рассматривать их произвольные представители. Тем самым мы приходим к следующим определениям.

Пунктированное пространство (K, e) называется *Н-коунитOIDом* (или, более традиционно, *ко-Н-пространством*), если для него задано такое пунктированное отображение

$$m: K \rightarrow K \vee K,$$

что диаграммы (11) (в которых $K \sqcup K$ заменено на $K \vee K$, а e представляет собой постоянное отображение $\text{const}_e: K \rightarrow K$) гомотопически коммутативны (конечно, пунктировано), т. е. если по отношению к гомотопическим классам $[m]^*$ и $[e]^*$ пространство K является $[\text{TOP}]^*$ -коунитOIDом. Если, кроме того, гомотопически коммутативна диаграмма (12), то Н-коунитOID K называется *Н-комонOIDом*, а если задано отображение $\mu: K \rightarrow K$, для которого гомотопически коммутативны диаграммы (13), то Н-комонOID называется *Н-когруппой*.

Отображение m называется *коумножением*, а отмеченная точка e — *гомотопической коединицей*.

Морфизмы Н-коунитOIDов, Н-комонOIDов и Н-когрупп определяются очевидным образом. Как и в случае Н-пространств, они могут быть *алгебраическими* или более общими — *гомотопическими*.

Два Н-коунитOIDа (два Н-комонOIDа или две Н-когруппы) называются *эквивалентными*, если как пунктированные пространства они совпадают, а их коумножения (а в случае когрупп и отображения μ) пунктировано гомотопны, т. е. если они определяют один и тот же коунитOID (один и тот же комонOID или одну и ту же когруппу) категории $[\text{TOP}]^*$.

Согласно полученным выше общекатегорным результатам для каждой Н-когруппы (каждого Н-комонOIDа или Н-коунитOIDа) K и любого пунктированного пространства X множество $[K, X]$ обладает естественной по X структурой группы (монOIDа или унитOIDа).

Конечно, чтобы все это приобрело содержательный смысл, нам нужно иметь достаточно большой запас примеров конкретных H -когрупп. Мы сейчас изложим один способ их построения, хотя и не самый общий, но достаточный для наших целей.

Пусть X — произвольное (непунктированное) топологическое пространство.

Определение 3. Надстройкой SX над пространством X называется факторпространство произведения $X \times I$ по отношению эквивалентности, в котором $(x_1, t_1) \sim (x_2, t_2)$ тогда и только тогда, когда либо $x_1 = x_2$, $t_1 = t_2$, либо $t_1 = t_2 = 0$, либо $t_1 = t_2 = 1$. Таким образом, отображение факторизации $X \times I \rightarrow SX$ является гомеоморфизмом на подпространстве $X \times (0, 1)$ и отображает каждое из подпространств $X \times 0$ и $X \times 1$ в одну точку (свою для каждого подпространства — см.

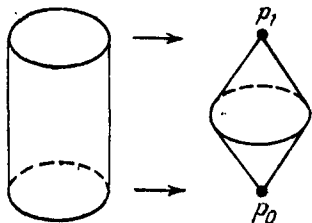


Рис. 4.

рис. 4). Точку $p_0 \in SX$, являющуюся образом подпространства $X \times 0$, мы будем называть *южным полюсом* надстройки SX , а точку $p_1 \in SX$, являющуюся образом подпространства $X \times 1$ — ее *северным полюсом*. Образы отрезков $x \times I$ мы будем называть *меридианами* надстройки, а образ подпространства $X \times 1/2$ — ее *экватором*. Экватор естественным образом гомеоморфен пространству X , и мы, как правило, будем отождествлять его с этим пространством.

Точку надстройки SX , являющуюся образом точки $(x, t) \in X \times I$, мы будем обозначать символом $[x, t]^S$ или просто $[x, t]$. Таким образом,

$$[x, 0] = p_0, [x, 1] = p_1 \quad \text{для любой точки } x \in X,$$

а при $0 < t_1, t_2 < 1$ равенство $[x_1, t_1] = [x_2, t_2]$ имеет место тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $t_1 = t_2$.

Ясно, что соответствие $[x, t]^C \mapsto [x, t]^S$ индуцирует гомеоморфизм пространства CX/X на пространство SX . Таким образом, можно считать, что $SX = CX/X$.

В случае, когда X является единичной сферой S^{n-1} пространства $\mathbb{R}^n$, надстройка SS^{n-1} посредством гомеоморфизма

$$(15) \quad [x, t] \mapsto (-\cos \pi t, \sin \pi t x), \quad x \in S^{n-1}, t \in I,$$

естественным образом отождествляется с единичной сферой S^n пространства $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. При этом полюсы, меридианы и экватор приобретают обычный элементарно-геометрический смысл.

В частности, $S^1 = SS^0$.

Таким образом, хотя сфера S^0 несвязна, ее надстройка S^1 связна. Вообще, надстройка SX над любым пространством X связна, поскольку любая ее точка соединяется отрезком меридиана с каждым полюсом.

Для любого непрерывного отображения $f: X \rightarrow Y$ соответствие

$$[x, t] \mapsto [f(x), t], \quad x \in X, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

определяет непрерывное отображение $Sf: SX \rightarrow SY$, и ясно, что соответствия $X \mapsto SX$, $f \mapsto Sf$ составляют некоторый функтор

$$S: \text{TOP} \rightarrow \text{TOP}.$$

Мы будем называть этот функтор *функтором надстройки*.

При стягивании в надстройке SX экватора X в точку возникает пространство SX/X , гомеоморфное, очевидно, букету $SX \vee SX$ двух экземпляров надстройки SX , получающемуся отождествлением, скажем, южного полюса одного экземпляра с северным полюсом другого (см. рис. 5). (Гомеоморфизм $SX/X \rightarrow SX \vee SX$ индуцируется, например, отображением

$$m: SX \rightarrow SX \vee SX,$$

определенным формулой

$$(16) \quad m[x, t] = \begin{cases} [x, 2t]_{\text{I}}, & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ [x, 2t-1]_{\text{II}}, & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

где $x \in X$, $t \in I$.)

Отображение (16) является, по определению, неким коумножением в пространстве SX , и, как мы ниже покажем, если произвольным образом выбрать в SX отмеченную точку, то по отношению к этому коумножению надстройка SX будет H -когруппой.

Тем самым мы получаем большой запас разнообразных H -когрупп.

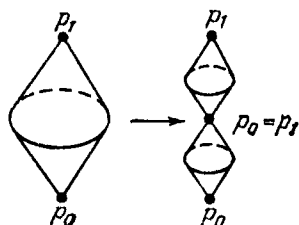


Рис. 5.

Однако внимательный анализ изложенной конструкции выявляет в ней определенные шероховатости, связанные с тем, что хотя ввиду связности пространства SX выбор в нем отмеченной точки никакого реального значения не имеет, но для функториальности всей конструкции этот выбор следует осуществить неким «естественным» образом. К сожалению, у нас есть два естественных кандидата на роль отмеченной точки — северный полюс и южный полюс, выбор между которыми вносит неприятный элемент произвола. (Это, в частности, отразилось в том, что хотя, согласно общей теории, при построении букета $SX \vee SX$ мы должны для обоих экземпляров пространства SX выбирать одну и ту же отмеченную точку, но выше мы для симметрии выбрали в одном экземпляре северный полюс p_0 , а другом — южный полюс p_1 .) Более того, так как на самом деле мы имеем в виду работать в категории TOP^* , то исходное пространство X мы также должны считать пунктированным, и тогда, чтобы его отождествление $x \mapsto [x, 1/2]$ с экватором надстройки SX было отождествлением в категории TOP^* , нужно за отмеченную точку надстройки SX выбирать точку $[x_0, 1/2]$, где x_0 — отмеченная точка пространства X .

Определение 4. Приведенной надстройкой S^*X над пунктированным пространством X называется факторпространство произведения $X \times I$, получающееся стягиванием подпространства $X_{pt} = (X \times 0) \cup (x_0 \times I) \cup (X \times 1)$ в точку:

$$S^*X = X \times I / X_{pt}$$

(которая и принимается за отмеченную точку приведенной надстройки). Иначе говоря,

$$S^*X = SX / Sx_0,$$

где Sx_0 — меридиан, проходящий через точку x_0 .

Вместо S^*X мы будем писать также $S(X, x_0)$.

Точки приведенной надстройки мы будем обозначать прежними символами $[x, t]$ или, когда нужно, $[x, t]^S$. Таким образом, теперь $[x_1, t_1] = [x_2, t_2]$ тогда и только тогда, когда либо $x_1 = x_2$ и $t_1 = t_2$, либо $x_1 = x_2 = pt$ или $t_1 = 0, 1, t_2 = 0, 1$ (и тогда $[x_1, t_1] = [x_2, t_2] = pt$).

Соответствие $x \mapsto [x, 1/2]$ по-прежнему будет вкладывать X в S^*X , но теперь это уже будет пунктированным отображением. Считая, что $X \subset S^*X$, мы отождествим тем самым точку x_0 с отмеченной точкой надстройки S^*X .

Аналогично, соответствие $[x, t] \rightarrow [f(x), t]$ для любого пунктированного отображения $f: X \rightarrow Y$ будет определять пунктированное отображение $S^*f: S^*X \rightarrow S^*Y$, и соответствия $X \mapsto S^*X$, $f \mapsto S^*f$ будут составлять некоторый функтор

$$S^*: \text{TOP}^* \rightarrow \text{TOP}^*.$$

Мы будем называть этот функтор *функтором приведенной надстройки*.

Наконец, та же формула (16) даст нам коумножение $m: S^*X \rightarrow S^*X \vee S^*X$, относительно которого пространство S^*X также является, как мы покажем ниже, H-когруппой (с коединицей x_0).

Таким образом, переход к приведенной надстройке снимает все отмеченные выше трудности и вместе с тем ничего, по существу, не портит. Это, впрочем, не должно удивлять, поскольку, как мы докажем в следующей лекции, пространства SX и S^*X при весьма широких общетопологических условиях гомотопически эквивалентны.

Замечание 4. Более того, при чуть более стеснительных условиях пространства SX и S^*X даже гомеоморфны. Мы не будем исследовать этот вопрос в полной общности и ограничимся тем, что докажем, что для любого $n > 0$ приведенная надстройка S^*S^{n-1} над $(n-1)$ -мерной сферой S^{n-1} гомеоморфна n -мерной сфере $S^n = SS^{n-1}$.

Действительно, отождествив пространство $\mathbb{R}^n$ с произведением $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$, а пространство $\mathbb{R}^{n+1}$ с произведением $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$, гомеоморфизм $d: S^*S^{n-1} \rightarrow S^n$ можно задать, например, формулой

$$(17) \quad d[(x, \mathbf{x}), t] = \begin{cases} (1-2t+2tx, 2t\mathbf{x}, 2\sqrt{t(1-2t)(1-x)}), & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ (2t-1+2(1-t)x, 2(1-t)\mathbf{x}, -2\sqrt{(1-t)(2t-1)(1-x)}), & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

где $x^2 + |\mathbf{x}|^2 = 1$, $x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$ и $t \in I$ (каждый меридиан надстройки этот гомеоморфизм отображает на окружность сферы S^n , высекаемую гиперплоскостью пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящей через точки $(x, \mathbf{x}, 0)$ и $s_0 = (1, 0, 0)$ параллельно оси x_{n+1}). $\square$

Концептуальное преимущество приведенной надстройки проявляется также в том, что она допускает двойственную конструкцию.

Пусть (X, x_0) — произвольное пунктированное пространство.

Определение 5. Путь $u: I \rightarrow X$ пунктированного пространства (X, x_0) называется *петлей*, если $u(0) = u(1) = x_0$. Множество всех петель пространства (X, x_0) , будучи подмножеством топологического пространства X' , является топологическим пространством. Мы будем обозначать его символом $\Omega(X, x_0)$ или просто ΩX .

Пространство ΩX мы будем считать пунктированным пространством, принимая за его отмеченную точку постоянную петлю $0_{x_0}: I \rightarrow X, t \mapsto x_0$.

Каждое пунктированное отображение $f: X \rightarrow Y$ определяет по формуле

$$(\Omega f) u = f \circ u$$

пунктированное отображение $\Omega f: \Omega X \rightarrow \Omega Y$, и ясно, что соответствия $X \mapsto \Omega X, f \mapsto \Omega f$ составляют функтор

$$\Omega: \text{TOP}^* \rightarrow \text{TOP}^*.$$

Мы будем называть этот функтор *функтором петель*.

Мы введем в ΩX умножение, определив произведение uv двух петель $u, v \in \Omega X$ формулой

$$(18) \quad (uv)(t) = \begin{cases} u(2t), & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ v(2t-1), & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Ясно, что это определение корректно и получающееся отображение $(u, v) \mapsto uv$ произведения $\Omega X \times \Omega X$ в пространство ΩX непрерывно.

Ниже мы покажем, что по отношению к этому умножению пространство ΩX является *H-группой*. Единицей (гомотопической) этой H-группы служит постоянная петля 0_{x_0} , а отображение $u \mapsto u^{-1}$ задается формулой $u^{-1}(t) = u(1-t)$.

Заметим, что $\Omega X = \Omega X_0$, где X_0 — компонента пространства X , содержащая отмеченную точку. Поэтому, рассматривая пространство ΩX , мы пространство X будем, как правило, считать связным.

В общей теории категорий два функтора $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ и $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ называются *сопряженными* (точнее, функтор F называется *сопряженным слева* с функтором G , а функтор G

называется *сопряженным справа* с функтором F), если для любых объектов $X \in \mathcal{C}$, $Y \in \mathcal{D}$ задано естественное (по X и Y) биективное отображение

$$\varphi: \mathcal{D}(FX, Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(X, GY)$$

(называемое *изоморфизмом сопряжения*).

Пример. При $\mathcal{C} = \text{ENS}$, $\mathcal{D} = \text{GROUPS}$ функтор $\text{GROUPS} \rightarrow \text{ENS}$ игнорирования групповой структуры сопряжен справа с функтором $\text{ENS} \rightarrow \text{GROUPS}$, сопоставляющим произвольному множеству X свободную группу с множеством X свободных образующих.

Сопряженные функторы обладают целым рядом важных свойств, но нам сейчас они интересны лишь в связи с теорией групп и когрупп.

Пусть функтор F обладает тем свойством, что для любого объекта $X \in \mathcal{C}$ объект FX является когруппой категории $\mathcal{D}$ и, значит, для любого объекта $Y \in \mathcal{D}$ множество $\mathcal{D}(FX, Y)$ является когруппой. Тогда группой будет и множество $\mathcal{C}(X, GY)$, причем групповая структура на этом множестве будет естественна по X (и, конечно, по Y , но это нам в данный момент безразлично). Следовательно, объект $GY \in \mathcal{C}$ будет группой категории $\mathcal{C}$. Поскольку это рассуждение полностью обратимо, этим доказано, что *функтор F тогда и только тогда принимает значения в категории $\mathcal{D}$ -когрупп, когда функтор G принимает значения в категории $\mathcal{C}$ -групп.*

Вернемся теперь в категорию TOP^* .

Предложение 1. *Функтор $S^*: \text{TOP}^* \rightarrow \text{TOP}^*$ сопряжен слева с функтором $\Omega: \text{TOP}^* \rightarrow \text{TOP}^*$.*

Доказательство. Скомпонировав произвольное пунктированное отображение $f: S^*X \rightarrow X$ с отображением факторизации $X \times I \rightarrow S^*X$ и перейдя к ассоциированному отображению, мы получим отображение $\varphi f: X \rightarrow Y'$, в явном виде определяющееся формулой

$$(\varphi f)(x)(t) = f([x, t]), \quad x \in X, 0 \leq t \leq 1.$$

Поскольку по условию $f([x, 0]) = f([x, 1]) = x$, отображение φf является на самом деле отображением в ΩX , так что соответствие $f \mapsto \varphi f$ дает нам некоторое (очевидно, естественное по X и Y) отображение

$$\varphi: \text{TOP}^*(S^*X, Y) \rightarrow \text{TOP}^*(X, \Omega Y),$$

и непосредственная проверка показывает, что это отображение биективно. $\square$

Функтор $T: \text{TOP}^* \rightarrow \text{TOP}^*$ называется *гомотопически инвариантным*, если для любой (пунктированной) гомотопии $f_t: X \rightarrow Y$ отображения $T(f_t): TX \rightarrow TY$ составляют гомотопию из TX в TY (автоматически пунктированную). Для такого функтора соответствие $[f]^* \mapsto [Tf]^*$ корректно определено и вместе с соответствием $X \mapsto TX$ составляет функтор $[\text{TOP}^*] \rightarrow [\text{TOP}^*]$, который называется *гомотопизацией* функтора T и обозначается обычно тем же символом T .

Примерами гомотопических функторов являются, как легко видеть, функторы S^* и Ω . Их гомотопизации мы также будем называть *функтором надстройки* и *функтором петель* (из $[\text{TOP}^*]$ в $[\text{TOP}^*]$).

З а м е ч а н и е 5. Для гомотопического класса $\alpha = [f]^* \in [X, Y]^*$ гомотопический класс $S^*\alpha = [S^*f]^*$ обозначается также символом $E\alpha$.

Ясно, что изоморфизм сопряжения для функторов S^* и Ω гомотопии переводит в гомотопии. Поэтому *функторы S^* и Ω из $[\text{TOP}^*]$ в $[\text{TOP}^*]$ также сопряжены.*

Следовательно, утверждение, что приведенная надстройка S^*X является H -когруппой, равносильно утверждению, что пространство петель ΩX представляет собой H -группу. Значит, в доказательстве нуждается только одно из них.

Определение 6. Муровской петлей пунктированного пространства (X, x_0) называется такое непрерывное отображение

$$u: [0, a] \rightarrow X$$

отрезка $[0, a]$, где $a \geq 0$, в пространство X , что $u(0) = u(a) = x_0$.

Число a называется *длиной* муровской петли u .

Муровские петли длины 1 — это обыкновенные петли пространства X (т. е. петли в смысле определения 5).

Аналогично, *муровским путем* длины $a \geq 0$ топологического пространства X называется произвольное отображение $u: [0, a] \rightarrow X$. Точка $u(0)$ называется *началом* пути u , а точка $u(a)$ — его *концом*.

Для каждого муровского пути $u: [0, a] \rightarrow X$ формула $u^*(t) = u(at)$ определяет обыкновенный путь u^* пространства X , и сопоставив пути u пару (u^*, a) , мы получим отображение множества всех муровских путей пространства X в произведение $X' \times \mathbb{R}^+$, где $\mathbb{R}^+$ — полуось всех

неотрицательных вещественных чисел. Ясно, что это отображение инъективно. Считая его вложением, мы введем в множество $\Omega^M X$ муровских петель топологию подпространства произведения $X' \times \mathbb{R}^+$. Очевидно, что пространство ΩX будет тогда подпространством пространства $\Omega^M X$, а отображение $u \mapsto u^*$ — ретракцией $\Omega^M X \rightarrow \Omega X$.

Более того, легко видеть, что эта ретракция является строгой деформационной ретракцией u , значит, гомотопической эквивалентностью. Соответствующую ретрагирующую деформацию $f_\tau: \Omega^M X \rightarrow \Omega^M X$, $0 \leq \tau \leq 1$, можно получить, сопоставив каждой муровской петле $u: [0, a] \rightarrow X$ муровскую петлю $f_\tau u$ длины $a + \tau - \tau a$, задаваемую формулой

$$(f_\tau u)(t) = \begin{cases} u(t_0), & \text{если } a \leq 1 \text{ и } 0 \leq t \leq a, \\ x_0, & \text{если } a \leq 1 \text{ и } a \leq t \leq a + \tau - \tau a, \\ u\left(\frac{at}{a + \tau - \tau a}\right), & \text{если } a \geq 1, \end{cases}$$

где $0 \leq t \leq a + \tau - \tau a$. $\square$

Пусть u и v — два муровских пути длин соответственно a и b , обладающих тем свойством, что конец $u(a)$ пути u совпадает с началом $v(0)$ пути v . Тогда формула

$$(uv)(t) = \begin{cases} u(t), & \text{если } 0 \leq t \leq a, \\ v(t-a), & \text{если } a \leq t \leq a+b, \end{cases}$$

определяет муровский путь uv длины $a+b$, называемый произведением путей u и v .

В частности, произведение uv определено для любых двух муровских петель $u, v \in \Omega^M X$, причем соответствующее отображение

$$(19) \quad \begin{aligned} \Omega^M X \times \Omega^M X &\rightarrow \Omega^M X, \\ (u, v) &\mapsto uv, \end{aligned}$$

как легко видеть, непрерывно. Кроме того, ясно, что оно ассоциативно и петля $\text{const}: [0, 0] \rightarrow X$ (которую мы будем обозначать также символом e) является его единицей. Это означает, что относительно умножения (19) пространство $\Omega^M X$ является топологическим моноидом.

С другой стороны, формула

$$m_\tau(u, v)(t) = \begin{cases} u \left(\frac{2(a+b)t}{(a+b) + (a-b)\tau} a \right), & \text{если } 0 \leq t \leq \frac{(a+b) + (a-b)\tau}{2(a+b)}, \\ v \left(\frac{2(a+b)t - (a+b) - (a-b)\tau}{(a+b) - (a-b)\tau} b \right), & \text{если } \frac{(a+b) + (a-b)\tau}{2(a+b)} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

(где a и b — длины муровских путей u и v) определяет — как непосредственно проверяется — гомотопию $m_\tau: \Omega^M X \times \Omega^M X \rightarrow \Omega X$, связывающую отображение $m_0: (u, v) \mapsto u \# v$ с отображением $m_1: (u, v) \mapsto (uv)^*$. Следовательно, отображение $u \mapsto u^*$ является гомотопическим морфизмом и, значит, будучи гомотопической эквивалентностью, и гомотопическим изоморфизмом.

Этим доказано, что пространство с умножением ΩX гомотопически изоморфно топологическому моноиду $\Omega^M X$.

Следовательно, пространство ΩX является Н-моноидом (и поэтому пространство $S^* X$ — Н-комонотомом).

Поскольку $e^* = 0_{x_0}$, постоянная петля 0_{x_0} является гомотопической единицей Н-моноида ΩX (а отмеченная точка приведенной надстройки $S^* X$ — ее гомотопической коединицей).

З а м е ч а н и е 6. Конечно, последние утверждения легко доказываются и непосредственно. Гомотопия из $\Omega X \times \Omega X \times \Omega X$ в ΩX , связывающая отображения $(u, v, w) \mapsto (uv)w$ и $(u, v, w) \mapsto u(vw)$, может быть определена формулой

$$[f_\tau(u, v, w)](t) = \begin{cases} u \left(\frac{ut}{1+\tau} \right) & \text{если } 0 \leq t \leq \frac{1+\tau}{4}, \\ v(4t - \tau - 1), & \text{если } \frac{1+\tau}{4} \leq t \leq \frac{2+\tau}{4}, \\ w \left(\frac{4t - \tau - 2}{2 - \tau} \right), & \text{если } \frac{2+\tau}{4} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

где $u, v, w \in \Omega X$, а гомотопии из ΩX в ΩX , связывающие отображения $u \mapsto u0_{x_0}$ и $u \mapsto 0_{x_0}u$ с тождественным

отображением, — формулами

$$[f_{\tau}(u)](t) = \begin{cases} u\left(\frac{2t}{1+\tau}\right), & \text{если } 0 \leq t \leq \frac{1+\tau}{2}, \\ x_0, & \text{если } \frac{1+\tau}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$$[g_{\tau}(u)](t) = \begin{cases} x_0, & \text{если } 0 \leq t \leq \frac{1-\tau}{2}, \\ u\left(\frac{2t+\tau-1}{1+\tau}\right), & \text{если } \frac{1-\tau}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

где $u \in \Omega X$.

Аналогичный («сопряженный») вид имеют соответствующие гомотопии для пространства S^*X .

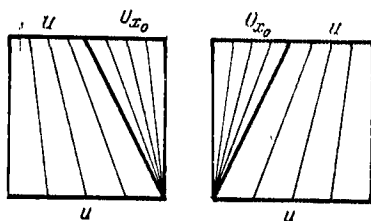


Рис. 6.

Условно построенные гомотопии изображены на рис. 6 и 7.

Предложение 2. Пространство ΩX является Н-группой (а пространство S^*X , следовательно, Н-когруппой).

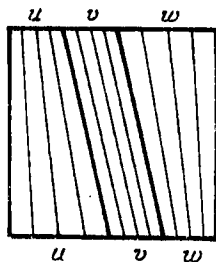


Рис. 7.

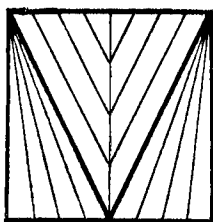


Рис. 8.

Доказательство. В свете всего сказанного выше нам нужно только доказать, что отображения $u \mapsto uu^{-1}$ и $u \mapsto u^{-1}u$ гомотопны постоянному отображению $\Omega X \rightarrow \Omega X$. Для отображения $u \mapsto uu^{-1}$ соответствующая

гомотопия определяется формулой

$$[f_\tau(u)](t) = \begin{cases} u(2t), & \text{если } 0 \leq t \leq \frac{1-\tau}{2}, \\ u(1-\tau), & \text{если } \frac{1-\tau}{2} \leq t \leq \frac{1+\tau}{2}, \\ u(2-2t), & \text{если } \frac{1+\tau}{2} \leq t \leq 1, \end{cases} \quad u \in \Omega X,$$

(см. рис. 8), а для отображения $u \mapsto u^{-1}u$ получается из этой гомотопии заменой u на u^{-1} (и u^{-1} на u). $\square$

Ясно, что Н-группой будет и топологический моноид $\Omega^M X$ муровских петель.

ДОПОЛНЕНИЕ

Н-моноиды, являющиеся Н-группами. — Левые и правые сдвиги в Н-моноидах.

В алгебре мы привыкли к тому, что структура моноида существенно слабее структуры группы, что выражается в существовании разнообразнейших моноидов, не являющихся группами. Оказывается, что в категории [TOP] дело обстоит совсем по-другому, и при весьма слабых общетопологических предположениях *каждый связный Н-моноид является Н-группой*. Здесь условие связности имеет своей целью исключить моноиды, рассматриваемые в алгебре. Однако того же самого можно добиться и при менее ограничительных условиях.

Чтобы сформулировать эти условия, мы вспомним, что для любого Н-моноида K множество $\pi_0 K$ его компонент естественным образом является моноидом, причем для Н-группы K этот моноид будет группой. Таким образом, для того чтобы Н-моноид K был Н-группой, необходимо, чтобы моноид $\pi_0 K$ был группой. Оказывается, что при соответствующих общетопологических ограничениях необходимое условие также и достаточно. Именно, справедливо следующее предложение.

Предложение 1. *Любой нумерируемо полулокально стягиваемый Н-моноид K , для которого моноид $\pi_0 K$ представляет собой группу, является Н-группой.*

Это предложение утверждает, таким образом, что для Н-моноида K существует непрерывное отображение μ :

$K \rightarrow K$, $x \mapsto x^{-1}$, для которого диаграммы

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} & K \times K & \\ \text{id} \times \mu \swarrow & & \searrow m \\ K & \xrightarrow{\varepsilon} & K \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & A \times K & \\ \mu \times \text{id} \swarrow & & \searrow m \\ K & \xrightarrow{\varepsilon} & K \end{array} \quad \varepsilon = \text{const}_e,$$

гомотопически коммутативны. При этом легко видеть, что отображение μ этими условиями характеризуется однозначно (конечно, с точностью до гомотопии). Действительно, согласно замечанию 1 лекции 3, тождественное отображение $K \rightarrow K$ должно переводить одно отображение μ в другое. $\square$

Мы предпошлим доказательству предложения 1 несколько общих замечаний.

Для любой фиксированной точки $a \in K$ мы введем в рассмотрение *левый сдвиг* L_a на a и *правый сдвиг* R_a на a , являющиеся отображениями $K \rightarrow K$, определенными соответственно формулами

$$L_a x = ax, \quad R_a x = xa, \quad x \in K.$$

Тот факт, что точка e является гомотопической единицей, означает, что отображения L_e и R_e гомотопны тождественному отображению id . Кроме того, из гомотопической ассоциативности умножения в K следует, что для любых двух точек $a, b \in K$ отображения $L_a \circ L_b$ и $R_a \circ R_b$ гомотопны соответственно отображениям L_{ab} и R_{ba} .

Каждый путь $u: I \rightarrow K$, соединяющий точку a с точкой b , определяет по формуле $t \mapsto L_{u(t)}$ (по формуле $t \mapsto R_{u(t)}$) гомотопию, связывающую отображение L_a (отображение R_a) с отображением L_b (с отображением R_b). С другой стороны, если для Н-моноида K множество $\pi_0 K$ является группой, то для любого элемента $a \in K$ существует такой элемент $a' \in K$, что для каждой точки $x \in K$ точки $a'(ax)$ и $a(a'x)$ (или, что равносильно, точки $(a'a)x$ и $(aa')x$) лежат в той же компоненте, что и точка x , т. е. могут быть соединены с этой точкой некоторым путем. В частности, точки $(a'a)e$ и $(aa')e$, а значит, и точки $a'a$ и aa' лежат в той же компоненте, что и точка e . Поэтому отображения $L_{a'a}: x \mapsto (a'a)x$ и $L_{aa'}: x \mapsto (aa')x$ гомотопны отображению L_e , а значит, и тождественному отображению id . Аналогично показывается, что отображения

$R_{a'a}$ и $R_{aa'}$ также гомотопны тождественному отображению id . Поскольку $L_{aa'} \sim L_a \circ L_{a'}$ и $L_{a'a} \sim L_{a'} \circ L_a$ (и аналогично $R_{aa'} \sim R_a \circ R_{a'}$ и $R_{a'a} \sim R_{a'} \circ R_a$), этим доказана следующая лемма.

Лемма 1. Если для Н-моноида K множество $\pi_0 K$ является группой, то для любого элемента $a \in K$ отображения L_a и R_a являются гомотопическими эквивалентностями. $\square$

Обратно, пусть для Н-моноида K , скажем, отображения L_a являются гомотопическими эквивалентностями. Тогда отображение $l: K \times K \rightarrow K \times K$, определенное формулой

$$l(a, x) = (a, ax), \quad a, x \in K,$$

и являющееся, очевидно, по отношению к проекции $\text{pr}_1: K \times K \rightarrow K$, $(a, x) \mapsto a$, отображением над K , будет гомотопической эквивалентностью на слоях. Следовательно, если Н-моноид K нумерируемо полулокально стягиваем, то, согласно предложению 3 Дополнения к лекции 2, отображение l будет послойной гомотопической эквивалентностью.

Пусть $l': K \times K \rightarrow K \times K$ — обратная послойная гомотопическая эквивалентность. Так как $\text{pr}_1 \circ l = \text{pr}_1$, то для любой точки $(a, x) \in K \times K$ будет иметь место равенство $l'(a, x) = (a, \lambda(a, x))$, где $\lambda: K \times K \rightarrow K$ — такое отображение, что

$$(a, x) \mapsto \lambda(a, ax) \text{ и } (a, x) \mapsto a\lambda(a, x), \quad (a, x) \in K \times K,$$

из $K \times K$ в K гомотопны проекции $(a, x) \mapsto x$. Положив $x = e$ и $\mu^l(a) = \lambda(a, e)$, мы получим, в частности, отображение $\mu^l: K \rightarrow K$, для которого отображение $a \mapsto a\mu^l(a)$ гомотопно отображению $\text{const}_e: K \rightarrow K$, $a \mapsto e$, т. е. для которого гомотопически коммутативна первая из диаграмм (1).

Аналогично доказывается, что если гомотопическими эквивалентностями являются отображения R_a , $a \in K$, то существует отображение $\mu^r: K \rightarrow K$, для которого гомотопически коммутативна вторая диаграмма (1).

Но если существуют как отображения μ^l , так и отображения μ^r , то отображение $\mu^r: x \mapsto \mu^r(x)$ будет гомотопно отображению $x \mapsto \mu^r(x)\mu^l(x)$, а отображение $\mu^l: x \mapsto \mu^l(x)$ будет гомотопно отображению $x \mapsto \mu^r(x)\mu^l(x)$. Поэтому в силу гомотопической ассоциативности умножения в Н-моноиде K , отображения μ^r и μ^l оказываются гомотопными. Следовательно, мы можем считать, что $\mu^r = \mu^l$.

Тем самым доказана следующая лемма.

Лемма 2. Если для любого элемента $a \in K$ нумерируемо полулокально стягиваемого Н-моноида K отображения L_a и R_a являются гомотопическими эквивалентностями, то Н-моноид K будет Н-группой. $\square$

Доказательство предложения 1 немедленно получается при сопоставлении лемм 1 и 2.

Замечание 1. В силу леммы 1 условие леммы 2 не только достаточно, но и необходимо, т. е. нумерируемо полулокально стягиваемый Н-моноид K тогда и только тогда является Н-группой, когда для любого элемента $a \in K$ отображения L_a и R_a являются гомотопическими эквивалентностями.

Экспоненциальный закон для пунктированных отображений.— Расслоения и корасслоения категории TOP^* .— Лемма о приклеивании вибриссы.— Цилиндры и коцилиндры в категории TOP^* .— Стягиваемые пунктированные пространства.— Приведенные конусы.— Серровские расслоения.— Пунктированные гомотопические эквивалентности.— Отображение игнорирования отмеченных точек.— Фундаментальная группа пунктированного пространства.— Действие группы $\pi_1 Y$ на множестве $[X, Y]^*$.— Пунктированные H -пространства.— H -пространства с настоящими единицами.— Кослои и относительные гомеоморфизмы.— Кослои по стягиваемым подпространствам.— Заключительные замечания о надстройках и пространствах петель.

Введение в рассмотрение пунктированных пространств заставляет поставить вопрос о цене, которую приходится за это платить, т. е. вопрос о том, насколько видоизменяются и усложняются конструкции и результаты предыдущих лекций при переходе к пунктированным пространствам.

К счастью, оказывается, что в большинстве случаев этот переход осуществляется практически безболезненно.

Например, поскольку для любых пунктированных пространств (X, x_0) и (Y, y_0) множество $\text{TOP}^*((X, x_0), (Y, y_0))$ лежит в $\text{TOP}(X, Y)$, оно автоматически снабжается индуцированной топологией. Получающееся топологическое пространство обозначается символом $(Y, y_0)^{(X, x_0)}$. Оно естественным образом пунктировано: его отмеченной точкой служит постоянное отображение $\text{const}: X \rightarrow Y$. Когда невозможны недоразумения, мы будем пространство $(Y, y_0)^{(X, x_0)}$ обозначать прежним символом Y^X .

Однако ситуация с экспоненциальным законом для категории TOP^* оказывается более сложной, поскольку отображение $\theta f: Y \rightarrow B^X$, ассоциированное с пунктированным отображением $f: (X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow (B, b_0)$, не будет, вообще говоря, отображением в $(B, b_0)^{(X, x_0)}$ (для этого нужно, чтобы $f(x_0, y) = b_0$ для любой точки $y \in Y$, т. е. чтобы $f(x_0 \times Y) = b_0$). Более того, даже при выполнении последнего требования отображение θf не будет, вообще говоря, пунктированным отображением $(Y, y_0) \rightarrow$

$\mapsto (B, b_0)^{(X, x_0)}$ (для этого нужно, чтобы $f(x, y_0) = b_0$ для любой точки $x \in X$, т. е. чтобы $f(X \times y_0) = b_0$). Это показывает, что роль пространства $X \times Y$ в экспоненциальном законе для пунктированных отображений должно играть факторпространство

$$(X, x_0) \wedge (Y, y_0) = X \times Y / (X \times y_0) \cup (x_0 \times Y),$$

получающееся из произведения $X \times Y$ стягиванием в одну точку координатного креста

$$(X, x_0) \vee (Y, y_0) = (X \times y_0) \cup (x_0 \times Y)$$

(которая и считается отмеченной точкой этого пространства).

Определение 1. Пространство $(X, x_0) \wedge (Y, y_0)$ называется *смешем* (или *смеш-произведением*) пунктированных пространств (X, x_0) и (Y, y_0) .

Для обозначения смеш-произведения вместо знака $\wedge$ употребляется также знак $\otimes$ (Рохлин и Фукс [10]). Вместо $(X, x_0) \wedge (Y, y_0)$ часто пишут просто $X \wedge Y$ (или $X \otimes Y$).

Образ точки $(x, y) \in X \times Y$ в пространстве $X \wedge Y$ обозначается символом $x \wedge y$. В этих обозначениях отмеченной точкой пространства $X \wedge Y$ является точка $x_0 \wedge y_0$.

Аналогичным образом определяется смеш-произведение $X_1 \wedge \dots \wedge X_n$ любого числа пунктированных пространств $X_1, \dots, X_n$. Им будет факторпространство произведения $X_1 \times \dots \times X_n$, в котором отождествлены все точки, хотя бы одна координата которых является отмеченной точкой соответствующего множителя.

Во избежание недоразумений, подчеркнем, что смеш-произведение *не является* в категории TOP произведением в смысле общей теории категорий (им будет, как мы уже знаем, прямое произведение

$$(X, x_0) \times (Y, y_0) = (X \times Y, (x_0, y_0)).$$

Стоит также иметь в виду, что свойством ассоциативности смеш-умножение, вообще говоря, *не обладает*, т. е. существуют такие пунктированные пространства X, Y и Z , что пространства $(X \wedge Y) \wedge Z$ и $X \wedge (Y \wedge Z)$ не гомеоморфны. (Примером могут служить пространства $X = \mathbb{Q}$, $Y = \mathbb{Q}$ и $Z = \mathbb{Z}$, где $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел в обычной топологии.) Вопрос об ассоциативности смеш-умножения мы рассмотрим в Дополнении к этой лекции.

Вместе с тем смеш-умножение очевидным образом коммутативно, т. е. для любых пунктированных пространств X и Y пространства $X \wedge Y$ и $Y \wedge X$ естественно гомеоморфны.

Отождествив окружность S^1 с пространством $I/\{0, 1\}$, получающимся отождествлением концевых точек отрезка I , мы немедленно получим, что для любого пунктированного пространства (X, x_0) смеш $S^1 \wedge X$ совпадает с надстройкой $S^1 X$.

Пунктированные отображения $f: (X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow (B, b_0)$, для которых ассоциированное отображение θ_f представляет собой отображение $(Y, y_0) \rightarrow (B, b_0)^{(X, x_0)}$, т. е. для которых $f((X \times y_0) \cup (x_0 \times Y)) = b_0$, находятся, очевидно, в естественном биективном соответствии с пунктированными отображениями $\bar{f}: X \wedge Y \rightarrow B$ (соответствие осуществляется компонированием отображений $\bar{f}$ с отображением факторизации $X \times Y \rightarrow X \wedge Y$). Это позволяет вложить множество $\text{TOP}^*(X \wedge Y, B)$ в множество $\text{TOP}^*(X \times Y, B) \subset \text{TOP}(X \times Y, B)$ и тем самым считать, что отображение θ определено на $\text{TOP}^*(X \wedge Y, B)$. Таким образом, отображение ассоциирования θ теперь оказывается отображением

$$(1) \quad \text{TOP}^*(X \wedge Y, B) \rightarrow \text{TOP}^*(Y, B^X).$$

Ясно, что оно по-прежнему всегда (для любых X, Y, B) инъективно, а биективно тогда и только тогда, когда биективно соответствующее отображение $\text{TOP}(X \times Y, B) \rightarrow \text{TOP}(Y, B^X)$ для категории TOP . В частности, отображение (1) биективно, если пространство X локально компактно и хаусдорфово. Если же, кроме того, хаусдорфово и пространство Y , то рассматриваемое как отображение $B^{X \wedge Y} \rightarrow (B^X)^Y$, оно является гомеоморфизмом.

Этот экспоненциальный закон для пунктированных отображений, в отличие от обычного экспоненциального закона, непосредственно не применим к пунктированным гомотопиям, которые представляют собой отображения вида $X \times I \rightarrow Y$, а не $X \wedge I \rightarrow Y$ (заметим, что пространство $X \wedge I$ даже не имеет смысла, поскольку отрезок I не пунктирован). Поэтому гомотопии требуют отдельного параллельного обсуждения.

Как было сказано в лекции I, каждая (свободная) гомотопия $X \times I \rightarrow Y$ допускает две интерпретации — как путь в пространстве Y^X или как отображение $X \rightarrow Y^I$

в пространство путей Y^I . Ясно, что первая интерпретация сохраняется и для пунктированных гомотопий — каждая пунктированная гомотопия $X \times I \rightarrow Y$ естественным образом отождествляется с некоторым путем в пространстве $(Y, y_0)^{(X, x_0)}$, но как и для непунктированного случая эта интерпретация адекватна только при сильных ограничениях на пространство X (например, если это пространство хаусдорфово и локально компактно).

Чтобы перенести на случай пунктированных гомотопий вторую (формально более важную) интерпретацию, мы для любого пунктированного пространства (Y, y_0) раз навсегда условимся считать пространство путей Y^I пунктированным пространством, принимая за его отмеченную точку постоянный путь $0_{y_0}: I \rightarrow Y, t \mapsto y_0$, в точке y_0 . Тогда пунктированные гомотопии $X \times I \rightarrow Y$ будут естественным образом отождествляться с пунктированными отображениями $(X, x_0) \rightarrow (Y^I, 0_{y_0})$.

В частности, поскольку все отображения $\omega_i: Y^I \rightarrow Y$ будут теперь, очевидно, пунктированы, отсюда следует, что запись свойства распространения гомотопий в виде диаграммы (1) лекции 1 останется справедливой и для пунктированных отображений.

Понятия корасслоения и расслоения переносятся на случай категории TOP^* очевидным образом: нужно только в соответствующих диаграммах предполагать все отображения пунктированными. При этом, как было только что замечено, оба варианта определения корасслоения (один, использующий интерпретацию гомотопий как отображений $X \times I \rightarrow Y$, а другой — как отображений $X \rightarrow Y^I$) по-прежнему равносильны друг другу. Характеризация расслоений с помощью аксиомы о накрывающем пути также, конечно, дословно переносится в категорию TOP^* .

Тем не менее переход к пунктированным отображениям по-разному отражается на корасслоениях и расслоениях. Так как распространение пунктированного отображения автоматически является пунктированным отображением, то пунктированное отображение $i: (A, a_0) \rightarrow (X, x_0)$, являющееся корасслоением (как отображение $i: A \rightarrow X$ категории TOP), будет корасслоением и в категории TOP^* . В частности, взяв произвольную пару Борсука (X, A) категории TOP и произвольным образом выбрав в A отмеченную точку, мы получим пару Борсука категории TOP^* .

Напротив, из того, что отображение $p: E \rightarrow B$ является расслоением категории TOP , еще не следует, что пунктированное отображение $p: (E, e_0) \rightarrow (B, b_0)$ будет расслоением категории TOP^* , поскольку гомотопия $\bar{F}: X \times I \rightarrow E$, накрывающая пунктированную гомотопию $F: X \times I \rightarrow B$, может и не быть пунктированной.

Чтобы хотя бы частично поправить дело, мы введем следующее определение.

Определение 2. Точка x_0 топологического пространства X называется *невырожденной*, если она замкнута в X и пара (X, x_0) является парой Борсука, т. е. — что в силу предложения 3 лекции 2 равносильно — если одноточечное множество $\{x_0\}$ является ФОСДР'ом в слабом смысле. Пунктированное пространство (X, x_0) называется *гладко пунктированным*, если его отмеченная точка x_0 невырождена.

Из следствия теоремы 2 лекции 2 непосредственно вытекает, что если пунктированное отображение $p: (E, e_0) \rightarrow (B, b_0)$ является в категории TOP расслоением, то в категории TOP^* аксиома о накрывающей гомотопии будет выполняться для любого гладко пунктированного пространства (X, x_0) . Допуская вольность речи, можно, таким образом, сказать, что по отношению к гладко пунктированным пространствам любое расслоение категории TOP является расслоением и категории TOP^* .

Это совсем немало, поскольку, как мы в свое время увидим, практически все реально встречающиеся пунктированные пространства гладко пунктированы.

З а м е ч а н и е 1. Пунктированное отображение, являющееся (ко)-расслоением категории TOP^* , априори может и не быть (ко)-расслоением категории TOP . Однако на практике такого рода патологические ситуации не встречаются.

В связи с понятием гладко пунктированного пространства полезно иметь в виду следующую простую лемму.

Лемма 1. Любое топологическое пространство X гомотопически эквивалентно топологическому пространству X' , обладающему невырожденной точкой x'_0 . При этом можно считать, что пространство X содержится в пространстве X' и является его строгим деформационным ретрактом. Более того, пространство X' можно выбрать так, чтобы в нем существовал путь, соединяющий x'_0 с любой наперед заданной точкой $x_0 \in X$.

Доказательство. Отметив в отрезке I точку 1 , а в пространстве X данную точку x_0 , построим букет $X' = X \vee I$. Каждая точка из X' является либо точкой x из X , либо числом $\tau \in I$, причем $x_0 = 1$. Ясно, что $X \subset X'$ является строгим деформационным ретрактом пространства X' (соответствующая гомотопия $f_\tau: X' \subset X'$, неподвижная на X , переводит каждую точку $\tau \in I \subset X'$ в точку $t + (1-t)\tau \in I$). Пусть x'_0 — точка $0 \in I \subset X'$. Положив $\varphi(x) = 1$ и $\varphi(\tau) = \tau$, мы получим на X' непрерывную функцию $\varphi: X' \rightarrow I$, для которой $\varphi^{-1}(0) = \{x'_0\}$ и $\varphi^{-1}(1) = X$, а положив $g_t(\tau) = (1-t)\tau$, мы получим такую гомотопию $g_t: U \rightarrow X'$, где $U = X' \setminus X = [0, 1)$, что $g_0(\tau) = \tau$ и $g_1(\tau) = x'_0$ для любого $\tau \in U$. Следовательно, точка x'_0 невырождена. $\square$

Говорят, что пространство X' получено из пространства *приклеиванием вибриссы*.

Таким образом, приклеивание вибриссы, практически не изменяя пространство X , превращает его в пространство с невырожденной отмеченной точкой.

Чтобы получить в категории TOP^* амальгамы и коамальгамы, достаточно [построить для соответствующих диаграмм их амальгамы и коамальгамы в категории TOP и затем естественным образом отметить в них точки (в амальгаме диаграммы $A \leftarrow C \rightarrow B$ отмеченной точкой будет образ отмеченной точки пространства C , а в коамальгаме диаграммы $A \rightarrow C \leftarrow B$ — отмеченная точка прямого произведения $A \times B$). Таким образом, с точностью до отмеченных точек амальгамы и коамальгамы в категории TOP^* те же, что и в категории TOP .

В частности, если игнорировать отмеченные точки, то коцилиндром пунктированного отображения $f: X \rightarrow Y$ будет его коцилиндр как непунктированного отображения.

Вместе с тем для цилиндра соответствующее утверждение неверно, так как в его конструкции пространство $X \times I$ заменяется пространством $X \times I$, и значит, цилиндр $\text{Cyl}^*(f)$ пунктированного отображения $f: X \rightarrow Y$ получается из его цилиндра $\text{Cyl}(f)$ как непунктированного отображения стягиванием отрезка $x_0 \times I$ в точку:

$$\text{Cyl}^*(f) = \text{Cyl}(f)/(x_0 \times I).$$

В литературе цилиндр $\text{Cyl}^*(f)$ обычно называется *приведенным цилиндром* отображения f (а цилиндр $\text{Cyl}(f)$ соответственно этому — *неприведенным*).

Несмотря на эту модификацию, осуществляемая с помощью цилиндров редукция задачи распространения к задаче ретракции полностью сохраняется и для пунктированных отображений. Сохраняется, конечно, и осуществляемая с помощью коцилиндров редукция задачи поднятия к задаче сечения.

Пунктированное пространство (X, x_0) называется *стягиваемым* (обозначение $X \Downarrow pt$), если постоянное отображение $\text{const}: X \rightarrow X, x \mapsto x_0$, пунктированно гомотопно тождественному отображению $\text{id}: X \rightarrow X, x \mapsto x$, т. е. если точка x_0 является строгим деформационным ретрактом пространства X .

Из предложения 2 лекции 2 непосредственно следует, что *гладко пунктированное пространство (X, x_0) тогда и только тогда стягиваемо, когда стягиваемо непунктированное пространство X* . Соответствующая пунктированная гомотопия $X \times I \rightarrow X$ называется *стягиванием*.

Это означает, что свойство стягиваемости, по существу, безразлично к тому, в какой категории (TOP или TOP^*) мы работаем.

Приведенный (обращенный) цилиндр отображения const называется *приведенным конусом* над пространством X и обозначается символом C^*X . Таким образом, $C^*X = CX/Cx_0$.

Точки конуса C^*X мы будем обозначать прежними символами $[x, t]$, как и раньше отождествляя точки $[x, 1]$ и x , т. е. отождествляя пространство X с основанием конуса C^*X . В частности, в соответствии с этим вложением, отмеченной точкой конуса C^*X будет точка $x_0 \in X$.

Ясно, что $S^*X = C^*X/X$.

Каждое пунктированное отображение $f: X \rightarrow Y$ определяет по формуле

$$(C^*f)[x, t] = [f(x), t], \quad x \in X, t \in I,$$

пунктированное отображение $C^*f: C^*X \rightarrow C^*Y$, и ясно, что соответствия $X \mapsto C^*X, f \mapsto C^*f$ составляют функтор из TOP^* в TOP^* .

Конус C^*X , очевидно, стягиваем (как пунктированное пространство), и *пространство X тогда и только тогда стягиваемо, когда оно является ретрактом конуса C^*X* .

Более того, оказывается, что—как и для непунктированных пространств—слова «является ретрактом» можно здесь заменить словами «является строгим деформационным

ретрактом». Действительно, любую ретракцию $r: C^*X \rightarrow X$ мы можем рассматривать как ретракцию $CX \rightarrow X$, и легко видеть, что ретрагирующая деформация F , построенная по этой ретракции описанным в лекции 2 способом, будет при соблюдении очевидных предосторожностей неподвижна на Cx_0 и, значит, будет индуцировать ретрагирующую деформацию конуса C^*X . (В явном виде ретрагирующую деформацию F можно задать, например, формулой

$$F([x, t], s) = \begin{cases} \left[r \left[r \left[x, \frac{t-2s}{1-2s} \right], \frac{2(1-3s)}{1-2s} \right], 0 \right], & \text{если } 2s \leq t \leq 1, 1/4 \leq s \leq 1/3, \\ \left[r \left[x, \frac{t-2s}{1-2s} \right], \frac{2s}{1-2s} \right], & \text{если } 2s \leq t \leq 1, 0 \leq s \leq 1/4, \\ \left[r \left[x, \frac{2(1-s-t)}{1-2s} \right], 0 \right], & \text{если } 1/2 \leq t \leq 2/3, t/2 \leq s \leq 1-t, \\ \left[x, \frac{2(t-s)}{1-2s} \right], & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, t/2 \leq s \leq t, \\ \left[r \left[x, \frac{2(1-s-t)}{1-2t} \right], 0 \right], & \text{если } 1/2 \leq t \leq 2/3, 1-t \leq s \leq 1/2, \\ \left[x, \frac{2(s-t)}{1-2t} \right], & \text{если } 1/2 \leq t \leq 2/3, 1/2 \leq s \leq t, \\ [r[x, 9(t+2s-2st)-8], 0], & \text{если } 2/3 \leq t \leq 1, 1/3 \leq s \leq 1/2, \\ [x, 10-9(t+2s-2st)], & \text{если } 2/3 \leq t \leq 1, 1/2 \leq s \leq 2/3, \\ \left[x, \frac{t+2s-2}{2s-1} \right], & \text{если } 2-2s \leq t \leq 1, 2/3 \leq s \leq 1, \\ [x, 0], & \text{если } 0 \leq t \leq 2/3, t \leq s \leq (2-t)/2, \end{cases}$$

которая определяет эту деформацию на квадрате (t, s) отдельно на каждой из десяти его частей, изображенных на рис. 9.)

Пунктированное отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *гомотопным нулю*, если оно пунктировано гомотопно по-

стоянному отображению. Так же как и в случае непунктированных пространств, отображение $f: X \rightarrow Y$ тогда и

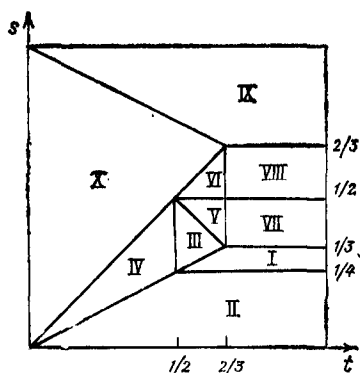
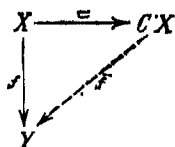


Рис. 9.

только тогда гомотопно нулю, когда оно может быть распространено на C^*X :



Кроме того, пунктированное пространство Y тогда и только тогда стягиваемо, когда для каждого пунктированного пространства X любое пунктированное отображение $X \rightarrow Y$ гомотопно нулю.

В отличие от случая категории TOP , понятие конуса в категории TOP^* может быть дуализировано. Соответствующим двойственным объектом является уже знакомое нам по лекции 1 пространство $PX = P(X, x_0)$ всех путей пространства X , начинающихся в отмеченной точке x_0 (формально здесь удобнее было бы либо перейти к прямому конусу либо считать, что PX состоит из путей, кончающихся в точке x_0 ; из-за того, что за C^*X мы принимаем обращенный конус, ниже в формулах вместо t появляется $1-t$).

Мы будем считать PX пунктированным пространством, принимая за его отмеченную точку постоянный путь $\theta_{x_0}: t \rightarrow x_0$.

Подобно конусу C^*X пространство PX стягиваемо (соответствующее стягивание задается соответствием $u \mapsto u_\tau$, $u \in PX$, $\tau \in I$, где u_τ — путь, определенный формулой $u_\tau(t) = u((1-\tau)t)$, $t \in I$).

Ясно, что любое пунктированное отображение $f: X \rightarrow Y$ определяет по формуле:

$$((Pf)u)(t) = f(u(t)), \quad u \in PX, t \in I,$$

непрерывное пунктированное отображение $Pf: PX \rightarrow PY$, и соответствия $X \mapsto PX$, $f \mapsto Pf$ составляют функтор из TOP^* в TOP^* .

Легко видеть, что подобно функторам S^* и Ω функторы C^* и P сопряжены, т. е. для любых пунктированных пространств X и Y имеет место естественное (по X и Y) биективное отображение

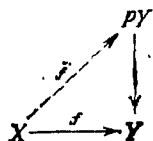
$$\text{TOP}^*(C^*X, Y) \xrightarrow{\cong} \text{TOP}^*(X, PY)$$

(каждому отображению $f: C^*X \rightarrow Y$ отвечает отображение $g: X \rightarrow PY$, определенное формулой $g(x)(t) = f[x, 1-t]$, $x \in X$, $t \in I$). Однако, в отличие от случая функторов S^* и Ω , переход к гомотопической категории $[\text{TOP}^*]$ имеет для функторов C^* и P мало смысла, поскольку для любых пунктированных пространств X и Y множества $[C^*X, Y]^*$ и $[X, PY]^*$ являются ввиду стягиваемости пространств C^*X и PY одноэлементными множествами.

Если пространство X стягиваемо, то каждое стягивание $X \times I \rightarrow X$, интерпретированное как отображение $X \rightarrow X^I$, будет (после замены t на $1-t$) отображением в PX , обладающим тем свойством, что его композиция с серровским расслоением $\omega_1: PX \rightarrow X$, $u \mapsto u(1)$, является тождественным отображением id_X , т. е. будет сечением расслоения ω_1 . Обратно, ясно, что любое сечение $X \rightarrow PX$ расслоения ω_1 , рассматриваемое как отображение в X^I , будет пунктированной гомотопией, связывающей отображение const_X с отображением id_X , т. е. после замены t на $1-t$ будет стягиванием пространства X . Таким образом, пространство X тогда и только тогда стягиваемо, когда серровское расслоение $\omega_1: PX \rightarrow X$ обладает сечением $s: X \rightarrow PX$. (Можно показать, что это сечение обладает, кроме того, тем свойством, что $\text{id} \sim s \circ p$, причем соответствующую гомотопию $f_t: PX \rightarrow PX$ можно выбрать так, чтобы для любого $t \in I$ имело место равенство $p \circ f_t = p$. В введенной в Дополнении к лекции 2 терми-

нологии это означает, что пространство X тогда и только тогда стягиваемо, когда серровское расслоение $\omega_1: PX \rightarrow X$ коллапсируемо. Это уточнение двойственно утверждению для конусов, получающемуся заменой ретрактов строгими деформационными ретрактами, и доказывается двойственным образом.)

Теперь ясно, что пунктированное отображение $f: X \rightarrow Y$ тогда и только тогда гомотопно нулю, когда оно может быть поднято в PY :



Замечание о терминологии. Дж. У. Уайтхед [19] предостерегает от употребления для пространства PX термина *коконус*. Хотя мы не видим в этом термине особого криминала, но от его использования мы все же воздержимся. (Быть может, пространство PX следует называть «нусом»?)

Пунктированное отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *пунктированной гомотопической эквивалентностью* (или *гомотопической эквивалентностью категории TOP^**), если существует такое пунктированное отображение $g: Y \rightarrow X$ (*обратная пунктированная гомотопическая эквивалентность*), что $f \circ g \sim \text{id}$ и $g \circ f \sim \text{id}$.

Конечно, любая пунктированная гомотопическая эквивалентность будет и обычной гомотопической эквивалентностью (гомотопической эквивалентностью категории TOP). Для гладко пунктированных пространств обратное также верно:

Предложение 1. Если пунктированные пространства (X, x_0) и (Y, y_0) гладко пунктированы, то каждое пунктированное отображение $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$, являющееся гомотопической эквивалентностью категории TOP , будет и пунктированной гомотопической эквивалентностью.

Таким образом, кажущийся двусмысленным термин «пунктированная гомотопическая эквивалентность» на самом деле таковым не является (по крайней мере для гладко пунктированных пространств).

Замечание 2. Если пространство (X', x'_0) получено из пространства (X, x_0) приклеиванием вибриссы, то в случае, когда пространство (X, x_0) гладко пунктировано, деформационная ретракция $X' \rightarrow X$ будет в силу предложения 1 пунктированной гомотопической эквивалентностью. Таким образом, как и следовало ожидать, приклеивание вибриссы к гладко пунктированному пространству не изменяет его пунктированного гомотопического типа. (Напротив, легко видеть, что если пространство (X, x_0) не гладко пунктировано, то пространство (X', x'_0) не может быть ему пунктированно гомотопически эквивалентно).

Доказательству предложения 1 мы предположим две леммы.

Лемма 2. Если пунктированное пространство (X, x_0) гладко пунктировано, то для любого пунктированного пространства (Y, y_0) каждое отображение $f: X \rightarrow Y$, для которого точка $f(x_0)$ лежит в той же компоненте пространства Y , что и точка y_0 , гомотопно некоторому пунктированному отображению $(X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$.

Доказательство. По условию точку $f(x_0)$ можно соединить некоторым путем $u: I \rightarrow Y$ с точкой y_0 . Этот путь мы можем рассматривать как гомотопию отображения $f|_{\{x_0\}}$. Поэтому, согласно аксиоме о распространении гомотопии (применимой по условию к паре (X, x_0)), существует такая гомотопия $f_t: X \rightarrow Y$, что $f_t(x_0) = u(t)$ для любого $t \in I$. Поскольку $f_1(x_0) = u(1) = y_0$, отображение f_1 является пунктированным отображением $(X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$, гомотопным отображению f . $\square$

Лемма 3. Если пунктированное пространство (X, x_0) гладко пунктировано, то для любого пунктированного отображения $f: (X, x_0) \rightarrow (X, x_0)$, свободно гомотопного тождественному отображению id , существует такое пунктированное отображение $f': (X, x_0) \rightarrow (X, x_0)$, что $f' \circ f \sim \text{id}$.

Доказательство. Пусть $F: X \times I \rightarrow X$ — свободная гомотопия, связывающая отображение f с тождественным отображением id . Поскольку пара (X, x_0) является парой Борсука, существует такая гомотопия $f'_t: X \rightarrow X$, что $f'_0 = \text{id}$ и $f'_t(x_0) = F(x_0, t)$ для любого $t \in I$. Тогда формула

$$G(x, t) = \begin{cases} f'_{1-2t}(f(x)), & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ F(x, 2t-1), & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

определяет гомотопию $G: X \times I \rightarrow X$, связывающую отображение $f' \circ f$, где $f' = f'_1$, с отображением id . Поскольку пара $(X \times I, x_0 \times I)$ также является парой Борсука, существует такая гомотопия $\Phi: (X \times I) \times I \rightarrow X$ с начальным отображением G , что

$$\Phi(x_0, t, \tau) = \begin{cases} F(x_0, 1 - 2t(1 - \tau)), & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2 \\ F(x_0, 1 - 2(1 - t)(1 - \tau)), & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Тогда отображения

$$\begin{aligned} (x, \tau) &\mapsto \Phi(x, 0, \tau), & (x, t) &\mapsto \Phi(x, t, 1), \\ (x, \tau) &\mapsto \Phi(x, 1, 1 - \tau) \end{aligned}$$

будут пунктированными гомотопиями, последовательно связывающими отображение $f' \circ f: x \mapsto \Phi(x, 0, 0)$ с отображением $\text{id}: x \mapsto \Phi(x, 1, 0)$. $\square$

Замечание 3. Лемма 3 и предложение 2 лекции 2 являются частными случаями некоего общего утверждения двойственного лемме 2 из Дополнения к лекции 2.

Доказательство предложения 1. Пусть $\bar{g}: Y \rightarrow X$ — гомотопическая эквивалентность, обратная к гомотопической эквивалентности $f: X \xrightarrow{\sim} Y$. Тогда отображение $\bar{g} \circ f: X \rightarrow Y$ гомотопно тождественному отображению id , откуда следует, что точка $\bar{g}(y_0) = (\bar{g} \circ f)(x_0)$ лежит в той же компоненте пространства X , что и точка x_0 . Поэтому, согласно лемме 1, отображение $\bar{g}$ гомотопно некоторому пунктированному отображению $(Y, y_0) \mapsto (X, x_0)$. Следовательно, без ограничения общности мы можем предполагать отображение $\bar{g}$ пунктированным.

Но тогда гомотопное тождественному отображению $\bar{g} \circ f: X \rightarrow Y$ также пунктировано, и потому, согласно лемме 2, существует такое пунктированное отображение $h = (\bar{g} \circ f)': X \rightarrow X$, что $h \circ (\bar{g} \circ f) \sim \text{id}$. Этим доказано, что существует такое пунктированное отображение $g: Y \rightarrow X$ (а именно, отображение $g = h \circ \bar{g}$), что $g \circ f \sim \text{id}$.

Отображение g , конечно, также является гомотопической эквивалентностью (обратной к гомотопической эквивалентности f). Следовательно, по тем же соображениям для него в свою очередь существует такое пунктированное отображение $\bar{f}: X \rightarrow Y$, что $\bar{f} \circ g \sim \text{id}$. Но тогда

$\bar{f} \sim \bar{f} \circ g \circ f \sim f$ и, значит, $f \circ g \sim \text{id}$. Поэтому f является пунктированной гомотопической эквивалентностью (а g — обратной пунктированной гомотопической эквивалентностью). $\square$

Предложение 1 наводит на мысль, что отношение пунктированной гомотопности должно совпадать с отношением обычной гомотопности (хотя бы для гладко пунктированных пространств), т. е. что отображение

$$(2) \quad [X, Y]^* \rightarrow [X, Y],$$

возникающее при игнорировании отмеченных точек, биективно. Однако это предположение ложно и ситуация здесь на самом деле более сложная.

Действительно, для того чтобы отображение $f: X \rightarrow Y$ было гомотопно пунктированному отображению $(X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$, во всяком случае необходимо, чтобы отображение $\pi_0 f: \pi_0 X \rightarrow \pi_0 Y$ переводило компоненту пространства X , содержащую точку x_0 , в компоненту пространства Y , содержащую точку y_0 . Это означает, что образ отображения (2) заведомо содержится в подмножестве $[X, Y]_0$ множества $[X, Y]$, состоящем из гомотопических классов отображений $X \rightarrow Y$, удовлетворяющих последнему условию. Поскольку при несвязном Y подмножество $[X, Y]_0$ непременно является собственным подмножеством множества $[X, Y]$, мы видим, следовательно, что даже для надъективности отображения (2) необходимо предполагать пространство Y связным. Для несвязного же пространства Y вопрос о надъективности может стоять лишь по отношению к отображению

$$(3) \quad [X, Y]^* \rightarrow [X, Y]_0,$$

индуцированному отображением (2) (и, заметим, при связном Y совпадающему с отображением (2)).

Но ответ на этот вопрос в точности дается леммой 1. Таким образом, согласно этой лемме, *если пространство X гладко пунктировано, то для любого пунктированного пространства Y отображение (3) надъективно.*

В частности, *если пунктированное пространство X гладко пунктировано, а пунктированное пространство Y связно, то отображение (2) надъективно.*

Вопрос об инъективности отображения (2) (или, что то же самое, отображения (3)) требует некоторых приго-

товлений, потому что даже для самых «гладких» пространств отображение (2) может быть не инъективным, и исследование вопроса о строении прообразов элементов множества $[X, Y]$ при этом отображении является содержательной геометрической задачей.

Определение 3. Петли $u, v \in \Omega X$ пунктированного пространства (X, x_0) называются *гомотопными*, если они гомотопны относительно двухэлементного множества $\{0, 1\} \subset I$. Множество $[I, X]_{\text{rel}} \{0, 1\}$ всех классов $[u]$ гомотопных петель обозначается символом $\pi_1(X, x_0)$ (или просто $\pi_1 X$). Если множество $\pi_1(X, x_0)$ состоит только из одного элемента, т. е. если любые две петли пространства X гомотопны, то пунктированное пространство X называется *односвязным*.

В силу экспоненциального закона гомотопии из I в $X \text{ rel } \{0, 1\}$ отождествляются с путями пространства ΩX , и тем самым множество $\pi_1 X$ отождествляется с множеством $\pi_0 \Omega X$ всех компонент этого пространства:

$$\pi_1 X = \pi_0 \Omega X.$$

Но так как $\pi_0 K = [\text{pt}, K]$, то для каждого H -пространства (каждого H -моноида или каждой H -группы) K умножение переносится в его фактормножество $\pi_0 K$ и относительно этого умножения множество $\pi_0 K$ является унитарным (соответственно моноидом или группой).

Применительно к $K = \Omega X$ мы получаем, следовательно, что формула

$$(4) \quad [u][v] = [uv]$$

корректно определяет в $\pi_1 X$ умножение, по отношению к которому это множество является группой.

Группа $\pi_1 X$ называется *фундаментальной группой* пунктированного пространства X .

Единицей этой группы служит гомотопический класс $[0_{x_0}]$ постоянной петли $0_{x_0}: I \rightarrow X, t \mapsto x_0$, а элементом α^{-1} , обратным к элементу $\alpha = [u]$, является гомотопический класс α^{-1} обратной петли $u^{-1}: t \mapsto u(1-t)$.

Каждое пунктированное отображение $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ определяет по формуле $f_*: [u] \mapsto [f \circ u]$ отображение $f_*: \pi_1 X \rightarrow \pi_1 Y$, являющееся гомоморфизмом, и ясно, что соответствия $X \mapsto \pi_1 X, f \mapsto f_*$ составляют функтор из

категории TOP^* в категорию GROUPS . Иначе говоря, *умножение* (4) *естественно по* X .

Замечание 4. Интересно, что, как мы покажем в лекции 6, умножение (4), а также *инверсное умножение* $[u][v] = [vu]$ являются единственными естественными по X групповыми умножениями, которые можно определить в множестве $\pi_1 X$.

Напомним, что *действием* группы Π на объекте A некоторой категории $\mathbf{A}$ называется произвольный гомоморфизм $R: \Pi \rightarrow \text{Aut } A$, $\xi \mapsto R_\xi$, этой группы в группу $\text{Aut } A$ автоморфизмов объекта A . Если A является множеством (вообще говоря, снабженным дополнительной структурой), то образ элемента $\alpha \in A$ при автоморфизме R_ξ , $\xi \in \Pi$, обозначается обычно символом $\xi\alpha$. Возникающее отображение

$$\Pi \times A \rightarrow A, \quad (\xi, \alpha) \mapsto \xi\alpha,$$

также называется *действием*. Чтобы отображение $\Pi \times A \rightarrow A$ было действием, необходимо и достаточно, чтобы для любых элементов $\xi, \eta \in \Pi$, $\alpha \in A$ имело место равенство

$$\xi(\eta\alpha) = (\xi\eta)\alpha$$

и чтобы для любого элемента $\xi \in \Pi$ отображение $\alpha \mapsto \xi\alpha$, $\alpha \in A$, было морфизмом объекта A на себя. При $\mathbf{A} = \text{ENS}$ последнее условие выполнено автоматически, а, например, при $\mathbf{A} = \text{AB-GROUPS}$ оно означает, что для любых элементов $\alpha, \beta \in A$ должно быть выполнено равенство

$$\xi(\alpha + \beta) = \xi\alpha + \xi\beta.$$

Примером действия является действие $(\xi, \alpha) \mapsto \xi\alpha\xi^{-1}$ группы Π на себе посредством внутренних автоморфизмов.

Орбитой действия $\Pi \times A \rightarrow A$, определенной элементом $\alpha \in A$, называется множество $\Pi\alpha$ всех элементов вида $\xi\alpha$, $\xi \in \Pi$. Орбиты являются классами эквивалентности по отношению эквивалентности, в котором $\alpha \sim \beta$, если $\beta = \xi\alpha$ для некоторого $\xi \in \Pi$. Соответствующее фактормножество обозначается символом A/Π . Подчеркнем, что, вообще говоря, оно не наследует структуру объекта A . Например, если A — группа, то A/Π будет, вообще говоря, лишь пунктированным множеством (отмеченной точкой которого является орбита единицы, являющаяся, кстати сказать, одноэлементным множеством).

Мы применим эти общие определения к случаю, когда группой Π является фундаментальная группа $\pi_1 Y$, а мно-

жеством A — множество $[X, Y]^* = [(X, x_0), (Y, y_0)]$ гомотопических классов отображений *гладко пунктированного* пространства (X, x_0) в пространство (Y, y_0) .

Пусть $\xi = [u] \in \pi_1 Y$ и $\alpha = [f]^* \in [X, Y]^*$. Поскольку пространство (X, x_0) гладко пунктировано, существует такая гомотопия $f_t: X \rightarrow Y$, что $f_0 = f$ и $f_t(x_0) = u(1-t)$ для любого $t \in I$ (см. выше доказательство леммы 1). Пусть $[v] = [u]$ и $[g]^* = [f]^*$, и пусть $g_t: X \rightarrow Y$ — такая гомотопия, что $g_0 = g$ и $g_t(x_0) = v(1-t)$ для любого $t \in I$. Эта гомотопия вместе с гомотопией f_t и гомотопией $w_\tau: I \rightarrow Y \text{ rel } \{0, 1\}$, связывающей u с v , определяет по формуле

$$h_t(x, \tau) = \begin{cases} f_t(x), & \text{если } \tau = 0, \\ w_\tau(1-t), & \text{если } x = x_0, \\ g_t(x), & \text{если } \tau = 1, \end{cases}$$

некоторую гомотопию $h_\tau: X_{pt} \rightarrow Y$, где в соответствии с введенными в лекции 2 обозначениями $X_{pt} = (X \times 0) \cup (x_0 \times I) \cup (X \times 1)$. Так как отображение h_0 является ограничением на X_{pt} гомотопии $\text{rel } \{x_0\}$, связывающей отображения f и g , и так как, согласно лемме 3 лекции 2, пара $(X \times I, X_{pt})$ является парой Борсука, то гомотопия h_t распространяется до некоторой гомотопии $\bar{h}_t: X \times I \rightarrow Y$. Концевое отображение $\bar{h}_1$ этой гомотопии будет гомотопией $\text{rel } \{x_0\}$, связывающей отображения f_1 и g_1 . Этим доказано, что класс $[f_1]^*$ отображения f_1 зависит только от классов $\xi = [u]$ и $\alpha = [f]^*$, а не от их представителей u и f . Поэтому, обозначив его через $\xi\alpha$, мы корректно определим некоторое отображение $(\xi, \alpha) \mapsto \xi\alpha$ из $\pi_1 Y \times [X, Y]^*$ в $[X, Y]^*$, являющееся, как показывает автоматическая проверка, действием группы $\pi_1 Y$ на множестве $[X, Y]^*$.

Построенное действие мы будем называть *каноническим действием* группы $\pi_1 Y$ на множестве $[X, Y]^*$.

Предложение 2. *Орбиты канонического действия*

$$\pi_1 Y \times [X, Y]^* \rightarrow [X, Y]^*$$

в точности совпадают с прообразами при отображении (2) гомотопических классов из $[X, Y]^$.*

Доказательство. По определению, если $\alpha = [f]^*$ и $\xi\alpha = [f_1]^*$, то $f \sim f_1$. Обратно, если $f \sim f_1$ и $f_t: X \rightarrow Y$ — гомотопия, связывающая f с f_1 , то $[f_1]^* = [u][f]^*$, где $u: I \rightarrow Y$ — петля $t \mapsto f_{1-t}(x_0)$. $\square$

Предложение 2 означает, что имеет место равенство

$$(5) \quad [X, Y]_0 = [X, Y]^* / \pi_1 Y,$$

где $[X, Y]^* / \pi_1 Y$ — фактормножество множества $[X, Y]^*$ по действию группы $\pi_1 Y$. В частности, мы видим, что *если пространство Y связно и односвязно, то $[X, Y] = [X, Y]^*$* .

Замечание 5. Если X_α и Y_β — компоненты пространств X и Y соответственно, то множество $[X, Y]$ естественным образом представляется в виде дизъюнктивного объединения множеств $[X_\alpha, Y_\beta]$. Аналогично, если X_{α_0} и Y_{β_0} — компоненты пространств X и Y , содержащие отмеченные точки, то множество $[X, Y]^*$ является дизъюнктивным объединением множества $[X_{\alpha_0}, Y_{\beta_0}]^*$ и множеств $[X_\alpha, Y_\beta]$ при $(\alpha, \beta) \neq (\alpha_0, \beta_0)$. При этом на последних множествах отображение (2) является тождественным отображением (в частности, группа $\pi_1 Y$ действует на них тождественно), так что интерес представляет лишь отображение

$$[X_{\alpha_0}, Y_{\beta_0}]^* \rightarrow [X_{\alpha_0}, Y_{\beta_0}].$$

Поскольку группа $\pi_1 Y$ естественным образом отождествляется с группой $\pi_1 Y_{\beta_0}$, мы видим, следовательно, что все сводится к случаю связных пространств X и Y . Именно, умея вычислять множества $[X, Y]^*$ для связных пунктированных пространств X и Y , мы будем знать для тех же пространств множества $[X, Y]$, а потому будем знать эти множества (вместе с множествами $[X, Y]^*$) и для любых пространств X и Y . Это объясняет, почему в теории гомотопий ограничение связными пространствами обычно считается вполне достаточным и общности, по существу, не уменьшающим. Когда же на практике возникает необходимость в применении результатов теории гомотопии к несвязным пространствам, они без труда нужным образом видоизменяются.

Аналогично, хотя главный геометрический интерес имеет, конечно, теория гомотопий в категории TOP , а переход в категорию TOP' вызван лишь жесткой алгебраической необходимостью, но в свете всего вышесказанного мы отныне можем сосредоточить все внимание на категории TOP' , держа «в уме» возможное игнорирование отмеченных точек.

Замечание 6. Для любого пунктированного пространства X и любой гладко пунктированной (т. е. имеющей невырожденную коединицу) H -когруппы K каноническое действие группы $\pi_1 X$ является действием на множестве

элементов группы $[K, X]^*$. Оказывается, что это действие согласовано со структурой группы на $[K, X]^*$, т. е. для любого элемента $\xi = [u]$ группы $\pi_1 X$ отображение $\alpha \mapsto \xi \alpha$, $\alpha \in [K, X]^*$, является автоморфизмом группы $[K, X]^*$. Действительно, пусть $f: K \rightarrow X$, $g: K \rightarrow X$ — произвольные пунктированные отображения, а $\alpha = [f]^*$ и $\beta = [g]^*$ — их гомотопические классы. По определению $\xi \alpha = [f_1]^*$ и $\xi \beta = [g_1]^*$, где f_1 и g_1 — концевые отображения таких гомотопий f_t , $g_t: K \rightarrow X$, что $f_0 = f$, $g_0 = g$ и $f_t(e) = g_t(e) = u(1-t)$, где e — коединица H -когруппы K . Но тогда отображения

$$f_t + g_t = m \circ (f_t \vee g_t): K \rightarrow X, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

будут, очевидно, составлять гомотопию, связывающую отображение $f + g = m \circ (f \vee g)$ с отображением $f_1 + g_1 = m \circ (f_1 \vee g_1)$ и удовлетворяющую соотношению $(f_t + g_t)(e) = u(1-t)$. Поскольку, по определению, $[f + g]^* = \alpha + \beta$ и $[f_1 + g_1]^* = \xi \alpha + \xi \beta$, этим доказано, что $\xi \alpha + \xi \beta = \xi(\alpha + \beta)$. Следовательно, отображение $\alpha \mapsto \xi \alpha$ является автоморфизмом. $\square$

Замечание 7. Конструкция канонического действия группы $\pi_1 Y$ на множестве $[X, Y]^*$ допускает небольшое обобщение, которое часто бывает полезно.

Пусть в топологическом пространстве Y выбраны две точки y_0 и y_1 , лежащие в одной и той же компоненте связности. Отметив точку y_0 , мы получим пунктированное пространство (Y, y_0) , а отметив точку y_1 — пунктированное пространство (Y, y_1) . В соответствии с этим для любого пунктированного пространства (X, x_0) будут определены два множества пунктированных гомотопических классов

$$[(X, x_0), (Y, y_0)] \text{ и } [(X, x_0), (Y, y_1)].$$

Пусть теперь $u: I \rightarrow Y$ — произвольный путь в Y , соединяющий точку y_0 с точкой y_1 . Если пространство (X, x_0) гладко пунктировано, то для любого отображения $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_1)$ существует такая свободная гомотопия $f_t: X \rightarrow Y$, что $f_0 = f$ и $f_t(x_0) = u(1-t)$ (и, значит, $f_1(x_0) = y_0$, т. е. $f_1: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$). Рассуждения, лишь тривиально отличающиеся от использованных выше, показывают теперь, что класс $[f_1]^* \in [(X, x_0), (Y, y_0)]$ зависит лишь от класса $[f]^* \in [(X, x_0), (Y, y_1)]$ (и от класса $[u] \in \{0, 1\}$ пути u) и что возникающее отображение

$$(6) \quad [(X, x_0), (Y, y_1)] \rightarrow [(X, x_0), (Y, y_0)]$$

является биективным отображением множества $[(X, x_0), (Y, y_1)]$ на множество $[(X, x_0), (Y, y_0)]$.

Перенос на этот случай введенные выше обозначения, мы будем класс $[f_1]$ обозначать символом $\xi\alpha$, где $\alpha = [f]$ и $\xi = [u] \text{ rel } \{0, 1\}$.

Если путь u соединяет точку y_0 с точкой y_1 , а путь v — точку y_1 с точкой y_2 , то формула (18) лекции 3 будет корректно определять их *произведение* uv , являющееся путем, соединяющим точку y_0 с точкой y_2 , и ясно, что класс $\text{rel } \{0, 1\}$ пути uv зависит только от классов ξ и η путей u и v . Этот класс называется *произведением* классов ξ и η и обозначается символом $\xi\eta$.

Если теперь $\alpha \in [(X, x_0), (Y, y_2)]$, то, как показывает автоматическая проверка, будет иметь место равенство $(\xi\eta)\alpha = \xi(\eta\alpha)$.

В случае, когда (X, x_0) является Н-когруппой (или хотя бы Н-коунитоидом), то же самое рассуждение, что и выше, показывает, что *отображение* (6) является *изоморфизмом групп (унитоидов)*.

Подчеркнем, что отображение (6) зависит от пути u (или, точнее, от его класса $\xi = [u] \text{ rel } \{0, 1\}$), и при замене пути u другим (не гомотопным ему) путем может измениться.

Замечание 8. Описанная ситуация допускает элегантную общеалгебраическую трактовку.

Напомним, что *группоидом* называется категория, все морфизмы которой являются изоморфизмами. Для любой категории A ансамблем (или *локальной системой*) объектов категории A над группоидом Π называется произвольный функтор из Π в A . Таким образом, ансамбль R сопоставляет каждому объекту $x \in \Pi$ некоторый объект $R_x \in A$ и каждому морфизму $\xi: x \rightarrow y$ — морфизм $R_\xi: R_x \rightarrow R_y$ (автоматически являющийся изоморфизмом), причем $R_{\xi\eta} = R_\xi \circ R_\eta$ и $R_{\text{id}} = \text{id}$.

Примером группоида может служить *фундаментальный группоид* ΠY произвольного топологического пространства Y , объектами которого являются точки пространства Y , а морфизмами — гомотопические классы $\text{rel } \{0, 1\}$ путей $u: I \rightarrow Y$. В этом группоиде отношение $\xi: y \rightarrow x$ означает, что пути класса ξ соединяют точку x с точкой y , а композицией морфизмов η и ξ является произведение $\xi\eta$ классов ξ и η .

Ансамбли над группоидом ΠY называются ансамблями (локальными системами) *над пространством* Y .

В этой терминологии утверждения замечания 7 означают, что для любого гладко пунктированного пространства (X, x_0) и любого топологического пространства Y множества $R_y = [(X, x_0), (Y, y)]$ вместе с отображениями $R_\xi: \alpha \mapsto \xi\alpha$ составляют ансамбль множеств над пространством Y , являющийся ансамблем групп (унитоидов), когда пространство (X, x_0) представляет собой H -группу (H -коунитоид).

Для любого группоида Π и любого его объекта y_0 множество $\Pi(y_0, y_0)$ всех морфизмов $\xi: y_0 \rightarrow y_0$ является группой, и для любого ансамбля R множеств над Π эта группа действует на множестве R_{y_0} . Для случая $\Pi = \Pi Y$ группа $\Pi(y_0, y_0)$ является не чем иным, как фундаментальной группой $\pi_1(Y, y_0)$, а ее действие на множестве $R_{y_0} = [(X, x_0), (Y, y_0)]$ — каноническим действием из предложения 2.

Переход в категорию $\mathcal{TOP}^*$ требует, конечно, соответствующего видоизменения в понятиях H -групп, H -моноидов и H -унитоидов. Теперь каждый H -унитоид K (и, в частности, каждый H -моноид и каждую H -группу) мы должны считать пунктированным пространством с отмеченной точкой и соответственно этому предполагать умножение $m: K \times K \rightarrow K$ пунктированным отображением (что равносильно равенству $e^2 = e$), а гомотопии, связывающие отображения $x \mapsto xe$ и $x \mapsto ex$ с тождественным отображением, — пунктированными гомотопиями. Кроме того, для H -моноидов и H -групп диаграммы (7) и (8) лекции 3 должны быть теперь коммутативны с точностью до пунктированной гомотопии. Тогда для любого пунктированного пространства (X, x_0) множество $[X, K]^*$ будет унитоидом (соответственно моноидом или группой) с единицей $[0_e]^*$.

Согласно предложению 2, если пространство (X, x_0) гладко пунктировано, то на множестве $[X, K]^*$ действует группа $\pi_1 K$. Оказывается, что это действие тривиально, т. е. $\xi\alpha = \alpha$ для любых элементов $\alpha = [f]^* \in [X, K]^*$ и $\xi = [u] \in \pi_1 K$. Действительно, так как по условию отображение $x \mapsto xe$, $x \in K$, пунктированно гомотопно постоянному отображению, то отображение f пунктированно гомотопно отображению $g: x \mapsto f(x)e$, а петля u гомотопна петле $v: t \mapsto u(t)e$, т. е. $\alpha = [g]^*$ и $\xi = [v]$. С другой стороны, формула

$$g_t(x) = f(x)u(1-t)$$

определяет гомотопию $g_t: X \rightarrow K$, для которой $g_0 = g_1 = g$ и, следовательно, $g_t(x_0) = u(1-t)$. Следовательно, $\xi\alpha = [g_1] = [g] = \alpha$. $\square$

Так как каждый Н-унитоид (Н-моноид или Н-группа) категории TOP является, конечно, Н-унитоидом (соответственно Н-моноидом или Н-группой) категории TOP , то множество $[X, K]$ свободных гомотопических классов отображений $X \rightarrow K$ также будет унитоидом (соответственно моноидом или группой), а естественное отображение $[X, K] \rightarrow [X, K]$ будет гомоморфизмом. Поскольку же, согласно только что доказанному, это отображение биективно (если пространство X гладко пунктировано), мы окончательно получаем, что для *любого гладко пунктированного пространства X и любого пунктированного Н-унитоида (любого Н-моноида, любой Н-группы) K унитоиды (соответственно моноиды и группы) $[X, K]$ и $[X, K]$ естественно изоморфны.*

Утверждение, что точка $e \in K$ является гомотопической единицей Н-пространства K означает, что ограничение $m|_{K \vee K}$ умножения $m: K \times K \rightarrow K$ на букете $K \vee K = (K \times e) \cup (e \times K)$ гомотопно отображению схлопывания $\nabla = \text{id} \vee \text{id}: K \vee K \rightarrow K$, переводящему точки $x_I = (x, e)$ и $x_{II} = (e, x)$ этого букета в точку $x \in K$, а утверждение, что точка e является настоящей (строгой) единицей, означает, что $m|_{K \vee K} = \nabla$. Поэтому, если точка e невырождена и, значит, согласно предложению 3 лекции 1, пара $(K \times K, K \vee K) = (K, e)^*$ является парой Борсука, то умножение $m: K \times K \rightarrow K$ с гомотопической единицей e гомотопно умножению $m': K \times K \rightarrow K$, для которого эта единица является настоящей единицей.

При этом, если по отношению к умножению m пространство K было Н-моноидом, т. е. если отображения $m \circ (m \times \text{id})$ и $m \circ (\text{id} \times m)$ из $K \times K \times K$ в K были гомотопны, то пунктированные отображения $m' \circ (m' \times \text{id})$ и $m' \circ (\text{id} \times m')$ также будут гомотопны (свободно). Но ввиду невырожденности отмеченной точки пространства $K \times K \times K$ (доказываемой двукратным применением леммы 3 лекции 1) к этому пространству применимо утверждение о совпадении множеств $[X, K]$ и $[X, K]$. Поэтому пунктированные отображения $m' \circ (m' \times \text{id})$ и $m' \circ (\text{id} \times m')$ будут гомотопны и пунктированно. Таким образом, относительно умножения m' пространство K будет пунктированным Н-моноидом.

Наконец, если H -пространство K было H -группой, то по аналогичным соображениям отображение μ будет гомотопно пунктированному отображению μ' : $(K, e) \rightarrow (K, e)$, и для этого отображения диаграммы (8) лекции 3, в которых m и μ заменены на m' и μ' , будут пунктированно гомотопны, т. е. пунктированный H -моноид K с умножением m' будет пунктированной H -группой.

Этим доказано, что *каждое H -пространство (H -моноид или H -группа), гомотопическая единица которого невырождена, эквивалентно пунктированному H -пространству (H -моноиду, H -группе) с настоящей единицей.*

Без предположения о невырожденности единицы можно лишь утверждать, что H -пространство K гомотопически изоморфно пунктированному H -пространству K' с настоящей единицей. Для доказательства достаточно приклеить к K вибрирующую ветвь и применить предыдущее утверждение.

Мы видим, следовательно, что при переходе от категории TOP к категории TOP' мы в отношении функторов K^* ничего не теряем (и ничего не приобретаем), поскольку запас H -пространств K в обеих категориях практически один и тот же, и каждый из них дает одни и те же алгебраические объекты $K^*(X)$.

Кроме вопроса о связи между категориями пунктированных и непунктированных пространств, у нас от предыдущей лекции остался еще один маленький должок — гомотопическая эквивалентность приведенной и неприведенной надстроек. Хотя сам по себе последний вопрос довольно элементарен, мы воспользуемся случаем, чтобы изложить в связи с ним некоторые результаты общего характера, имеющие и самостоятельный интерес.

Для любой пары (X, A) пространство X/A называется ее *кослом*. Например, кослом пары $(X \times Y, X \vee Y)$ является смеш-произведение $X \wedge Y$, а кослом пары (CX, X) — надстройка SX .

Заметим, что кослой X/A произвольной пары (X, A) естественным образом является пунктированным пространством, отмеченной точкой которого является образ подпространства A при отображении факторизации $X \rightarrow X/A$.

Непрерывное отображение $\varphi: X \rightarrow Y$ называется *отображением* $(X, A) \rightarrow (Y, B)$ *пары* (X, A) *в пару* (Y, B) , если $\varphi(A) \subseteq B$. Композиция отображений пар $(X, A) \rightarrow (Y, B)$ и $(Y, B) \rightarrow (Z, C)$ является, очевидно, отображением $(X, A) \rightarrow (Z, C)$. Поэтому пары и их отображения состав-

ляют категорию. Мы будем обозначать эту категорию символом TOP_2 .

Ясно, что любое отображение пар $\varphi: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ индуцирует пунктированное отображение $\varphi': X/A \rightarrow Y/B$ их кослов, причем соответствия $(X, A) \mapsto X/A$, $\varphi \mapsto \varphi'$ составляют функтор из категории TOP_2 в категорию TOP .

Отображение пар $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ называется *относительным гомеоморфизмом*, если как отображение $X \rightarrow Y$ оно является эпиоморфизмом на $f(X)$, инъективно (и, значит, гомеоморфно) отображающим $X \setminus A$ на $Y \setminus B$. Без труда проверяется, что *отображение $X/A \rightarrow Y/B$, индуцированное относительным гомеоморфизмом $(X, A) \rightarrow (Y, B)$, представляет собой гомеоморфизм.*

Для любой пары (X, A) и любого надъективного отображения $g: A \rightarrow B$ отображение факторизации

$$\bar{f}: (X, A) \rightarrow (X \cup_g B, B)$$

является, очевидно, надъективным относительным гомеоморфизмом. Легко видеть, что верно и обратное.

Лемма 4. Для любого надъективного относительного гомеоморфизма $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ пространство Y гомеоморфно пространству $X \cup_g B$, где $g = f|_A$.

Доказательство. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X \cup B & & Y \\ \downarrow \varphi & \searrow f \cup i & \\ X \cup_g B & \xrightarrow{\hat{f}} & Y \end{array}$$

где $i: B \rightarrow Y$ — вложение, φ — отображение факторизации, а $\hat{f}$ — отображение, совпадающее на $X \setminus A = \varphi(X \setminus A)$ с отображением f , а на B — с отображением i . Так как эта диаграмма, очевидно, коммутативна, то в силу эпиоморфности отображения φ отображение $\hat{f}$ непрерывно. Кроме того, оно, очевидно, биективно, и для обратного отображения имеет место соотношение $\varphi = \hat{f}^{-1} \circ (f \cup i)$. Но надъективный относительный гомеоморфизм $\hat{f}$ является, по определению, эпиоморфным отображением, откуда непосредственно следует, что отображение $f \cup i$ также эпиоморфно. Следовательно, в силу непрерывности отображения φ отображение $\hat{f}^{-1}$ непрерывно, [и, значит, отображение $\hat{f}$ является гомеоморфизмом. $\square$]

Относительные гомеоморфизмы нам в основном интересны из-за следующего их свойства.

Лемма 5. Если пара (X, A) является парой Борсука, то для любого относительного гомеоморфизма $\varphi: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ пара (Y, B) также будет парой Борсука.

Доказательство. Утверждение, что пара (Y, B) является парой Борсука означает, что для каждой диаграммы вида

$$(7) \quad \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{j} & Y \\ \downarrow \varphi & \nearrow \bar{F} & \downarrow \varphi \\ Z' & \xrightarrow{\omega_\varphi} & Z \end{array} \quad (j \text{ — вложение})$$

существует замыкающая гомотопия $\bar{F}$. Но, надставив эту диаграмму диаграммой

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & X \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ B & \xrightarrow{j} & Y \end{array}$$

мы получим аналогичную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & X \\ \downarrow \varphi \circ \varphi & \nearrow \bar{G} & \downarrow \varphi \circ \omega \\ Z' & \xrightarrow{\omega_\varphi} & Z \end{array} \quad (i \text{ — вложение})$$

для пары (X, A) , для которой гомотопия $\bar{G}$ по условию существует. Так как отображение φ вне A инъективно, то формула

$$\bar{F}(g) = \begin{cases} F(y), & \text{если } y \in B, \\ \bar{G}(x), & \text{если } y \notin B \text{ и } y = \varphi(x), \end{cases}$$

корректно определяет некоторое отображение $\bar{F}: X \rightarrow Z'$, удовлетворяющее соотношению $\bar{G} = \bar{F} \circ \varphi$ и потому, в силу эпиморфности отображения φ , непрерывное. Для завершения доказательства остается заметить, что отображение $\bar{F}$ замыкает, очевидно, диаграмму (7). $\square$

Следствие 1. Кослой X/A произвольной пары Борсука (X, A) является гладко пунктированным пространством. $\square$

Следствие 2. Для любых гладко пунктированных пространств X и Y пространство

$$X \wedge Y = X \times Y / X \vee Y, \quad X \vee Y = (X \times y_0) \cup (x_0 \times Y),$$

также гладко пунктировано.

Доказательство. Согласно предложению 2 лекции 1 пара $(X \times Y, X \vee Y) = (X, x_0) \times (Y, y_0)$ является парой Борсука. $\square$

Следствие 3. Для любого гладко пунктированного пространства X пара (C^*X, X) является парой Борсука.

Доказательство. Отображение отождествления $(X \times I, X_{pt}) \rightarrow (C^*X, X)$ является относительным гомеоморфизмом, а пара $(X \times I, X_{pt})$ — парой Борсука (см. лемму 3 лекции 2). $\square$

Докажем теперь следующую важную лемму.

Лемма 6. Если для пары Борсука (X, A) подпространство A стягиваемо, то факторотображение

$$\xi: X \rightarrow X/A$$

является гомотопической эквивалентностью.

Доказательство. Пусть $f_t: A \rightarrow A$ — гомотопия, связывающая тождественное отображение $\text{id}_A: A \rightarrow A$ с постоянным отображением $\text{const}_{a_0}: A \rightarrow A$. Поскольку пара (X, A) является парой Борсука, существует такая гомотопия $\bar{f}_t: X \rightarrow X$, что $\bar{f}_0 = \text{id}_X$ и $\bar{f}_t \circ i = i \circ f_t$ для любого $t \in I$, где $i: A \rightarrow X$ — вложение. В частности, $\bar{f}_1 \circ i = i \circ \text{const} = \text{const}$, т. е. $\bar{f}_1|_A = \text{const}$. Поэтому отображение $\bar{f}_1$ индуцирует некоторое отображение $h: X/A \rightarrow X$, для которого $h \circ \xi = \bar{f}_1$. Следовательно, $\text{id} \sim h \circ \xi$. Аналогично, поскольку $\bar{f}_t(a) \in A$ для любого $a \in A$ и любого $t \in I$, гомотопия $\bar{f}_t$ индуцирует гомотопию $\bar{g}_t: X/A \rightarrow X/A$, для которой $\bar{g}_1 = \text{id}$ и $\bar{g}_1 = \xi \circ h$. Следовательно, $\text{id} \sim h \circ \phi$, и, значит, ξ и h являются взаимно обратными гомотопическими эквивалентностями. $\square$

Применим полученные общие результаты к надстройке SX и ее меридиану Sx_0 . Если пространство X гладко пунктировано, и потому в силу леммы 3 лекции пара $(X \times I, X_{pt})$, где $X_{pt} = (X \times 0) \cup (x_0 \times I) \cup (X \times 1)$, является парой Борсука, то, согласно лемме 5, пара (SX, Sx_0) с кослом $S^*X = SX/Sx_0$ также будет парой Борсука (отображение факторизации $(X \times I, X_{pt}) \rightarrow (SX, Sx_0)$ является

относительным гомеоморфизмом). Следовательно, поскольку меридиан Sx_0 , будучи гомеоморфен отрезку I , стягиваем, для любого гладко пунктированного пространства X отображение факторизации $SX \rightarrow S^*X$ является гомотопической эквивалентностью.

Кроме того, применив к паре $(X \times I, X_{pt})$ следствие 1 леммы 5, мы получаем, что если пространство X гладко пунктировано, то его приведенная надстройка S^*X также гладко пунктирована.

Аналогичное утверждение справедливо и для пространства петель, т. е. для любого гладко пунктированного пространства (X, x_0) пространство петель $(\Omega X, 0_{x_0})$ также гладко пунктировано. Действительно, если $\varphi: X \rightarrow I$ — такая непрерывная функция, что $\varphi^{-1}(0) = \{x_0\}$, то формула

$$\hat{\varphi}(u) = \max_{\tau} \varphi(u(\tau)), \quad 0 \leq \tau \leq 1,$$

будет определять непрерывную функцию $\hat{\varphi}: \Omega X \rightarrow I$, для которой $\hat{\varphi}^{-1}(0) = \{0_{x_0}\}$. При этом множество $\hat{U} = \Omega X \setminus \hat{\varphi}^{-1}(1)$ естественным образом отождествляется с пространством ΩU , где $U = X \setminus \varphi^{-1}(1)$, и потому для любой гомотопии $g_t: U \rightarrow X \text{ rel } \{x_0\}$ формула

$$\hat{g}_t(u) = g_t \circ u, \quad u \in \hat{U}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

будет корректно определять некоторую гомотопию $\hat{g}_t: \hat{U} \rightarrow \Omega X$. Кроме того, если $g_0(x) = x$ и $g_1(x) = x_0$ для любой точки $x \in U$, то $\hat{g}_0(u) = u$ и $\hat{g}_1(u) = 0_{x_0}$ для любого пути $u \in \hat{U}$. $\square$

Ясно, что это рассуждение сохраняется и для пространства $\Omega^M X$ муровских петель.

ДОПОЛНЕНИЕ

Лемма о произведении эпиоморфизмов. — Смеш гомотопических классов. — Ассоциативность смеш-умножения хаусдорфовых локально компактных пространств. — Гомотопическая ассоциативность смеш-умножения гладко пунктированных пространств. — Инвариант $\text{cat } X$. — Нильпотентность группы $[X, K]^*$. — Абелевость группы $[L, K]^*$. — Группы $[S^n X, \Omega^m Y]^*$.

В этом Дополнении мы рассмотрим два не связанных между собой вопроса: вопрос о свойствах смеш-умножения и вопрос об условиях, обеспечивающих нильпотентность или абелевость группы $[X, K]^*$.

Ключом к свойствам смеш-умножения является следующая лемма, которая будет нам нужна и во многих других вопросах.

Лемма 1. Если пространство Y хаусдорфово и локально компактно, то для любого эпиморфизма $\xi: P \rightarrow X$ отображение

$$\xi \times \text{id}: P \times Y \rightarrow X \times Y, \quad (p, y) \mapsto (\xi(p), y),$$

также является эпиморфизмом.

Доказательство. Введя в рассмотрение факторпространство $X \overset{\xi}{\times} Y$ пространства $P \times Y$ по отношению эквивалентности, в котором $(p_1, y_1) \sim (p_2, y_2)$ тогда и только тогда, когда $\xi(p_1) = \xi(p_2)$ и $y_1 = y_2$, мы представим отображение $\xi \times \text{id}$ в виде композиции отображения факторизации $k: P \times Y \rightarrow X \overset{\xi}{\times} Y$ и некоторого непрерывного биективного отображения $i: X \overset{\xi}{\times} Y \rightarrow X \times Y$:

$$\begin{array}{ccc} P \times Y & \xrightarrow{k} & X \overset{\xi}{\times} Y \\ & \searrow \xi \times \text{id} & \downarrow i \\ & & X \times Y \end{array}$$

Отображение $\xi \times \text{id}$ тогда и только тогда является эпиморфизмом, когда отображение i представляет собой гомеоморфизм.

Имея это в виду, мы рассмотрим отображение $\theta(k):$

$P \rightarrow (X \overset{\xi}{\times} Y)^Y$, ассоциированное с отображением k . По определению $[\theta(k)p](y) = k(p, y)$ для любых точек $p \in P$, $y \in Y$, и, значит, $\theta(k)p_1 = \theta(k)p_2$ тогда и только тогда, когда $\xi(p_1) = \xi(p_2)$. Поэтому в диаграмме

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\theta(k)} & (X \overset{\xi}{\times} Y)^Y \\ \downarrow \xi & \searrow \eta & \\ X & & \end{array}$$

существует замыкающее отображение $\eta: X \rightarrow (X \overset{\xi}{\times} Y)^Y$. Оно непрерывно, поскольку отображение $\theta(k)$ непрерывно, а отображение ξ является эпиморфизмом. Так как про-

пространство Y хаусдорфово и локально компактно, и, значит, отображение ассоциирования θ биективно, то существует такое отображение $j: X \times Y \rightarrow X \overset{\xi}{\times} Y$, что $\theta j = \eta$, а так как $\eta \circ \xi = \theta(k)$, то $j \circ (\xi \times \text{id}) = k$. Поэтому $(i \circ j) \circ (\xi \times \text{id}) = i \circ k = \xi \times \text{id}$, и потому $i \circ j = \text{id}$, так как отображение $\xi \times \text{id}$ надъективно. Следовательно, отображение i является гомеоморфизмом (с обратным гомеоморфизмом j), а отображение $\xi \times \text{id}$ — эпиоморфизмом.

Замечание 1. Хаусдорфовость и локальная компактность пространства Y в лемме 1 нам была нужна только для того, чтобы обеспечить биективность отображения θ . Поэтому, если для пространств X и Y верен экспоненциальный закон, т. е. если для каждого пространства B отображение ассоциирования

$$\theta: B^X \times Y \rightarrow (B^Y)^X$$

биективно, то для любого эпиоморфизма $\xi: P \rightarrow X$ отображение $\xi \times \text{id}: P \times Y \rightarrow X \times Y$ также является эпиоморфизмом.

Следствие. Если пространства X и Y хаусдорфовы и локально компактны, то для любых эпиоморфизмов $\xi: P \rightarrow X$ и $\eta: Q \rightarrow Y$ отображение

$$\xi \times \eta: P \times Q \rightarrow X \times Y, \quad (p, q) \mapsto (\xi(p), \eta(q)),$$

также является эпиоморфизмом.

Доказательство. Достаточно, заметив, что $\xi \times \eta = (\xi \times \text{id}) \circ (\text{id} \times \eta)$, учесть, что композиция двух эпиоморфизмов является эпиоморфизмом. $\square$

Ясно, что для любых пунктированных пространств A, B, X, Y и любых пунктированных отображений $f: A \rightarrow X$, $g: B \rightarrow Y$ формула $a \wedge b \mapsto f(a) \wedge f(b)$, $a \in A, b \in B$, корректно определяет пунктированное отображение

$$f \wedge g: A \wedge B \rightarrow X \wedge Y,$$

причем соответствия $(X, Y) \mapsto X \wedge Y$, $(f, g) \mapsto f \wedge g$ составляют двуместный функтор из TOP^* в TOP^* , ковариантный по обоим аргументам.

Предложение 1. Для любых гомотопий $f_t: A \rightarrow X$ и $g_t: B \rightarrow Y$ отображения $f_t \wedge g_t: A \wedge B \rightarrow X \wedge Y$ также составляют гомотопию.

Доказательство. Нужно показать, что отображение

$$H: (A \wedge B) \times I \rightarrow X \wedge Y, (a_t \wedge b, t) \mapsto f_t(a) \wedge g_t(b),$$

непрерывно. Но если $j': A \times B \rightarrow A \wedge B$ и $j: X \times Y \rightarrow X \wedge Y$ — канонические отображения факторизации, то имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} (A \times B) \times I & \xrightarrow{\bar{H}} & X \times Y \\ j' \times \text{id} \downarrow & & \downarrow j \\ (A \wedge B) \times I & \xrightarrow{H} & X \wedge Y \end{array}$$

отображение $\bar{H}$ которой определено формулой $\bar{H}((a, b), t) = (f_t(a), g_t(b))$ и потому непрерывно. Следовательно, отображение $H \circ (j \times \text{id}) = j \circ \bar{H}$ непрерывно, а так как, согласно лемме 1, отображение $j \times \text{id}$ является эпиморфизмом, то непрерывно и отображение H . $\square$

Из предложения 1 непосредственно следует, что для любых гомотопических классов

$$\alpha = [f]^* \in [A, X]^*, \quad f: A \rightarrow X,$$

$$\text{и} \quad \beta = [g]^* \in [B, Y]^*, \quad g: B \rightarrow Y,$$

формула

$$\alpha \wedge \beta = [f \wedge g]^*$$

корректно определяет гомотопический класс

$$\alpha \wedge \beta \in [A \wedge B, X \wedge Y]^*,$$

который называется *смеш-произведением* классов α и β .

Очевидно, что соответствия $(X, Y) \mapsto X \wedge Y$, $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta$ составляют двуместный функтор из $[\text{TOP}^*]$ в $[\text{TOP}^*]$ (гомотопизацию функтора $\wedge$ из TOP^* в TOP^*). В частности, это означает, что для любых пространств A, X, X', B, Y, Y' и любых гомотопических классов $\alpha \in [A, X]^*$, $\beta \in [B, Y]^*$, $\xi \in [X, X']^*$, $\eta \in [Y, Y']^*$ имеет место равенство

$$(\alpha \wedge \beta) \circ (\xi \wedge \eta) = (\alpha \circ \xi) \wedge (\beta \circ \eta).$$

Ясно, что для любых трех пунктированных пространств X, Y и Z соответствия

$$x_I \wedge z \mapsto (x \wedge z)_I, \quad y_{II} \wedge z \mapsto (y \wedge z)_{II}$$

определяют канонический гомеоморфизм

$$(X \wedge Y) \wedge Z \mapsto (X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z),$$

обладающий свойством естественности, т. е. такой, что для любых отображений $f: A \rightarrow X$, $g: B \rightarrow Y$, $h: C \rightarrow Z$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} (A \vee B) \wedge C & \xrightarrow{=} & (A \wedge C) \vee (B \wedge C) \\ (f \vee g) \wedge h \downarrow & & \downarrow (f \wedge h) \vee (g \wedge h) \\ (X \vee Y) \wedge Z & \xrightarrow{=} & (X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z). \end{array}$$

Пространства $(X \vee Y) \wedge Z$ и $(X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z)$ мы будем в дальнейшем всегда отождествлять посредством этого гомеоморфизма.

В частности, это позволяет нам для любой H -когруппы K с коумножением $m: K \rightarrow K \vee K$ и любого пунктированного пространства C трактовать отображение $m \wedge \text{id}$ как отображение $K \wedge C \rightarrow (K \wedge C) \vee (K \wedge C)$ и автоматическая, хотя и несколько утомительная, проверка показывает, что по отношению к этому отображению *пространство $K \wedge C$ является H -когруппой*.

Следовательно, для любых элементов $\alpha, \beta \in [K, X]^*$ и $\gamma \in [C, Z]^*$ будет определен элемент $\alpha \wedge \gamma + \beta \wedge \gamma \in [K \wedge C, X \wedge Z]^*$. С другой стороны, в группе $[K, X]^*$ будет определен элемент $\alpha + \beta$, а потому в группе $[K \wedge C, X \wedge Z]^*$ — элемент $(\alpha + \beta) \wedge \gamma$. Непосредственное вычисление, использующее определения, показывает, что эти элементы совпадают:

$$(\alpha + \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge \gamma + \beta \wedge \gamma.$$

Аналогичным образом доказывается, что для любого пунктированного пространства A и любой H -когруппы L с коумножением m пространство $A \wedge L$ является H -когруппой с коумножением $\text{id} \wedge m$, а для любых элементов $\alpha \in [A, X]^*$ и $\beta, \gamma \in [L, Y]^*$ имеет место равенство

$$\alpha \wedge (\beta + \gamma) = \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \gamma.$$

В этом смысле *смеш-умножение гомотопических классов дистрибутивно относительно сложения*.

Как уже было замечено в лекции 4, операция смеш-умножения пространств коммутативна, т. е. формула $x \wedge y \mapsto y \wedge x$ определяет канонический гомеоморфизм $X \wedge Y \rightarrow Y \wedge X$. Отождествив посредством этого гомеоморфизма пространства $X \wedge Y$ и $Y \wedge X$ (а также посредством аналогичного гомеоморфизма $a \wedge b \mapsto b \wedge a$ пространства $A \wedge B$ и $B \wedge A$), мы для любых элементов $\alpha \in [A, X]^*$, $\beta \in [B, Y]^*$ можем считать гомотопический класс $\beta \wedge \alpha$

элементом множества $[A \wedge B, X \wedge Y]^*$. Ясно, что тогда этот класс совпадает с классом $\alpha \wedge \beta$. В этом смысле *смеш-умножение гомотопических классов коммутативно*.

Аналогично, если для пространств X, Y, Z отображение (1) $(X \wedge Y) \wedge Z \rightarrow X \wedge (Y \wedge Z)$, $(x \wedge y) \wedge z \mapsto x \wedge (y \wedge z)$, является гомеоморфизмом (или хотя бы гомотопической эквивалентностью) и если аналогичным свойством обладают пространства A, B, C , то после соответствующих отождествлений для любых элементов $\alpha \in [A, X]^*$, $\beta \in [B, Y]^*$ и $\gamma \in [C, Z]^*$ будет иметь место равенство $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$. В этом смысле *смеш-умножение гомотопических классов ассоциативно*.

Для каких же пространств X, Y, Z отображение (1) является гомеоморфизмом? Для ответа на этот вопрос мы сначала сравним пространство $(X \wedge Y) \wedge Z$ с пространством $X \wedge Y \wedge Z$.

По определению пространство $X \wedge Y$ является факторпространством $X \times Y / X \vee Y$ пространства $X \times Y$, пространство $(X \wedge Y) \wedge Z$ — факторпространством $(X \wedge Y) \times Z / (X \wedge Y) \vee Z$ пространства $(X \wedge Y) \times Z$ и пространство $X \wedge Y \wedge Z$ — факторпространством $X \times Y \times Z / X \vee Y \vee Z$ пространства $X \times Y \times Z$. Пусть

$$\begin{aligned} j: X \times Y &\rightarrow X \wedge Y, \\ j': X \times Y \times Z &\rightarrow X \wedge Y \wedge Z, \\ j'': (X \wedge Y) \times Z &\rightarrow (X \wedge Y) \wedge Z \end{aligned}$$

— соответствующие отображения факторизации, и пусть

$$\xi: X \wedge Y \wedge Z \rightarrow (X \wedge Y) \wedge Z$$

— отображение $x \wedge y \wedge z \mapsto (x \wedge y) \wedge z$, индуцированное гомеоморфизмом

$$\bar{\xi}: X \times Y \times Z \rightarrow (X \times Y) \times Z, (x, y, z) \mapsto ((x, y), z).$$

Тогда имеет место коммутативная диаграмма

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} X \times Y \times Z & \xrightarrow{\bar{\xi}} & (X \times Y) \times Z \\ \downarrow j' & & \downarrow j \times \text{Id} \\ & & (X \wedge Y) \times Z \\ \downarrow j'' & & \downarrow j'' \\ X \wedge Y \wedge Z & \xrightarrow{\xi} & (X \wedge Y) \wedge Z \end{array}$$

из которой следует, что отображение $\xi \circ j'$ непрерывно. Так как отображение j' является эпиоморфизмом, то, следовательно, *отображение ξ непрерывно.*

Наша цель состоит в том, чтобы найти условия, при выполнении которых отображение ξ является гомеоморфизмом. Ясно, что это отображение биективно. Поэтому все сводится к вопросу о непрерывности обратного отображения ξ^{-1} . В силу коммутативности диаграммы (2) непрерывно (и даже эпиоморфно) отображение $\xi^{-1} \circ j'' \circ (j \times \text{id})$. Поскольку отображение j'' является эпиоморфизмом, отсюда следует, что отображение ξ^{-1} непрерывно тогда и только тогда, когда отображение $j \times \text{id}$ эпиоморфно, для чего в силу леммы 1 достаточно, чтобы пространство Z было хаусдорфово и локально компактно. Тем самым нами доказано следующее предложение.

Предложение 2. *Если пространство Z локально компактно и хаусдорфово, то для любых пространств X и Y каноническое отображение*

$$X \wedge Y \wedge Z \rightarrow (X \wedge Y) \wedge Z, \quad x \wedge y \wedge z \mapsto (x \wedge y) \wedge z,$$

является гомеоморфизмом. $\square$

Ясно, что аналог предложения 1 имеет место для канонического отображения

$$X \wedge Y \wedge Z \rightarrow X \wedge (Y \wedge Z), \quad x \wedge y \wedge z \mapsto x \wedge (y \wedge z),$$

т. е. это отображение гомеоморфно, если пространство X локально компактно и хаусдорфово.

Следствие 1. *Если пространства X и Z локально компактны и хаусдорфовы, то для любого пространства Y каноническое отображение*

$$(X \wedge Y) \wedge Z \rightarrow X \wedge (Y \wedge Z), \quad (x \wedge y) \wedge z \mapsto x \wedge (y \wedge z),$$

является гомеоморфизмом. $\square$

Таким образом, для локально компактных и хаусдорфовых пространств X и Z все три пространства $(X \wedge Y) \wedge Z$, $X \wedge (Y \wedge Z)$ и $X \wedge Y \wedge Z$ канонически гомеоморфны и потому могут быть друг с другом отождествлены. В этом смысле *смеш-умножение пространств ассоциативно.*

Следствие 2. *Если пространство Y локально компактно и хаусдорфово, то для любого пространства X канонические отображения*

$$\begin{aligned} S^*(X \wedge Y) &\rightarrow S^*X' \wedge Y', & [x \wedge y, t] &\mapsto [x, t] \wedge y, \\ S^*X \wedge Y &\rightarrow S^*(X \wedge Y), & [x, t] \wedge y &\mapsto [x \wedge y, t], \end{aligned}$$

являются взаимно обратными гомеоморфизмами.

Аналогично, если пространство X локально компактно и хаусдорфово, то для любого пространства Y обратными друг другу гомеоморфизмами будут канонические отображения

$$\begin{aligned} S^*(X \wedge Y) &\rightarrow X \wedge S^*Y, & [x \wedge y, t] &\mapsto x \wedge [y, t], \\ X \wedge S^*Y &\rightarrow S^*(X \wedge Y), & x \wedge [y, t] &\mapsto [x \wedge y, t]. \end{aligned}$$

Доказательство. Достаточно вспомнить, что $S^*X = S^1 \wedge X$. $\square$

Считая эти гомеоморфизмы отождествлениями, мы получаем, что для любых гомотопических классов $\alpha \in [A, X]^*$, $\beta \in [B, Y]^*$, $\gamma \in [C, Z]^*$ имеет место тождество

$$(3) \quad E(\alpha \wedge \beta) = E\alpha \wedge \beta = \alpha \wedge E\beta.$$

(См. замечание 5 лекции 3.)

К сожалению, в теории гомотопий мы не можем ограничиться предложением 2, поскольку многие естественно возникающие в этой теории пространства (например, пространства путей) не локально компактны. Поэтому мы вынуждены искать другие менее ограничительные условия, обеспечивающие ассоциативность смеш-умножения (хотя бы с точностью до гомотопической эквивалентности).

Предложение 3. Для любых гладко пунктированных пространств X, Y, Z каноническое биективное отображение

$$\xi: X \wedge Y \wedge Z \rightarrow (X \wedge Y) \wedge Z, \quad x \wedge y \wedge z \mapsto (x \wedge y) \wedge z,$$

является гомотопической эквивалентностью.

Доказательство. Согласно следствию 2 леммы 5 лекции 4 пространство $X \wedge Y$ гладко пунктировано, т. е. (лемма 4 и предложение 3 лекции 2) существует такая функция $\varphi: X \wedge Y \rightarrow I$, что $\varphi^{-1}(0) = x_0 \wedge y_0$, и такая гомотопия $g_t: X \wedge Y \rightarrow X \wedge Y$, что $g_0 = \text{id}$ и $g(x \wedge y) = x_0 \wedge y_0$ при $t > \varphi(x \wedge y)$. При этом гомотопия g_t индуцируется некоторой обладающей аналогичными свойствами гомотопией $\bar{g}_t: X \times Y \rightarrow X \times Y$, т. е. для любого $t \in I$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{\bar{g}_t} & X \times Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \wedge Y & \xrightarrow{g_t} & X \wedge Y \end{array}$$

где, как и выше, $j: X \times Y \rightarrow X \wedge Y$ — отображение факторизации (аналогичное утверждение справедливо, конечно, и для функции φ , но оно нам не понадобится).

Легко видеть, что формулы

$$\begin{aligned}\bar{h}_t(x \wedge y \wedge z) &= j'(\bar{g}_t(x, y), z), \\ h_t((x \wedge y) \wedge z) &= g_t(x \wedge y) \wedge z,\end{aligned}$$

где $j': X \times Y \times Z \rightarrow X \wedge Y \wedge Z$ — отображение факторизации, корректно определяют гомотопии

$$\bar{h}_t: X \wedge Y \wedge Z \rightarrow X \wedge Y \wedge Z, h_t: (X \wedge Y) \wedge Z \rightarrow (X \wedge Y) \wedge Z,$$

для которых имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X \wedge Y \wedge Z & \xrightarrow{\xi} & (X \wedge Y) \wedge Z \\ \bar{h}_t \downarrow & & \downarrow h_t \\ X \wedge Y \wedge Z & \xrightarrow{\xi} & (X \wedge Y) \wedge Z \end{array}$$

и которые обладают тем свойством, что $\bar{h}_0 = \text{id}$, $h_0 = \text{id}$.

Пусть

$$\eta = \xi^{-1} \circ h_1: (X \wedge Y) \wedge Z \rightarrow X \wedge Y \wedge Z.$$

Предполагая, что отображение η непрерывно и учитывая соотношение $\eta = \bar{h}_1 \circ \xi^{-1}$, мы немедленно получим, что

$$\xi \circ \eta = h_1 \sim h_0 = \text{id}, \quad \eta \circ \xi = \bar{h}_1 \sim \bar{h}_0 = \text{id},$$

т. е. что ξ и η являются взаимно обратными гомотопическими эквивалентностями.

Таким образом, для завершения доказательства предложения 3 нам осталось лишь доказать непрерывность отображения η .

С этой целью мы рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X \times Y \times Z & \xrightarrow{j'''} & (X \times Y) \wedge Z \\ j' \downarrow & & \downarrow j \wedge \text{id} \\ X \wedge Y \wedge Z & \xrightarrow{\xi} & (X \wedge Y) \wedge Z \end{array}$$

где j , j' и j''' — отображения факторизации, и ее ограничение на замкнутом подпространстве $A = \varphi^{-1}(1) \wedge Z$ пространства $(X \wedge Y) \wedge Z$, т. е. диаграмму

$$\begin{array}{ccc} B' & \xrightarrow{j'''|_{B'}} & A' \\ j'|_{B'} \downarrow & & \downarrow (j \wedge \text{id})|_{A'} \\ B & \xrightarrow{\xi|_B} & A \end{array}$$

где $A' = (j \wedge \text{id})^{-1} A$, $B = \xi^{-1} A$ и $B' = (j')^{-1} B$. Отображения $j'|_{B'}$ и j'''' последней диаграммы, являясь ограничением эпиоморфизмов, сами представляют собой эпиоморфизмы. Что же касается отображения $(\xi' \wedge \text{id})|_{A'}$, то оно, очевидно, будет гомеоморфизмом. Поэтому замыкающее отображение $\xi|_B$ этой диаграммы является эпиоморфизмом, т. е., будучи, кроме того, биективным непрерывным отображением, — гомеоморфизмом. Этим доказано, что отображение ξ^{-1} на замкнутом множестве A непрерывно. Поэтому на A непрерывно и отображение $\eta = \bar{h}_1 \circ \xi^{-1}$.

Пусть, далее, $U = (X \wedge Y) \setminus \varphi^{-1}(1)$ и $B = \bar{U} \wedge Z \subset (X \wedge Y) \wedge Z$. По условию $g_1(U) = x_0 \wedge y_0$ и, значит, по непрерывности, $g_1(\bar{U}) = x_0 \wedge y_0$ (точка $x_0 \wedge y_0$, будучи невырожденной, замкнута). Следовательно, $h_1(B) = (x_0 \wedge y_0) \wedge z_0$, и потому $\eta(B) = x_0 \wedge y_0 \wedge z_0$, т. е. $\eta|_B = \text{const}$. Значит, отображение η непрерывно и на B . Поскольку $A \cup B = (X \wedge Y) \wedge Z$, этим непрерывность отображения η полностью доказана. $\square$

Следствие 1. Для любых гладко пунктированных пространств X и Y отображение

$$S^*(X \wedge Y) \rightarrow S^*X \wedge Y, \quad [x \wedge y, t] \mapsto [x, t] \wedge y,$$

является гомотопической эквивалентностью.

Доказательство. Рассматриваемое отображение является композицией отображения

$$S^*(X \wedge Y) \rightarrow X \wedge Y \wedge S^1, \quad [x \wedge y, t] \mapsto x \wedge y \wedge e^{2\pi i t},$$

являющегося в силу предложения 2 (и отождествлений $S^*(X \wedge Y) = S^1 \wedge (X \wedge Y) = (X \wedge Y) \wedge S^1$) гомеоморфизмом, и отображения

$$X \wedge Y \wedge S^1 \mapsto S^*X \wedge Y, \quad x \wedge y \wedge e^{2\pi i t} \mapsto [x, t] \wedge y,$$

являющегося в силу предложения 3 (и отождествлений $X \wedge Y \wedge S^1 = S^1 \wedge X \wedge Y$, $S^1 \wedge X = S^*X$) гомотопической эквивалентностью. $\square$

Замечание 2. Подчеркнем, что отображение $[x, t] \wedge y \mapsto [x \wedge y, t]$, вообще говоря, не является непрерывным отображением.

Ясно, что аналог предложения 3 справедлив и для пространства $X \wedge (Y \wedge Z)$, т. е. (в предположении, что пространства X , Y , Z гладко пунктированы) каноническое отображение

$$X \wedge Y \wedge Z \rightarrow X \wedge (Y \wedge Z), \quad x \wedge y \wedge z \mapsto x \wedge (y \wedge z),$$

является гомотопической эквивалентностью. Следовательно, для гладко пунктированных пространств X , Y и Z пространства $(X \wedge Y) \wedge Z$ и $X \wedge (Y \wedge Z)$ гомотопически эквивалентны (хотя канонической гомотопической эквивалентности между ними, вообще говоря, не существует).

З а м е ч а н и е 3. Из полученных результатов немедленно вытекает, что свойство ассоциативности смеш-умножения гомотопических классов справедливо для любых гладко пунктированных пространств. То же самое верно и по отношению к тождествам (3).

Перейдем теперь к исследованию алгебраической структуры групп $[X, K]$.

Пусть X — произвольное пунктированное пространство с отмеченной точкой x_0 .

Определение 1. Говорят, что $\text{cat } X < n$, если

$$X = A_1 \cup \dots \cup A_n,$$

где $A_1, \dots, A_n$ — такие множества, что для любого $k = 1, \dots, n$ существует гомотопия $f_i^{(k)}: X \rightarrow X$, обладающая тем свойством, что $f_0^{(k)} = \text{id}$ и $f_1^{(k)}(A_k) = x_0$.

Если не существует ни одного n , для которого $\text{cat } X < n$, то пишут $\text{cat } X = \infty$. В противном случае наименьшее n , для которого $\text{cat } X < n + 1$, обозначается через $\text{cat } X$.

З а м е ч а н и е 4. В литературе имеется много различных вариантов определения 1. В самом первом варианте, предложенном Люстерником и Шнирельманом, требовалось лишь, чтобы для любого $k = 1, \dots, n$ вложение $A_k \rightarrow X$ было гомотопно постоянному отображению. Однако в «разумных» ситуациях все эти варианты равносильны. Например, для связного пространства X определение Люстерника и Шнирельмана перейдет в определение 1, если дополнительно потребовать, чтобы все пары (X, A_k) были замкнутыми парами Борсука.

З а м е ч а н и е 5. Кроме того, начиная с Люстерника и Шнирельмана и кончая самым последним временем, символом $\text{cat } X$ обозначалось число, на единицу большее.

Ясно, что если $\text{cat } X < \infty$, то пространство X связно, а $\text{cat } X = 0$ тогда и только тогда, когда пространство X стягиваемо.

Пусть X_k^n — подпространство пространства $X^n = \underbrace{X \times \dots \times X}_{n \text{ раз}}$, состоящее из точек, у которых не менее

$n-k$ координат равны x_0 . Например, $X_0^n = \{(x_0, \dots, x_0)\}$,
 $X_1^n = \underbrace{X \vee \dots \vee X}_{n \text{ раз}}$ и $X_n^n = X^n$.

Особое значение будет иметь для нас подпространство X_{n-1}^n . Ясно, что

$$(X^n, X_{n-1}^n) = (X, x_0)^n,$$

так что, в частности (см. следствие 1 из предложения 2 лекции 1), если точка x_0 невырождена, то пара (X^n, X_{n-1}^n) является парой Борсука.

Полезно также иметь в виду, что

$$X_{n-1}^n = \text{pr}_1^{-1}(x_0) \cup \dots \cup \text{pr}_n^{-1}(x_0),$$

где, как всегда, $\text{pr}_k: X^n \rightarrow X$ — проекция на k -й сомножитель.

Говорят, что отображение $f: X \rightarrow Y$ стягиваемо на подпространство $B \subset Y$, если существует такая гомотопия $f_t: X \rightarrow Y$, что $f_0 = f$ и $f_1(X) \subset B$.

Лемма 2. Неравенство $\text{cat } X < n$ имеет место тогда и только тогда, когда диагональное отображение

$$(4) \quad \Delta_X^{(n)} = \Delta: X \rightarrow X^n, x \mapsto (x, \dots, x),$$

стягиваемо на X_{n-1}^n .

Доказательство. Пусть $\text{cat } X < n$, и пусть $f_t^{(k)}: X \rightarrow X$, $k=1, \dots, n$, — такие гомотопии, что $f_0^{(k)} = \text{id}$ и $f_1^{(k)}(A_k) = x_0$, где $A_1 \cup \dots \cup A_n = X$. Тогда формула

$$f_t(x) = (f_t^{(1)}(x), \dots, f_t^{(n)}(x)), x \in X,$$

будет, очевидно, определять такую гомотопию $f_t: X \rightarrow X^n$, что $f_0 = \Delta$ и $f_1(X) \subset X_{n-1}^n$.

Обратно, пусть существует такая гомотопия $f_t: X \rightarrow X^n$, что $f_0 = \Delta$ и $f_1(X) \subset X_{n-1}^n$. Тогда для гомотопии $f_t^{(k)} = \text{pr}_k \circ f_t: X \rightarrow X$, $k=1, \dots, n$, будут иметь место соотношения $f_0^{(k)} = \text{id}$ и $f_1^{(k)}(A_k) = x_0$, где $A_k = (f_1^{(k)})^{-1}(x_0)$. Но так как $X_{n-1}^n = \text{pr}_1^{-1}(x_0) \cup \dots \cup \text{pr}_n^{-1}(x_0)$, то $X = A_1 \cup \dots \cup A_n$. Следовательно, $\text{cat } X < n$. $\square$

Следствие 1. Неравенство $\text{cat } X < 2$ имеет место тогда и только тогда, когда пространство X является Н-коунитойдом.

Доказательство. По определению пространство X является Н-коунитойдом, если существует такое отображение $m: X \rightarrow X \vee X \subset X \times X$, что оба отображения $\text{pr}_1 \circ m, \text{pr}_2 \circ m: X \rightarrow X$ гомотопны тождественному отображению. Соответствующие гомотопии составляют, очевидно,

гомотопию из X в $X \times X$, связывающую отображение m , рассматриваемое как отображение $X \rightarrow X \times X$, с диагональным отображением $\Delta: X \rightarrow X \times X$. Это показывает, что отображение m существует тогда и только тогда, когда отображение Δ стягиваемо на $X_1^2 = X \vee X$. $\square$

В частности, $\text{cat } S'X < 2$ для любого пространства X (причем $\text{cat } S'X = 1$, если $\text{cat } X > 0$). Впрочем, это непосредственно вытекает и из определения (поскольку пространство $S'X$ является объединением двух конусов, а каждый конус стягиваем).

Кроме того, мы видим, что каждый H -коунитойд является связным пространством.

Вычисление $\text{cat } X$ (при $\text{cat } X \geq 2$) является, вообще говоря, довольно трудной задачей.

Следствие 2 (теорема Басси). Для любых пространств X и Y имеет место неравенство

$$\text{cat}(X \times Y) \leq \text{cat } X + \text{cat } Y.$$

Доказательство. Если $f_t: X \rightarrow X^n$ — такая гомотопия, что $f_0 = \Delta_X^{(n)}$ и $f_1(X) \subset X_{n-1}^n$, а $g_t: Y \rightarrow Y^m$ — такая гомотопия, что $g_0 = \Delta_Y^{(m)}$ и $g_1(Y) \subset Y_{m-1}^m$, то формула

$$h_t(x, y) = (f_t(x), \Delta_X^m(x), g_t(y), \Delta_Y^n(y)), \quad x \in X, y \in Y, t \in I,$$

определяет такую гомотопию из $X \times Y$ в $X^n \times X^m \times Y^m \times Y^n = (X \times Y)^{n+m}$, что $h_0 = \Delta_{X \times Y}^{(n+m)}$ и $h_1(X \times Y) \subset X_{n-1}^n \times X^m \times Y_{m-1}^m \times Y^n \subset (X \times Y)_{n+m-1}^{n+m}$. Следовательно, если $\text{cat } X < n$ и $\text{cat } Y < m$, то $\text{cat}(X \times Y) < n + m$. $\square$

Напомним, что коммутатором элементов x, y группы G называется элемент

$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}.$$

Более общим образом можно определить коммутатор (точнее, правосторонний коммутатор) $[x_1, \dots, x_n]$ любых n элементов $x_1, \dots, x_n$ группы G индуктивной формулой

$$[x_1, \dots, x_n] = [[x_1, \dots, x_{n-1}], x_n].$$

При $n=1$ удобно считать, что $[x_1] = x_1$ для любого элемента $x_1 \in G$.

Если коммутатор любых n элементов группы G равен единице e этой группы, то пишут $\text{nil } G < n$. Группа G называется *нильпотентной*, если существует такое n , что $\text{nil } G < n$. Наименьшее n , для которого $\text{nil } G < n$ — 1

обозначается символом $\text{nil } G$. Если группа G не нильпотентна, то пишут $\text{nil } G = \infty$.

Замечание 6. Имеется много равносильных определений числа $\text{nil } G$. Мы выбрали наиболее нам удобное.

Ясно, что $\text{nil } G = 0$ тогда и только тогда, когда $G = \{e\}$, и $\text{nil } G = 1$ тогда и только тогда, когда группа G абелева.

Вместо коммутаторов удобно рассматривать соответствующие коммутаторные отображения

$$\varphi_n: G^n \rightarrow G,$$

определенные формулами

$$(5) \quad \begin{aligned} \varphi_1 &= \text{id}, \quad \varphi_2 = \varphi: (x, y) \mapsto xyx^{-1}y^{-1}, \\ \varphi_n &= \varphi \circ (\text{id} \times \varphi_{n-1}), \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Ясно, что $\text{nil } G < n$ тогда и только тогда, когда $\varphi_n = \text{const}$.

Очевидно, что $[e, x] = [x, e] = x$ для каждого элемента $x \in G$, т. е. $\varphi_2|_{G \vee G} = \text{const}$. Тривиальной индукцией отсюда следует, что $\varphi_n|_{G_{n-1}^n} = \text{const}$ для любого $n \geq 1$.

Все это, конечно, переносится на любые H -группы K , причем коммутаторные отображения $\varphi_n: K^n \rightarrow K$ определяются теми же формулами (5) (лишь формулу для φ нужно ввиду отсутствия ассоциативности писать со скобками: $\varphi: (x, y) \mapsto ((xy)x^{-1})y^{-1}$). При этом, если единица H -группы K невырождена, то

$$\varphi_n|_{K_{n-1}^n} \sim \text{const} \text{ для любого } n \geq 1.$$

Действительно, при $n=1$ и при $n=2$ это очевидно (и верно без предположения невырожденности единицы). Осуществим индуктивный переход от n к $n+1$, полагая для упрощения формул $\varphi_n|_{K_{n-1}^n} = \varphi'_n$.

Так как $(K^n, K_{n-1}^n) = (K, e)^n$, а пара (K, e) является по условию парой Борсука, то пара (K^n, K_{n-1}^n) также будет парой Борсука. Поэтому, если $\varphi'_n \sim \text{const}$, то существует такая гомотопия $f_t: K^n \rightarrow K$, что $f_0 = \varphi_n$ и $f_1(K_{n-1}^n) = e$. Следовательно, отображение $\varphi_{n+1} = \varphi \circ (\text{id} \times \varphi_n) = \varphi \circ (\text{id} \times f_0)$ будет гомотопно отображению $\varphi \circ (\text{id} \times f_1)$, а, значит, отображение φ'_{n+1} — отображению $\varphi \circ (\text{id} \times f_1)|_{K_n^{n+1}}$. Но так как $K_n^{n+1} = (K \times K_{n-1}^n) \cup (e \times K^n)$, то $(\text{id} \times f_1)(K_n^{n+1}) \subset (K \times e) \cup (e \times K) = K \vee K$, и потому

$$\varphi \circ (\text{id} \times f_1)|_{K_n^{n+1}} = (\varphi|_{K \vee K}) \circ ((\text{id} \times f_1)|_{K_n^{n+1}}).$$

Следовательно, $\varphi'_{n+1} \sim \text{const}$, ибо $\varphi|_{K \vee K} \sim \text{const}$. $\square$

Предложение 4. Для любой связной H -группы K с невырожденной единицей e и любого пунктированного пространства X имеет место неравенство

$$(6) \quad \text{nil}[X, K] \leq \text{cat } X.$$

В частности, если $\text{cat } X < \infty$, то группа $[X, K]$ нильпотентна.

Доказательство. Для произвольных отображений $g_k: X \rightarrow K$, $k = 1, \dots, n$, коммутатор их гомотопических классов задается, очевидно, отображением

$$(7) \quad X \xrightarrow{\Delta} X^n \xrightarrow{g_1 \times \dots \times g_n} K^n \xrightarrow{\varphi_n} K.$$

Ввиду того, что H -группа K связна, мы, согласно общим результатам лекции 4, без ограничения общности можем считать отображения g_k пунктированными. Но тогда отображение $g_1 \times \dots \times g_n$ будет переводить X^n в K^n , и, значит, будет иметь место коммутативная диаграмма вида

$$\begin{array}{ccc} X^n & \xrightarrow{g_1 \times \dots \times g_n} & K^n \\ i_X \uparrow & & \uparrow i_K \\ X_{n-1}^n & \xrightarrow{g} & K_{n-1}^n \end{array}$$

вертикальные стрелки которой являются вложениями. Поэтому, если $\text{cat } X < n$, т. е. если отображение Δ гомотопно отображению вида $i_X \circ f$, где $f: X \rightarrow X_{n-1}^n$, то отображение (7) будет гомотопно отображению

$$\varphi_n \circ (g_1 \times \dots \times g_n) \circ i_X \circ f = \varphi_n \circ i_K \circ g \circ f = \varphi_n' \circ g \circ f$$

и, значит (поскольку $\varphi_n' \sim \text{const}$), будет гомотопно постоянному отображению, т. е. его гомотопический класс будет единицей группы $[X, K]$. Таким образом, если $\text{cat } X < n$, то $\text{nil}[X, K] < n$, что равносильно неравенству (6). $\square$

З а м е ч а н и е 7. Неравенство (6) содержательно только при $\text{cat } X < \infty$. Поэтому $[X, K]$ можно в нем заменить на $[X, K]^*$ и в этой форме оно будет верно и для несвязных H -групп K .

Следствие. Для любой H -группы K и любого H -коунитоида L группа $[L, K]^*$ абелева. $\square$

Последний результат может быть обобщен и одновременно дуализирован.

Пусть L — произвольный H -коунитоид, а K — произвольное H -пространство (H -унитоид). Тогда в множестве $[L, K]^*$

будут определены две структуры унитарной — одна, возникающая из-за того, что L является H -коунитарной, а вторая — из-за того, что K является H -унитарной.

Предложение 5. Для любого H -коунитарной L и любого H -унитарной K указанные две структуры унитарной на множестве $[L, K]$ совпадают.

Этот унитарной является абелевым (коммутативным) моноидом.

В частности, если K является H -когруппой или L является H -группой, то $[L, K]$ будет абелевой группой.

Согласно общим определениям лекции 3 понятие унитарной имеет смысл над произвольной фм-категорией $\mathcal{C}$. В частности, поскольку категория унитарных представляет собой фм-категорию (произведением $G_1 \times G_2$ унитарных G_1 и G_2 является их прямое произведение как множеств с покомпонентной операцией умножения: $(\alpha_1, \alpha_2)(\beta_1, \beta_2) = (\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2)$), можно говорить об унитарных категории унитарных. По определению унитарной G (операцию в котором мы будем теперь записывать аддитивно и соответственно этому называть его единицу нулем) является унитарной категории унитарных, если задан гомоморфизм унитарных

$$(8) \quad G \times G \rightarrow G,$$

т. е. такое умножение $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha\beta$, что

$$(9) \quad \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = (\alpha_1 + \alpha_2)(\beta_1 + \beta_2)$$

для любых элементов $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in G$, причем элемент $0 \in G$ является по отношению к этому умножению единицей, т. е. $0\alpha = \alpha 0 = \alpha$ для любого элемента $\alpha \in G$.

Лемма 3. Каждый унитарной G категории унитарных является абелевым моноидом. Для любых элементов $\alpha, \beta \in G$ имеет место равенство

$$\alpha + \beta = \alpha\beta.$$

Доказательство. Имеем

$$\alpha + \beta = \alpha 0 + 0\beta = (\alpha + 0)(0 + \beta) = \alpha\beta.$$

Аналогично,

$$\alpha + \beta = 0\alpha + \beta 0 = (0 + \beta)(\alpha + 0) = \beta\alpha.$$

Наконец,

$$\begin{aligned} (\alpha\beta)\gamma &= \alpha\beta + \gamma = \alpha\beta + 0\gamma = \\ &= (\alpha + 0)(\beta + \gamma) = \alpha(\beta + \gamma) = \alpha(\beta\gamma). \quad \square \end{aligned}$$

Доказательство предложения 5. Согласно лемме 3 достаточно доказать, что унитар $G = [L, K]^*$ (с операцией, индуцированной коумножением $m_1: L \rightarrow L \vee L$) является унитаром категории унитаров (с операцией (8), индуцированной умножением $m: K \times K \rightarrow K$), т. е. что для любых элементов $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in G$ имеет место равенство (9) (тождества $0\alpha = \alpha 0 = \alpha$ имеют место по определению). Но для любых двух пунктированных отображений $f, g: L \rightarrow K$ отображение $f \times g: L \rightarrow K \times K$ определяется формулой

$$(f \times g)(x) = (f(x), g(x)), \quad x \in L,$$

а отображение $f \vee g: L \vee L \rightarrow K$ — формулой

$$(f \vee g)(z) = \begin{cases} f(x), & \text{если } z = x_I, \\ g(x), & \text{если } z = x_{II}, \end{cases} \quad z \in L \vee L$$

(мы отождествляем $L \vee L$ с $(L \times e) \cup (e \times L)$ и обозначаем (x, e) через x_I , а (e, x) через x_{II}). Поэтому для любых четырех пунктированных отображений $f_1, g_1, f_2, g_2: L \rightarrow K$ отображение $h = (f_1 \times g_1) \vee (f_2 \times g_2): L \vee L \rightarrow K \times K$ задается формулой

$$h(z) = \begin{cases} (f_1(x), g_1(x)), & \text{если } z = x_I, \\ (f_2(x), g_2(x)), & \text{если } z = x_{II}, \end{cases}$$

а отображение $h' = (f_1 \vee f_2) \times (g_1 \vee g_2)$ — формулой

$$\begin{aligned} h'(z) &= ((f_1 \vee f_2)(z), (g_1 \vee g_2)(z)) = \\ &= \begin{cases} (f_1(x), g_1(x)), & \text{если } z = x_I, \\ (f_2(x), g_2(x)), & \text{если } z = x_{II}. \end{cases} \end{aligned}$$

Мы видим, таким образом, что $h = h'$.

С другой стороны, по определению

$$\begin{aligned} [f]^* + [g]^* &= [(f \vee g) \circ m_1]^*, \\ [f]^* \cdot [g]^* &= [m \circ (f \times g)]^*, \end{aligned}$$

и потому, если $\alpha_1 = [f_1]^*$, $\beta_1 = [g_1]^*$, $\alpha_2 = [f_2]^*$, $\beta_2 = [g_2]^*$, то

$$\begin{aligned} \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 &= [m \circ h \circ m_1], \\ (\alpha_1 + \alpha_2)(\beta_1 + \beta_2) &= [m \circ h' \circ m_1]. \end{aligned}$$

Поскольку $h = h'$, этим доказано, что $\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 = (\alpha_1 + \alpha_2)(\beta_1 + \beta_2)$. $\square$

Следствие 1. Для любых двух пунктированных пространств X и Y группа $[S^*X, \Omega Y]^*$ абелева.

Поскольку функтор S^* действует из категории TOP^* в ту же категорию TOP^* , его можно неограниченно итерировать. Мы положим

$$S^0 X = X, S^{n+1} X = S^*(S^n X) \text{ при } n \geq 0,$$

(так что $S^1 X = S^* X$).

Аналогично определяются итерации функтора петель

$$\Omega^0 X = X, \Omega^{n+1} X = \Omega(\Omega^n X) \text{ при } n \geq 0.$$

При этом ввиду сопряженности фуикторов S^* и Ω , для любых пунктированных пространств X, Y и любых чисел $n \geq 0, m \geq 0$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} [X, \Omega^{n+m} Y]^* &= [S^1 X, \Omega^{n+m-1} Y]^* = \dots \\ &\dots = [S^n X, \Omega^m Y]^* = \dots = [S^{n+m} X, Y]^*. \end{aligned}$$

Следствие 2. При $n + m \geq 1$ множество $[S^n X, \Omega^m Y]^*$ обладает естественной (по X и Y) структурой группы. При $n + m \geq 2$ эта группа абелева. $\square$

Гомотопические группы.— Альтернативное определение гомотопических групп.— Индуктивное определение гомотопических групп.— Действие группы $\pi_1 X$ на группах $\pi_n X$.— Абелевы пространства.— Абелевость гомотопических групп при $n \geq 2$.— Аисамбль гомотопических групп.— Гомотопические группы абелевых пространств.— Асферичные пространства.— Гомотопическая последовательность расслоения.— Алгебраические свойства точных последовательностей.— Гомотопические группы накрывающих пространств.— Расслоение Хопфа.— Функториальность гомотопической последовательности расслоения.— Аксиоматическое описание гомотопических групп.

Простейшей конкретной H -когруппой безусловно является надстройка S^*S^{n-1} над единичной $(n-1)$ -мерной ($n > 0$) сферой S^{n-1} (в которой отмечена, скажем, точка $s_0 = (-1, 0, \dots, 0)$). Поскольку эта надстройка гомеоморфна n -мерной сфере S^n (см. замечание 4 лекции 3), мы получаем, следовательно, что для любого пунктированного пространства (X, x_0) множество

$$(1) \quad [(S^n, s_0), (X, x_0)] = [S^n, X]^*$$

является группой.

Определение 1. Группа (1) обозначается символом $\pi_n(X, x_0)$ (или просто $\pi_n X$) и называется n -мерной (или n -й) гомотопической группой пространства X .

Конечно, коумножение в S^n зависит от выбора гомеоморфизма $S^*S^{n-1} \rightarrow S^n$. Поэтому, чтобы фиксировать это коумножение (а значит, и структуру группы в $\pi_n X$), нужно раз навсегда фиксировать этот гомеоморфизм (хотя бы с точностью до гомотопии).

Мы выберем за гомеоморфизм $S^*S^{n-1} \rightarrow S^n$ гомеоморфизм d , определенный формулой (15) лекции 3. В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что при $n > 0$ сфера S^n отождествлена с надстройкой S^*S^{n-1} посредством этого гомеоморфизма и в соответствии с этим точку $d[x, t] \in S^n$, $x \in S^{n-1}$, $t \in I$, будем обозначать просто $[x, t]$.

Заметим, что $[s_0, t] = s_0$ для любого $t \in I$.

При $n = 0$ мы получаем не группу, а лишь пунктированное множество $[S^0, X]^*$ (отмеченной точкой которого является гомотопический класс постоянного отображения

$\text{const}: S^0 \rightarrow X$). Ясно, что $[S^0, X]^* = [\text{pt}, X]$, т. е. что множество $[S^0, X]^*$ является введенное в лекции 3 множество $\pi_0 X$ компонент пространства X (что, кстати, объясняет обозначение $\pi_0 X$ для этого множества).

Хотя множество $\pi_0 X$, вообще говоря, группой не является, мы все же будем позволять себе без оговорок говорить о гомотопических группах $\pi_n X$ для всех $n \geq 0$.

Операцию в группе $\pi_n X$, $n \geq 1$, мы будем обозначать знаком $+$ и называть *сложением* (за возможным исключением группы $\pi_1 X$; см. ниже). В связи с этим тот факт, что группа состоит только из одного элемента, мы будем записывать формулой $\pi_n X = 0$ (даже при $n = 0$ или $n = 1$).

Если элементы α и β группы $\pi_n X$ заданы отображениями $a: (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$ и $b: (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$, то их сумма $\alpha + \beta$ будет задаваться отображением $c = (a \vee b) \circ m: (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$, где m — коумножение $S^n \rightarrow S^n \vee S^n$, определенное формулой (16) лекции 3 (при $X = S^{n-1}$). В явном виде отображение c задается формулой

$$(2) \quad c[x, t] = \begin{cases} a[x, 2t], & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ b[x, 2t-1], & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

где в соответствии со сказанным выше $[x, t]$ обозначает $d[x, t]$, $x \in S^{n-1}$, $t \in I$.

Согласно общей теории функторов вида $[K, X]^*$ каждое пунктированное отображение $f: X \rightarrow Y$ определяет по формуле

$$f_*[a]^* = [f \circ a]^*, \quad a: (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0),$$

гомоморфизм $f_*: \pi_n X \rightarrow \pi_n Y$, обозначаемый также символом $\pi_n f$ (или f_n), причем соответствия $X \mapsto \pi_n X$, $f \mapsto f_*$ представляют собой функтор из категории TOP^* в категорию групп GROUPS :

$$\pi_n: \text{TOP}^* \rightarrow \text{GROUPS}$$

(при $n = 0$ — в категорию ENS^* пунктированных множеств). Мы будем называть этот функтор *функтором n -мерных гомотопических групп*.

В частности, вложение $X_0 \rightarrow X$ компоненты X_0 точки x_0 индуцирует гомоморфизм $\pi_n X_0 \rightarrow \pi_n X$. Ясно, что при $n > 0$ этот гомоморфизм является изоморфизмом.

Таким образом, в теории гомотопических групп мы без потери общности можем (при $n > 0$) ограничиться лишь связными пространствами X .

Конечно, при построении группы $\pi_n X$ сферу S^n можно заменить любым пространством, ей гомеоморфным (т. е. — в общепринятой терминологии — любой *топологической сферой* S^n). Следует только раз навсегда фиксировать определенный гомеоморфизм $S^n \rightarrow S^n$.

З а м е ч а н и е 1. Естественно, что гомеоморфизмы $S^n \rightarrow S^n$ достаточно задавать лишь с точностью до гомотопии. В лекции 12 мы покажем, что существует лишь два различных гомотопических класса таких гомеоморфизмов, которые можно отождествить с ориентациями сферы S^n . Следовательно, если пунктированная топологическая сфера S^n ориентирована, то каждое пунктированное отображение $S^n \rightarrow X$ единственным образом определяет некоторый элемент группы $\pi_n X$. Поэтому элементы группы $\pi_n X$ можно определять — что и делалось полсотни лет тому назад — как гомотопические классы пунктированных отображений в пространство X всевозможных ориентированных сфер размерности n . Однако это концептуально более сложное определение не имеет, как показал опыт, никаких реальных преимуществ и в настоящее время им никто не пользуется.

Пусть E^n — *единичный n -мерный шар*, состоящий из точек $x \in \mathbb{R}^n$, для которых $|x| \leq 1$. Границей этого шара (при $n > 0$) служит $(n-1)$ -мерная сфера S^{n-1} , а факторпространство E^n/S^{n-1} гомеоморфно сфере S^n . Поэтому, выбрав определенный гомеоморфизм $E^n/S^{n-1} \rightarrow S^n$, мы можем элементами группы $\pi_n X$ считать гомотопические классы отображений $E^n/S^{n-1} \rightarrow X$. (Как всегда, имеется в виду, что в факторпространстве E^n/S^{n-1} отмечена точка, являющаяся образом сферы S^{n-1} при каноническом отображении отождествления $E^n \rightarrow E^n/S^{n-1}$). Но композирование с отображением факторизации $E^n \rightarrow E^n/S^{n-1}$ устанавливает, как легко видеть, биективное соответствие между пунктированными отображениями $E^n/S^{n-1} \rightarrow X$ и отображениями $(E^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, x_0)$. Поскольку это соответствие, очевидно, переводит пунктированные гомотопии в гомотопии пар (т. е. в данном случае гомотопии относительно S^{n-1}), мы получаем, следовательно, что *элементами группы $\pi_n X = \pi_n(X, x_0)$ можно считать гомотопические классы отображений $(E^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, x_0)$* :

$$\pi_n(X, x_0) = [(E^n, S^{n-1}), (X, x_0)].$$

Это отождествление гомотопических классов отображений $(E^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, x_0)$ с элементами группы $\pi_n X$ за-

висит, естественно, от выбора гомеоморфизма $E^n/S^{n-1} \rightarrow S^n$, или, что равносильно, относительного гомеоморфизма

$$(3) \quad \chi^{(n)}: (E^n, S^{n-1}) \rightarrow (S^n, s_0),$$

и на уровне отображений задается соответствием $a \mapsto a \circ \chi^{(n)}$, где $a: (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$. Мы раз навсегда условимся принимать за гомеоморфизм (3) относительный гомеоморфизм, определенный (в силу отождествления $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$) формулой

$$\chi^{(n)}(x) = \left(\cos \pi |x|, \frac{\sin \pi |x|}{|x|} x \right), \quad x \in E^n \subset \mathbb{R}^n.$$

Вместо единичного шара можно, конечно, взять гомеоморфный ему *единичный куб* I^n , состоящий из точек $t = (t_1, \dots, t_n)$ пространства $\mathbb{R}^n$, для которых $0 \leq t_i \leq 1$ при любом $i = 1, \dots, n$. Обозначив границу этого куба символом I^n , мы получаем, таким образом, что *элементы группы $\pi_n X$ можно интерпретировать как гомотопические классы rel I^n отображений $a: (I^n, I^n) \rightarrow (X, x_0)$* , т. е. таких функций

$$a: (t_1, \dots, t_n) \mapsto a(t_1, \dots, t_n) \in X$$

переменных $t_1, \dots, t_n \in I$, что $a(t_1, \dots, t_n) = x_0$, если хотя бы один из аргументов $t_1, \dots, t_n$ равен нулю или единице.

Здесь, конечно, также нужно фиксировать определенный относительный гомеоморфизм

$$(4) \quad \chi = \chi_n: (I^n, I^n) \rightarrow (S^n, s_0).$$

При $n = 1$ мы определим этот гомеоморфизм формулой

$$\chi_1(t) = \begin{cases} (1-4t, 2\sqrt{2t(1-2t)}), & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ (4t-3, -2\sqrt{2(1-t)(2t-1)}), & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

(ср. с формулой (17) лекции 3 при $x = -1$ и x отсутствующем), а при $n > 1$, отождествляя куб I^n с произведением $I \times I^{n-1}$, — формулой

$$\chi_n(t, t) = [\chi_{n-1}(t), t], \quad t \in I, \quad t \in I^{n-1}.$$

Операция сложения (2), перенесенная с помощью относительного гомеоморфизма (4) на отображения $a: (I^n, I^n) \rightarrow$

— (X, x_0) , будет, как легко видеть, задаваться формулой

$$(5) \quad (a + b)(t, t) = \begin{cases} a(2t, t) & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ b(2t-1, t), & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

(при $n-1$ аргумент t отсутствует). Таким образом, при $n \geq 1$ мы приходим к альтернативному определению группы $\pi_n X$, в котором полностью устранено какое-либо воспоминание о сферах. В этом определении элементами группы $\pi_n X$ являются гомотопические классы $\text{rel } I^n$ отображений $a: (I^n, I^n) \rightarrow (X, x_0)$, а сложение индуцируется операцией сложения отображений, задаваемой формулой (5).

Это определение группы $\pi_n X$ на практике наиболее удобно, и поэтому оно обычно считается основным. Конечно, при этом нужно заново проверять для $\pi_n X$ аксиомы группы.

В частности, при $n=1$ мы, сравнивая определения, получаем, что группа $\pi_1 X$ совпадает с введенной в лекции 4 фундаментальной группой (которая не зря была обозначена там символом $\pi_1 X$). Единственное различие состоит в том, что в лекции 4 операция в группе $\pi_1 X$ была названа умножением. Таким образом, для группы $\pi_1 X$ мы имеем две конкурирующие системы обозначений — аддитивную и мультипликативную. Мы будем считать их совершенно равноправными и в каждом конкретном случае будем пользоваться той, которая удобнее. (В некоторых случаях мы даже разрешим себе пользоваться обоими обозначениями в одной и той же формуле!)

Замечание 2. Аналогично может быть определена сумма любого числа отображений $(I^n, I^n) \rightarrow (X, x_0)$. Например, сумма $a + b + c$ трех отображений $a, b, c: (I^n, I^n) \rightarrow (X, x_0)$ определяется формулой

$$(a + b + c)(t, t) = \begin{cases} a(3t, t), & \text{если } 0 \leq t \leq 1/3, \\ b(3t-1, t), & \text{если } 1/3 \leq t \leq 2/3, \\ c(3t-2, t), & \text{если } 2/3 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Конечно, отображение $a + b + c$ отлично от отображения $(a + b) + c$ (и от отображения $a + (b + c)$), но гомотопно ему относительно I^n .

Для каждого отображения $a: (I^n, I^n) \rightarrow (X, x_0)$ мы будем символом $-a$ обозначать отображение $(I^n, I^n) \rightarrow (X, x_0)$, определенное формулой

$$(-a)(t, t) = a(1-t, t), \quad (t, t) \in I \times I^{n-1} = I^n.$$

Ясно, что в группе $\pi_n X$ гомотопические классы отображений a и $-a$ определяют взаимно противоположные элементы.

В соответствующих ситуациях введенные обозначения мы будем естественным образом сокращать. Например, вместо $a + (-b) + c$ мы будем писать просто $a - b + c$. (Заметим, что отображение $a - b + c$ определяется, таким образом, формулой

$$(a - b + c)(t, t) = \begin{cases} a(3t, t), & \text{если } 0 \leq t \leq 1/3, \\ b(2 - 3t, t), & \text{если } 1/3 \leq t \leq 2/3, \\ c(3t - 2, t), & \text{если } 2/3 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

где $(t, t) \in I \times I^{n-1} = I^n$.)

Последнее определение групп $\pi_n X$ наводит на мысль рассмотреть пространство $\Omega^n X$ всех отображений $(I^n, j^n) \rightarrow (X, x_0)$ (снабженное топологией подпространства пространства X^{I^n}). Относительно операции (5) это пространство является H -пространством (даже H -группой). Гомотопической единицей (которую лучше теперь называть *гомотопическим нулем*) этого пространства является постоянное отображение $I^n \rightarrow X$, $t \mapsto x_0$. При $n = 1$ оно совпадает с пространством ΩX .

В силу экспоненциального закона гомотопии относительно j^n являются не чем иным, как путями пространства $\Omega^n X$. Следовательно, группу $\pi_n X$ мы можем отождествить с группой

$$\pi_n X = \pi_0 \Omega^n X$$

(ср. с аналогичной формулой для группы $\pi_1 X$ в лекции 4).

При $n > 1$ каждое отображение $a: (t, t) \mapsto a(t, t)$ отождествляется с путем $t \mapsto a^*(t)$ пространства $\Omega^{n-1} X$, где $a^*(t)$ — точка $t \mapsto a(t, t)$ этого пространства. Таким образом, при $n > 1$ имеет место равенство

$$(6) \quad \Omega^n X = \Omega(\Omega^{n-1} X)$$

(если положить $\Omega^0 X = X$, то при $n = 1$ формула (6) превратится в уже известное нам равенство $\Omega^1 X = \Omega X$).

Поэтому

$$\pi_n X = \pi_0 \Omega^n X = \pi_0 \Omega(\Omega^{n-1} X) = \pi_1 \Omega^{n-1} X$$

и, вообще, как показывает очевидная индукция,

$$(7) \quad \pi_n X = \pi_k \Omega^{n-k} X$$

для любого $k = 0, 1, \dots, n$.

Формулу (7) при $k=1$ можно, как и было первоначально сделано Гуревичем, положить в основу еще одного, индуктивного, определения групп $\pi_n X$. Оно имеет то преимущество, что не требует проверки аксиом группы (при условии, что для группы $\pi_1 X$ эти аксиомы уже проверены).

Замечание о терминологии. В литературе можно найти ряд специальных названий для отображений $(S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$ и $(I^n, i^n) \rightarrow (X, x_0)$; например, Рохлин и Фукс (см. [10]) придерживаются старинной традиции называть отображения $(S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$ *сфероидами* пространства X . По аналогии отображения $(I^n, i^n) \rightarrow (X, x_0)$ можно было бы называть *кубоидами* пространства X , а имея в виду формулу (6), *n-мерными* (или *n-кратными*) *петлями* этого пространства. Мы не будем отдавать предпочтение ни одному из этих терминов.

Согласно замечанию 6 лекции 4 при $n > 0$ группа $\pi_1 X$ действует на группе $\pi_n X$, т. е. определено такое отображение

$$(8) \quad \begin{aligned} \pi_1 X \times \pi_n X &\rightarrow \pi_n X, \\ (\xi, \alpha) &\mapsto \xi\alpha, \quad \xi \in \pi_1 X, \quad \alpha \in \pi_n X, \end{aligned}$$

что:

а) для каждого элемента $\xi \in \pi_1 X$ отображение $R_\xi: \alpha \mapsto \xi\alpha, \alpha \in \pi_n X$, является автоморфизмом группы $\pi_n X$, т. е. оно биективно и для любых элементов $\alpha, \beta \in \pi_n X$ имеет место равенство

$$\xi(\alpha + \beta) = \xi\alpha + \xi\beta;$$

б) отображение $R: \xi \mapsto R_\xi$ является гомоморфизмом группы $\pi_1 X$ в группу $\text{Aut } \pi_n X$ автоморфизмов группы $\pi_n X$, т. е.

$$(\xi\eta)\alpha = \xi(\eta\alpha)$$

для любых элементов $\xi, \eta \in \pi_1 X, \alpha \in \pi_n X$.

При этом, сравнив определения, мы немедленно получим, что отображения $a: (I^n, i^n) \rightarrow (X, x_0)$ и $b: (I^n, i^n) \rightarrow (X, x_0)$ тогда и только тогда задают элементы α и $\xi\alpha$ группы $\pi_n X$, когда существует такое отображение $F: I^{n+1} \rightarrow X$ куба $I^{n+1} = I^n \times I$ в пространство X , что

$$(9) \quad F(t, 0) = a(t), \quad F(t, 1) = b(t)$$

для любой точки $t \in I^n$ и

$$(10) \quad F(t, t) = u(1-t) \text{ для любой точки } t \in I^n \\ \text{и любого } t \in I,$$

где $u: I \rightarrow X$ — петля, задающая элемент ξ группы $\pi_1 X$. При желании, можно принять это за определение действия (8), но тогда утверждения а) и б) будут нуждаться в доказательстве (которое, впрочем, осуществляется вполне автоматически).

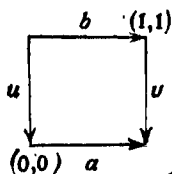
Иногда, когда нужно подчеркнуть зависимость R от n , мы вместо R_ξ будем писать $R_\xi^{(n)}$.

Очевидно, что для любого пунктированного отображения $f: X \rightarrow Y$ и любых элементов $\alpha \in \pi_n X$ и $\xi \in \pi_1 X$ имеет место равенство

$$f_*(\xi\alpha) = f_*(\xi)f_*(\alpha),$$

где в применении к $\xi\alpha$ и α символ f_* означает гомоморфизм $\pi_n f: \pi_n X \rightarrow \pi_n Y$, а в применении к ξ — гомоморфизм $\pi_1 f: \pi_1 X \rightarrow \pi_1 Y$ (свойство функториальности действия $R: \pi_1 X \rightarrow \text{Aut } \pi_n X$). На техническом языке теории групп с операторами это свойство означает, что гомоморфизм $f_* = \pi_n f: \pi_n X \rightarrow \pi_n Y$ является $\pi_1 X$ -гомоморфизмом по отношению к действию $\pi_1 X \rightarrow \text{Aut } \pi_n Y$, индуцированному гомоморфизмом $f_* = \pi_1 f: \pi_1 X \rightarrow \pi_1 Y$ (т. е. — в другой терминологии — является $\pi_1 f$ -гомоморфизмом).

При $n=1$ условия (9) и (10) означают, что при двух возможных движениях по сторонам квадрата I^2 от точки $(0, 0)$ к точке $(1, 1)$ мы в одном случае пробегаем путь ai^{-1} , а в другом — путь $u^{-1}b$



Поэтому, скомпонировав отображение F с кусочно линейным отображением



квадрата I^2 на себя, отображающим отрезки $0 \times I$ и $1 \times I$ в соответственно точки $(0, 0)$ и $(1, 1)$, а отрезки $I \times 0$ и $I \times 1$, переламывая их посередине, на соответственно ломаные $0 \times I \cup I \times 1$ и $I \times 0 \cup 1 \times I$, мы получим отображе-

ние квадрата $I^2 = I \times I$ в пространство X , являющееся гомотопией из I в X относительно $I = \{0, 1\}$, связывающей путь au^{-1} с путем $u^{-1}b$. Это означает, что, перейдя в группе $\pi_1 X$ к мультипликативной записи и обозначив элемент $\xi\alpha$, чтобы отличить его от произведения, символом $\xi(\alpha)$, мы будем иметь равенство $\alpha\xi^{-1} = \xi^{-1} \cdot \xi(\alpha)$. Тем самым доказано, что

$$(11) \quad \xi(\alpha) = \xi\alpha\xi^{-1} \text{ для любых элементов } \alpha, \xi \in \pi_1 X,$$

т. е. что автоморфизм $R_\xi^{(1)}: \alpha \mapsto \xi(\alpha)$ является внутренним автоморфизмом группы $\pi_1 X$, определенным элементом ξ .

Определение 2. Пространство X называется *гомотопически простым в размерности n* , если группа $\pi_1 X$ тривиально действует на группе $\pi_n X$, т. е. если $\xi\alpha = \alpha$ для любых элементов $\xi \in \pi_1 X$, $\alpha \in \pi_n X$. Пространство, гомотопически простое во всех размерностях, называется *абелевым*.

Как было замечено в лекции 4, фундаментальная группа произвольного N -пространства тривиально действует на группе гомотопических классов отображений в это пространство любого пунктированного пространства. В частности, это означает, что *любое N -пространство абелево*.

Впрочем, этот факт легко доказывается и непосредственно, поскольку для каждого N -пространства X с настоящей единицей (что, как мы знаем из лекции 4, общности по существу не ограничивает) формула

$$F(\dot{t}, t) = a(t)u(1-t), \quad t \in I^n, \quad t \in I,$$

определяет для любых элементов $a \in \Omega^n X$, $u \in \Omega X$ отображение $F: I^{n+1} \rightarrow X$, удовлетворяющее условиям (9) и (10) с $b = a$.

Конечно, класс абелевых пространств шире класса N -пространств. Например, ясно, что любое односвязное пространство абелево. В своем месте мы приведем примеры и неодносвязных абелевых пространств, не являющихся N -пространствами.

Согласно формуле (11) пространство X тогда и только тогда гомотопически просто в размерности 1, когда группа $\pi_1 X$ абелева.

В частности, для любого абелева пространства (u , значит, для любого N -пространства) X группа $\pi_1 X$ абелева,

Что же касается групп $\pi_n X$ при $n > 1$, то для них имеет место следующее замечательное предложение.

Предложение 1. При $n > 1$ гомотопическая группа $\pi_n X$ произвольного пунктированного пространства X абелева.

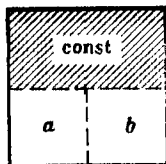
Таким образом, при $n > 1$ мы можем считать, что функтор π_n принимает значения в категории AB-GROUPS абелевых групп.

Поскольку $S^n = S^2 S^{n-2}$ при $n > 1$, предложение 1 является частным случаем следствия 2 предложения 2 из Дополнения к лекции 4. Мы все же заново докажем здесь это предложение (и даже дадим ему два доказательства).

Первое доказательство. В силу формулы (7) (при $\sum k = 2$) предложение 1 достаточно доказать для группы $\pi_2 X$.

Пусть $a: (I^2, I^2) \rightarrow (X, x_0)$, $b: (I^2, I^2) \rightarrow (X, x_0)$, и пусть c — отображение $(I^2, I^2) \rightarrow (X, x_0)$, получающееся из отображения $a + b$ «прибавлением по второй координате» постоянного отображения. Схематически отображение c может быть изображено рисунком

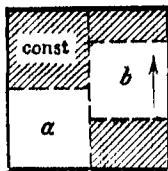
(12)



а алгебраически оно задается формулами

$$c(t, s) = \begin{cases} a(2t, 2s), & \text{если } 0 \leq t, s \leq 1/2, \\ b(2t-1, 2s) & \text{если } 0 \leq s \leq 1/2 \leq t \leq 1, \\ x_0, & \text{если } 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

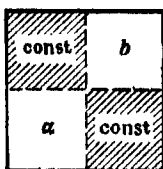
Произведем над этим отображением деформацию (гомотопию относительно I^2), схематически изображаемую рисунком



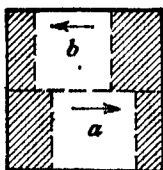
а алгебраически задающуюся формулами

$$c_{\tau}(t, s) = \begin{cases} a(2t, 2s), & \text{если } 0 \leq t, s \leq 1/2, \\ b(2t-1, 2s-\tau), & \text{если } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \quad \frac{\tau}{2} \leq s \leq \frac{1+\tau}{2}, \\ x_0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

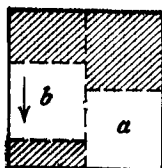
В результате мы получим отображение, схематически изображаемое рисунком



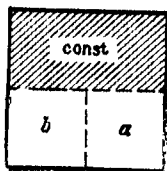
Прodelав затем над этим отображением сначала деформацию



а затем деформацию



мы получим отображение



13)

Для завершения доказательства остается заметить, что отображения (12) и (13) гомотопны относительно I^2 соответственно отображениям $a+b$ и $b+a$. $\square$

Второе доказательство. Согласно формуле (7) (при $k=1$)

$$\pi_n X = \pi_1 \Omega^{n-1} X,$$

а группа $\pi_1 \Omega^{n-1} X$, являясь фундаментальной группой N пространства $\Omega^{n-1} X = \Omega(\Omega^{n-2} X)$, абелева. $\square$

Абелева аддитивная группа, в которой действует мультипликативная группа Π , называется Π -модулем. Таким образом, мы можем сказать, что при $n \geq 2$ группа $\pi_n X$ является $\pi_1 X$ -модулем.

В случае, когда данное пространство X не пунктировано, приходится рассматривать группы $\pi_n(X, x)$ для всех точек $x \in X$ одновременно, не давая ни одной из них никакого преимущества. При этом, в соответствии с замечанием 5 лекции 4, любой путь $u \in X^I$ будет определять некоторый изоморфизм u_* группы $\pi_n(X, u(1))$ на группу $\pi_n(X, u(0))$, зависящий только от гомотопического класса $\xi = [u] \text{ rel } \{0, 1\}$ пути u . В случае, когда $u(0) = u(1) = x_0$, т. е. когда путь u является петлей, это уже известный нам автоморфизм $R_\xi^{(m)}: \alpha \mapsto \xi \alpha$, $\alpha \in \pi_n(X, x_0)$. При $u(0) \neq u(1)$ он строится точно так же (с помощью отображений F , удовлетворяющих условиям (9) и (10)), и мы сохраним для него то же обозначение $R_\xi^{(m)}$ (или просто R_ξ).

При этом, согласно замечанию 6 лекции 4, соответствия $x \mapsto \pi_n(X, x)$, $\xi \mapsto R_\xi$ будут составлять ансамбль групп над пространством X .

Допуская определенную вольность, мы будем этот ансамбль обозначать символом $\{\pi_n(X, x)\}$.

Определение 3. Ансамбль $\{\pi_n(X, x)\}$ называется ансамблем n -мерных гомотопических групп топологического пространства X .

При $n > 1$ он является ансамблем абелевых групп.

Каждый морфизм $\xi: y \rightarrow x$ произвольного группоида Π определяет по формуле

$$\bar{R}_\xi(\eta) = \xi \eta \xi^{-1}, \quad \eta \in \Pi(y, y),$$

некоторый изоморфизм $\bar{R}_\xi: \Pi(y, y) \rightarrow \Pi(x, x)$ группы $\Pi(y, y)$ морфизмов $y \rightarrow y$ на группу $\Pi(x, x)$ морфизмов $x \rightarrow x$, причем соответствия $x \mapsto \Pi(x, x)$, $\xi \mapsto \bar{R}_\xi$ составляют ансамбль групп над Π . Оказывается, что в случае, когда

группоид Π является фундаментальным группоидом PX топологического пространства X , этот ансамбль совпадает с ансамблем $\{\pi_1(X, x)\}$ фундаментальных групп, т. е. $\bar{R}_\xi = R_\xi^{(1)}$. Действительно, при $y = x (= x_0)$ это в точности утверждение, выражаемое формулой (11), доказательство которой полностью сохраняется и при $y \neq x$. $\square$

С другой стороны, легко видеть, что для любого ансамбля множеств (или групп) R над группоидом Π каждый изоморфизм $R_\xi: R_y \rightarrow R_x$, $\xi: y \rightarrow x$, является $\bar{R}_\xi$ -изоморфизмом (по отношению к естественным действиям групп $\Pi(y, y)$ и $\Pi(x, x)$ на множествах R_y и R_x), т. е. для любых элементов $\alpha \in R_y$ и $\eta \in \Pi(y, y)$ имеет место равенство

$$R_\xi(\eta\alpha) = \bar{R}_\xi(\eta) R_\xi(\alpha).$$

Действительно, так как, по определению, $\eta\alpha = R_\eta\alpha$, то последнее равенство равносильно формуле

$$R_\xi \circ R_\eta = R_{\bar{R}_\xi(\eta)} \circ R_\xi.$$

С другой стороны, $R_\xi \circ R_\eta = R_{\xi\eta}$, а

$$R_{\bar{R}_\xi(\eta)} \circ R_\xi = R_{\xi\eta\xi^{-1}} \circ R_\xi = R_{\xi\eta}. \quad \square$$

Для ансамбля $\{\pi_n(X, x)\}$ отсюда (и из равенства $\bar{R}_\xi = R_\xi^{(1)}$) следует, что для любых точек $x_0, x_1 \in X$, любых элементов $\eta \in \pi_1(X, x_1)$, $\alpha \in \pi_n(X, x_1)$ и любого класса ξ путей, соединяющих точку x_0 с точкой x_1 , имеет место равенство

$$(14) \quad R_\xi^{(n)}(\eta\alpha) = R_\xi^{(1)}(\eta) R_\xi^{(n)}(\alpha),$$

т. е. что для каждого $n \geq 1$ изоморфизм $R_\xi^{(n)}: \pi_n(X, x_1) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$ является $R_\xi^{(1)}$ -изоморфизмом.

Если пространство X связно, то для любых двух точек $x_0, x_1 \in X$ в группоиде PX существует хотя бы один морфизм $\xi: x_1 \rightarrow x_0$. Поэтому, как непосредственно следует из формулы (14), если при некотором выборе отмеченной точки $x_0 \in X$ связное пространство X оказалось гомотопически простым в некоторой размерности $n \geq 1$, то оно будет гомотопически простым в размерности n и при любом другом выборе этой точки. Связное пространство X , обладающее этим свойством, называется, естественно, *гомотопически простым в размерности n* (а пространство, го-

топически простое во всех размерностях, — абелевым пространством).

Согласно предложению 2 лекции 4 для каждого гомотопически простого в размерности n связного пространства X при любом выборе отмеченной точки $x_0 \in X$ отображение игнорирования отмеченных точек

$$\pi_n(X, x_0) \rightarrow [S^n, X]$$

биективно. Переносим групповую структуру из $\pi_n(X, x_0)$ в $[S^n, X]$, мы тем самым определим множество $[S^n, X]$, $n \geq 1$, как группу (необходимо абелеву даже при $n=1$). Эта группа называется *n -мерной гомотопической группой гомотопически простого пространства X* и обозначается прежним символом $\pi_n X$.

Подчеркнем, что, в отличие от случая пунктированных пространств, группа $\pi_n X$ определена только для связных и гомотопически простых в размерности n (например, односвязных) пространств X . При этом на подкатегории категории TOP , состоящей из таких пространств, соответствие $\pi_n: X \mapsto \pi_n X$ является, очевидно, функтором.

Ясно, что для каждого ансамбля R над связным пространством X все объекты R_x изоморфны между собой. В частности, мы видим, что *если пространство X связно, то для любого $n \geq 1$ все группы $\pi_n(X, x)$, $x \in X$, изоморфны между собой.*

Это означает, что для связного не пунктированного пространства X мы также можем говорить о его гомотопической группе $\pi_n X$, но только как об абстрактной группе (заданной с точностью до изоморфизма). Поэтому, в частности, для связных пространств имеет смысл условие $\pi_n X = 0$ (означающее, что при одном, а следовательно, и при любом выборе отмеченной точки x_0 имеет место равенство $\pi_n(X, x_0) = 0$).

Определение 4. Пунктированное (или непунктированное, но связное) пространство X называется *асферичным в размерности n* , если $\pi_n X = 0$. Пространство, асферичное во всех размерностях $\leq n$, называется *n -связным*.

Таким образом, пунктированные пространства, асферичные в размерности 0 (или, что то же самое, 0-связные), — это не что иное, как связные пространства, а асферичные в размерности 1 — не что иное, как односвязные пространства. Пространства же 1-связные — это пространства связные и односвязные.

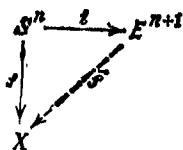
Ясно, что пространство X тогда и только тогда 1-связно, когда для любых точек $x_0, x_1 \in X$ в группойде ΠX существует единственный морфизм $x_0 \rightarrow x_1$.

Примером пространства, асферичного во всех размерностях (т. е. ∞ -связного), является одноточечное пространство pt . Поэтому асферичным во всех размерностях пространством будет и любое пространство, гомотопически эквивалентное пространству pt , т. е. любое стягиваемое пространство. Обратное, вообще говоря, верно только при некоторых дополнительных предположениях общетопологического характера.

По определению отображение $(S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$ задает нулевой элемент группы $\pi_n X$, если оно пунктировано гомотопно нулю (постоянному отображению). Но поскольку группа $\pi_1 X$ действует на группе $\pi_n X$ автоморфизмами, $\pi_1 X$ -орбита нуля состоит только из нуля. Поэтому в силу предложения 2 лекции 4 отображение $(S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$ будет задавать нулевой элемент группы $\pi_n X$ и тогда, когда оно свободно гомотопно нулю.

Поскольку для связного пространства X каждое отображение $S^n \rightarrow X$ гомотопно некоторому пунктированному отображению $(S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$, отсюда, в частности, следует, что *связное пространство X тогда и только тогда асферично в размерности n , когда каждое отображение $S^n \rightarrow X$ произвольной n -мерной сферы S^n в пространство X гомотопно нулю.*

Как мы знаем (см. лекцию 1), гомотопность нулю отображения $X \rightarrow Y$ равносильна его распространяемости на конус CX . С другой стороны, соответствие $[x, t] \mapsto tx$, $t \in I$, $x \in S^n$, определяет, очевидно неподвижный на S^n , гомеоморфизм прямого конуса CS^n с единичным шаром E^{n+1} . Поэтому *пространство X тогда и только тогда асферично в размерности n , когда любое отображение $f: S^n \rightarrow X$ может быть распространено на E^{n+1} :*



Этим простым критерием асферичности мы будем в дальнейшем постоянно пользоваться.

Пусть $p: (E, e_0) \rightarrow (B, b_0)$ — произвольное пунктированное расслоение и $F = p^{-1}(b_0)$ — его слой. Ввиду разложения $I^{n+1} = I^n \times I$ каждое отображение $a: (I^{n+1}, \dot{I}^{n+1}) \rightarrow (B, b_0)$ мы можем считать гомотопией из I^n в B , связывающей постоянное отображение $\text{const}: I^n \rightarrow B, t \mapsto b_0$, с самим собой и (при $n \geq 1$) неподвижной на $\dot{I}^n$. Поскольку постоянное отображение $I^n \rightarrow B$ накрывается постоянным отображением $I^n \rightarrow E$, из аксиомы РНГ поэтому следует, что существует гомотопия $\varphi: I^n \times I \rightarrow E$, накрывающая гомотопию a и (при $n \geq 1$) неподвижная на $\dot{I}^n$. В частности, $(p \circ \varphi)(t, 1) = a(t, 1) = b_0$ для любой точки $t \in I^n$,

т. е. $\varphi(t, 1) \in F$. Следовательно, положив $b(t) = \varphi(t, 1)$, $t \in I^n$, мы получим некоторое отображение $b: I^n \rightarrow F$, переводящее (при $n \geq 1$) границу $\dot{I}^n$ куба I^n в точку $e_0 \in F$, т. е. являющееся отображением $(I^n, \dot{I}^n) \rightarrow (F, e_0)$. Условно переход от a к b изображен на рис. 10.

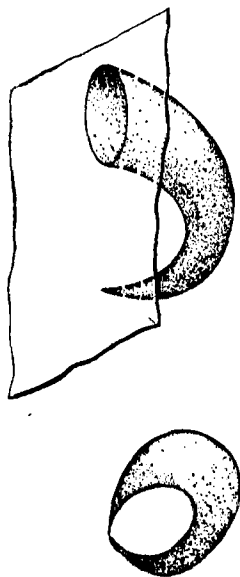


Рис. 10.

Пусть теперь a' — другое отображение $(I^{n+1}, \dot{I}^{n+1}) \rightarrow (B, b_0)$, и пусть b' — отображение $(I^n, \dot{I}^n) \rightarrow (F, e_0)$, получающееся из a' описанной конструкцией (с помощью накрывающей гомотопии φ'). Тогда легко видеть, что если $a \sim a' \text{ rel } \dot{I}^{n+1}$, то $b \sim b' \text{ rel } \dot{I}^n$. Действительно, отождествив куб I^{n+1} с произведением $I^n \times I$, т. е. обозначив его точки символами (t, t) , где $t \in I^n$, $t \in I$, мы можем каждую гомотопию $H: I^{n+1} \times$

$\times I \rightarrow B$ относительно $\dot{I}^{n+1}$, связывающую отображения a и a' , интерпретировать в виде гомотопии $I^{n+1} \times I \rightarrow B$ и иным способом, принимая за параметр деформации аргумент t . Тогда гомотопия H будет связывать постоянное отображение $I^{n+1} \rightarrow B$ с самим собой, будет неподвижна на $\dot{I}^n \times I \subset \dot{I}^{n+1}$, а на $I^n \times 0 \subset \dot{I}^{n+1}$ и $I^n \times 1 \subset \dot{I}^{n+1}$ будет — после отождествления $I^n \times 0$ и $I^n \times 1$ с I^n — совпадать соответственно с отображениями a и a' , интерпретированными как гомотопии. Поэтому, согласно аксиоме РНГ, существует гомотопия $\bar{H}$ из $I^n \times I$ в E , на-

крывающая гомотопию H и на $I^n \times 0$ и $I^n \times 1$ совпадающая соответственно с гомотопиями φ и φ' . Концевое отображение этой гомотопии, рассматриваемое как отображение в F , и будет, очевидно, гомотопией из I^n в F относительно I^n , связывающей отображение b с отображением b' . $\square$

Доказанное утверждение означает, что хотя соответствующие $a \mapsto b$ строятся с определенным произволом, но гомотопический ($\text{rel } I^n$) класс $\beta \in \pi_n F$ отображения b однозначно определяется гомотопическим ($\text{rel } I^{n+1}$) классом $\alpha \in \pi_{n+1} B$ отображения a , так что мы получаем некоторое вполне определенное отображение $\alpha \mapsto \beta$ группы $\pi_{n+1} B$ в группу $\pi_n F$. Непосредственно очевидно (поскольку отображения a мы складываем «по первой координате», а поднимаем в E «по последней координате»), что при $n \geq 1$ отображение $\alpha \mapsto \beta$ является гомоморфизмом.

Мы будем обозначать этот гомоморфизм символом ∂_n или просто ∂ .

Вместе с гомоморфизмами $i_*: \pi_n F \rightarrow \pi_n E$ и $p_*: \pi_n E \rightarrow \pi_n B$ гомоморфизм $\partial: \pi_{n+1} B \rightarrow \pi_n F$ позволяет написать бесконечную налево последовательность абелевых групп

$$(15) \quad \dots \xrightarrow{p_*} \pi_{n+1} B \xrightarrow{\partial} \pi_n F \xrightarrow{i_*} \pi_n E \xrightarrow{p_*} \pi_n B \xrightarrow{\partial} \dots,$$

кончающуюся тремя, вообще говоря, неабелевыми группами и тремя пунктированными множествами:

$$\dots \xrightarrow{\partial} \pi_1 F \xrightarrow{i_*} \pi_1 E \xrightarrow{p_*} \pi_1 B \xrightarrow{\partial} \pi_0 F \xrightarrow{i_*} \pi_0 E \xrightarrow{p_*} \pi_0 B.$$

Эта последовательность называется *гомотопической последовательностью расслоения* $p: E \rightarrow B$.

Гомоморфизмы ∂ связывают воедино «очевидные» отрезки $\pi_n F \rightarrow \pi_n E \rightarrow \pi_n B$ последовательности (15). На этом основании они называются *связывающими гомоморфизмами*.

Конечная или бесконечная последовательность

$$(16) \quad \dots \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow \dots,$$

связанных гомоморфизмами групп (или, более общо, пунктированных множеств) называется *точной в члене B* , если ядро «выходящего» гомоморфизма $B \rightarrow C$ (образ от отмеченной точки в случае, когда C является лишь пунктированным множеством) совпадает с образом «входящего» гомоморфизма $A \rightarrow B$ (который, следовательно, обязательно должен быть инвариантной подгруппой, т. е. — в старой терминологии — нормальным делителем). Последователь-

ность называется *точной*, если она точна в каждом члене (за исключением крайних членов, когда они существуют).

Предложение 2. *Гомотопическая последовательность (15) произвольного пунктированного расслоения $p: E \rightarrow B$ является точной последовательностью.*

Доказательство. Докажем точность последовательности (15) во всех ее членах по очереди.

Точность в члене $\pi_n E$. Так как $i_* \circ p_* = \text{const}$, то $i_* \circ p_* = 0$ и, следовательно, $\text{Im } i_* \subset \text{Ker } p_*$. Обратно, включение $\alpha \in \text{Ker } p_*$ означает, что для отображения $a: (I^n, I^n) \rightarrow (E, e_0)$, задающего элемент α , существует такая неподвижная на I^n гомотопия $G: I^n \times I \rightarrow B$, что

$$G(t, 0) = (p \circ a)(t) \text{ и } G(t, 1) = b_0 \text{ для любой точки } t \in I^n.$$

Согласно аксиоме РНГ эта гомотопия может быть накрыта такой гомотопией $\bar{G}: I^n \times I \rightarrow E$, также неподвижной на I^n , что $\bar{G}(t, 0) = a(t)$ для любой точки $t \in I^n$. Отображение $b: (I^n, I^n) \rightarrow (E, e_0)$, $t \mapsto \bar{G}(t, 1)$, задает тот же элемент α группы $\pi_n F$, что и отображение a , но обладает тем свойством, что $b(t) \in F$ для любой точки $t \in I^n$, и потому рассматриваемое как отображение в F задает такой элемент β группы $\pi_n F$, что $i_* \beta = \alpha$. Следовательно, $\text{Ker } p_* \subset \text{Im } i_*$.

Точность в члене $\pi_n F$. По определению каждый элемент $\alpha \in \text{Im } \partial \subset \pi_n F$ задается отображением $a: (I^n, I^n) \rightarrow (F, e_0)$, для которого существует неподвижная на I^n гомотопия $\bar{a}: I^n \times I \rightarrow E$, связывающая постоянное отображение $I^n \rightarrow E$, $t \mapsto e_0$, с отображением a , рассматриваемым как отображение в E (при этом $\alpha = \partial \beta$, где $\beta \in \pi_{n+1} B$ — гомотопический класс отображения $b = p \circ \bar{a}: (I^{n+1}, I^{n+1}) \rightarrow (B, b_0)$). Следовательно, $i_* \alpha = 0$, т. е. $\text{Im } \partial \subset \text{Ker } i_*$. Обратно, включение $\alpha \in \text{Ker } i_* \subset \pi_n F$ означает, что существует такая неподвижная на I^n гомотопия $\bar{a}: I^n \times I \rightarrow E$, что $\bar{a}(t, 0) = e_0$, $t \in I^n$, и отображение $t \mapsto \bar{a}(t, 1)$, рассматриваемое как отображение в F , задает элемент α . Тогда отображение $b = p \circ \bar{a}$ будет отображением $(I^{n+1}, I^{n+1}) \rightarrow (B, b_0)$, для гомотопического класса $\beta \in \pi_{n+1} B$ которого имеет место равенство $\partial \beta = \alpha$. Следовательно, $\text{Ker } i_* \subset \text{Im } \partial$.

Точность в члене $\pi_{n+1} B$. По определению элемент $\alpha \in \text{Im } p_* \subset \pi_{n+1} B$ задается отображением $a = p \circ \bar{a}: (I^{n+1}, I^{n+1}) \rightarrow (B, b_0)$, где $\bar{a}: (I^{n+1}, I^{n+1}) \rightarrow (E, e_0)$. По-

этому классу $\partial\alpha \in \pi_n F$ будет принадлежать постоянное отображение $t \mapsto \bar{a}(t, 1)$, $t \in I^n$, и, значит, этот класс будет равен нулю. Следовательно, $\text{Im } p_* \subset \text{Ker } \partial$. Обратно, включение $\alpha \in \text{Ker } \partial \subset \pi_{n+1} B$ означает, что для отображения $a: (I^{n+1}, I^{n+1}) \rightarrow (B, b_0)$ класса α существует такое накрывающее отображение $\bar{a}: I^{n+1} \rightarrow E$, что $\bar{a}(t, 0) = e_0$ для любой точки $t \in I^n$, а отображение $\bar{a}_1: t \mapsto \bar{a}(t, 1)$, $t \in I^n$, рассматриваемое как отображение в F , гомотопно относительно I^n постоянному отображению. Тогда отображение $\bar{b}: I^n \times I \rightarrow E$, определенное формулой

$$\bar{b}(t, t) = \begin{cases} \bar{a}(t, 2t), & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ (i \circ G)(t, 2t-1), & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

где $G: I^n \times I \rightarrow F$ — неподвижная на I^n гомотопия, связывающая отображение $\bar{a}_1$ с постоянным отображением $I^n \rightarrow F, t \mapsto e_0$, будет, очевидно, отображением $(I^{n+1}, I^{n+1}) \rightarrow (E, e_0)$ и, значит, будет задавать некоторый элемент β группы $\pi_{n+1} E$. По определению образ $p_* \beta$ этого элемента при гомоморфизме $p_*: \pi_{n+1} E \rightarrow \pi_{n+1} B$ будет задаваться отображением $p \circ \bar{b}$. Но ясно, что

$$(p \circ \bar{b})(t, t) = \begin{cases} a(t, 2t), & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ b_0, & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

т. е. — с точностью до транспозиции первой и последней координаты — отображение $p \circ \bar{b}$ является суммой (в смысле формулы (5)) отображения a и постоянного отображения. Поэтому отображение $p \circ \bar{b}$ будет задавать тот же элемент α группы $\pi_{n+1} B$, что и отображение a . Это означает, что $p_* \beta = \alpha$. Следовательно, $\text{Ker } \partial \subset \text{Im } p_*$. $\square$

Разъясним алгебраические следствия свойства точности гомотопической последовательности.

Утверждение, что гомоморфизм $C \rightarrow D$ из точной последовательности (16) является мономорфизмом (т. е. что имеет место равенство $\text{Ker}(C \rightarrow D) = 0$), равносильно ввиду точности этой последовательности в члене C утверждению, что предыдущий гомоморфизм $B \rightarrow C$ является нулевым (т. е. что имеет место равенство $\text{Im}(B \rightarrow C) = 0$). Аналогично, утверждение, что гомоморфизм $A \rightarrow B$ является эпиморфизмом ($\text{Im}(A \rightarrow B) = B$) равносильно ввиду точности последовательности (12) в члене B равенству

$\text{Ker}(B \rightarrow C) = B$, т. е. утверждению, что нулевым является следующий гомоморфизм $B \rightarrow C$. Схематически:

$$\begin{array}{ccccc} \text{эпи} & \text{нуль} & \text{моно} & & \\ \cdot \longrightarrow & \cdot \longrightarrow & \cdot \longrightarrow & & \end{array}$$

Таким образом, в точной последовательности групп каждому мономорфизму предшествует через стрелку эпиморфизм, и, наоборот, за каждым эпиморфизмом следует через стрелку мономорфизм.

Аналогично, равенство нулю какого-нибудь члена точной последовательности равносильно тому, что предшествующий (через стрелку) гомоморфизм является эпиморфизмом, а последующий — мономорфизмом:

$$\begin{array}{ccccc} \text{эпи} & & & \text{моно} & \\ \cdot \longrightarrow & \cdot \longrightarrow 0 & \longrightarrow & \cdot & \longrightarrow \end{array}$$

В частности, утверждение, что гомоморфизм $A \rightarrow B$ является мономорфизмом (эпиморфизмом), равносильно утверждению, что последовательность $0 \rightarrow A \rightarrow B$ (последовательность $A \rightarrow B \rightarrow 0$) точна. Следовательно, утверждение, что гомоморфизм $A \rightarrow B$ является изоморфизмом, равносильно утверждению о точности последовательности $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow 0$.

Особого внимания заслуживают последовательности вида

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0,$$

называемые короткими последовательностями. Утверждение о точности короткой последовательности равносильно утверждению, что группа B является расширением группы A посредством группы C .

Другой интересный случай возникает, когда в последовательности (16) каждая третья группа равна нулю. Обозначив для удобства формулировки последовательность (16) через

$$(17) \quad \dots \rightarrow C_{n+1} \rightarrow A_n \rightarrow B_n \rightarrow C_n \rightarrow A_{n-1} \rightarrow \dots,$$

мы можем утверждать, что в точной последовательности (17) все гомоморфизмы $A_n \rightarrow B_n$ тогда и только тогда являются изоморфизмами, когда все группы C_n равны нулю. Более общим образом, в последовательности (17) группы C_n тогда и только тогда равны нулю при всех $n \leq r$ (при всех $n > r$), когда гомоморфизмы $A_n \rightarrow B_n$ при $n < r$ (при $n > r$) являются изоморфизмами, а гомоморфизм $A_r \rightarrow B_r$ является эпиморфизмом (мономорфизмом).

Надъективное отображение $p: \tilde{X} \rightarrow X$ называется *накрытием*, если пространство $\tilde{X}$ связно и каждая точка пространства X (также, очевидно, связного) обладает такой окрестностью U , что множество $p^{-1}(U)$ является дизъюнктным объединением открытых множеств, каждое из которых отображение p гомеоморфно отображает на U . Последнее условие, очевидно, означает, что отображение $p_U: p^{-1}(U) \rightarrow U$, индуцированное отображением p , изоморфно (как объект категории TOP_U) проекции прямого произведения $U \times F \rightarrow U$, где F — некоторое дискретное пространство. Таким образом, *накрытия — это в точности локально тривиальные расслоения $\tilde{X} \rightarrow X$ с дискретными слоями* (и связным пространством $\tilde{X}$). Поэтому, *если пространство X паракомпактно, то любое накрытие $\tilde{X} \rightarrow X$ является расслоением*. (См. Дополнение к лекции 1.)

Замечание 3. С помощью доказываемых в следующей лекции свойств накрытий можно легко показать, что последнее утверждение справедливо и без предположения о паракомпактности пространства X . Однако в силу наших общих установок это обстоятельство мы будем игнорировать.

В частности, мы видим, что если пространство X паракомпактно, то для любого пунктированного накрытия $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ имеет место точная гомотопическая последовательность

$$\dots \rightarrow \pi_n F \rightarrow \pi_n \tilde{X} \xrightarrow{p_*} \pi_n X \rightarrow \pi_{n-1} F \rightarrow \dots \rightarrow \pi_1 X \xrightarrow{\partial} \pi_0 F \rightarrow 0$$

(в силу связности $\pi_0 \tilde{X} = \pi_0 X = 0$). Но так как слой F дискретен, то $\pi_n F = 0$ при $n > 0$, откуда немедленно вытекает, что при $n > 1$ накрытие $p: \tilde{X} \rightarrow X$ индуцирует изоморфизм

$$p_*: \pi_n \tilde{X} \xrightarrow{\cong} \pi_n X$$

гомотопических групп.

Таким образом, при переходе к накрывающему пространству $\tilde{X}$ высшие гомотопические группы $\pi_n X$, $n > 1$, остаются прежними.

Пример 1. Окружность S^1 накрывается прямой $\mathbb{R}$ (если точками окружности считать комплексные числа z с $|z| = 1$, то накрытие $\mathbb{R} \rightarrow S^1$ можно задать формулой

$t \mapsto e^{it}$). Следовательно, $\pi_n S^1 = \pi_n \mathbb{R}$ для любого $n > 1$. Но так как прямая $\mathbb{R}$ стягиваема, то $\pi_n \mathbb{R} = 0$ для всех $n \geq 0$. Этим доказано, что

$$(18) \quad \pi_n S^1 = 0 \quad \text{для любого } n > 1.$$

Пример 2. Сопоставив каждой точке единичной сферы S^m , $m \geq 1$, пространства $\mathbb{R}^{m+1}$ проходящее через нее одномерное подпространство (точку m -мерного проективного пространства $\mathbb{R}P^m$) мы, очевидно, получим накрытие $S^m \rightarrow \mathbb{R}P^m$. Следовательно,

$$(19) \quad \pi_n S^m \approx \pi_n \mathbb{R}P^m \quad \text{для любых } n > 1 \text{ и } m \geq 1.$$

Последний пример может быть комплексифицирован.

Пусть S^{2m+1} — единичная сфера $m+1$ -мерного комплексного пространства $\mathbb{C}^{m+1}$ (задаваемая уравнением $|z_0|^2 + \dots + |z_m|^2 = 1$), а $\mathbb{C}P^m$ — комплексное m -мерное проективное пространство (множество всех одномерных подпространств пространства $\mathbb{C}^{m+1}$ или, что то же самое, множество всех классов $(z_0 : z_1 : \dots : z_m)$ пропорциональных $(m+1)$ -ок $(z_0, z_1, \dots, z_m) \neq (0, 0, \dots, 0)$). Сопоставив каждой точке $(z_0, z_1, \dots, z_m) \in S^{2m+1}$ проходящее через нее одномерное подпространство, т. е. класс $(z_0 : z_1 : \dots : z_m)$, мы получим некоторое отображение

$$h: S^{2m+1} \rightarrow \mathbb{C}P^m, \quad (z_0, z_1, \dots, z_m) \mapsto (z_0 : z_1 : \dots : z_m).$$

Пусть U_i — открытое множество в $\mathbb{C}P^m$, состоящее из всех точек $(z_0 : z_1 : \dots : z_m)$, для которых $z_i \neq 0$, и пусть $h^{-1}U_i$ — его прообраз в сфере S^{2m+1} (состоящий из точек $(z_0, z_1, \dots, z_m) \in S^{2m+1}$, для которых $z_i \neq 0$). Тогда легко видеть, что формула

$$(z, (z_0 : z_1 : \dots : z_m)) \mapsto \frac{|z_i| z}{z_i \sqrt{|z_0|^2 + \dots + |z_m|^2}} (z_0, \dots, z_m), \\ z \in S^1, (z_0 : z_1 : \dots : z_m) \in U_i,$$

корректно [определяет отображение $S^1 \times U_i \rightarrow h^{-1}U_i$, являющееся] гомеоморфизмом, переводящим проекцию $S^1 \times U_i \rightarrow U_i$ в отображение $h^{-1}U_i \rightarrow U_i$, индуцированное отображением h . Это доказывает, что отображение h является локально тривиальным расслоением. Оно называется *расслоением* (или *отображением*) *Хопфа*. Его слой является окружность S^1 .

Поскольку $\pi_n S^1 = 0$ при $n > 1$, из точности гомотопической последовательности расслоения Хопфа непосредст-

венно следует, что для любого $n \geq 3$ гомоморфизм

$$(20) \quad h_*: \pi_n S^{2m+1} \rightarrow \pi_n \mathbb{C}P^m,$$

индуцированный расслоением h , является изоморфизмом.

При $m=1$ комплексная проективная прямая $\mathbb{C}P^1$ гомеоморфна сфере S^2 (сфере Римана). Поэтому в этом случае расслоение Хопфа имеет вид

$$h: S^3 \rightarrow S^2$$

(и задается формулой $(z_1, z_2) \mapsto \frac{z_2}{z_1}$; см. лекцию 0), а изоморфизм (20) превращается в изоморфизм

$$(21) \quad h_*: \pi_n S^3 \rightarrow \pi_n S^2, \quad n \geq 3,$$

обычно называемый изоморфизмом Хопфа.

В частности, мы видим, что группа $\pi_3 S^2$ изоморфна группе $\pi_3 S^3$.

Заметим, что изоморфизм (21) задается соответствием $f \mapsto h \circ f$, где $f: S^n \rightarrow S^3$, а $h: S^3 \rightarrow S^2$ — отображение Хопфа. При $n=3$ это означает, что элементу $1_3 = [\text{id}]$ группы $\pi_3 S^3$ отвечает в группе $\pi_3 S^2$ гомотопический класс $\eta_3 = [h]$ отображения Хопфа.

Кроме свойства точности, гомотопическая последовательность расслоения обладает также свойством функториальности по отношению к отображениям расслоения $p: E \rightarrow B$ в произвольное другое расслоение $p_1: E_1 \rightarrow B_1$, т. е. таким отображениям $f: E \rightarrow E_1$, что для некоторого (очевидно, однозначно определенного) отображения $B \rightarrow B_1$ (которое мы также будем обозначать через f) имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E_1 \\ p \downarrow & & \downarrow p_1 \\ B & \xrightarrow{f} & B_1 \end{array}$$

Если расслоения p и p_1 пунктированы, то отображение $f: E \rightarrow E_1$ (а потому и отображение $f: B \rightarrow B_1$) также предполагается пунктированным. В этом случае отображение f индуцирует некоторое отображение $F \rightarrow F_1$ слоев расслоений p и p_1 (которое мы будем обозначать все тем же символом f). Поэтому каждое отображение $f: E \rightarrow E_1$

пунктированных расслоений порождает диаграмму

$$(22) \quad \begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & \pi_{n+1}B & \rightarrow & \pi_n F & \rightarrow & \pi_n E \rightarrow \pi_n B \rightarrow \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \rightarrow & \pi_{n+1}B_1 & \rightarrow & \pi_n F_1 & \rightarrow & \pi_n E_1 \rightarrow \pi_n B_1 \rightarrow \dots \end{array}$$

строками которой являются гомотопические последовательности расслоений p и p_1 , а вертикальные стрелки индуцированы отображениями f . Свойство функториальности состоит в том, что *эта диаграмма коммутативна*, т. е. что ее вертикальные стрелки составляют гомоморфизм верхней строчки в нижнюю. Для доказательства достаточно заметить, что после применения отображения f все конструкции, относящиеся к гомотопической последовательности расслоения $p: E \rightarrow B$, переходят в соответствующие конструкции для гомотопической последовательности расслоения $p_1: E_1 \rightarrow B_1$. $\square$

Введя в рассмотрение категорию пунктированных расслоений и категорию точных последовательностей, мы можем сказать, что соответствие, относящее расслоению его гомотопическую последовательность, представляет собой функтор из первой категории во вторую.

Обратим внимание, что коммутативность всех квадратов диаграммы (22), кроме квадратов, содержащих гомоморфизмы ∂ , является следствием того, что соответствие $\pi_n: X \rightarrow \pi_n X$ представляет собой функтор, а коммутативность каждого квадрата

$$\begin{array}{ccc} \pi_{n+1}B & \xrightarrow{\partial} & \pi_n F \\ f_* \downarrow & & \downarrow f_* \\ \pi_{n+1}B_1 & \xrightarrow{\partial} & \pi_n F_1 \end{array}$$

означает, что гомоморфизм $\partial: \pi_{n+1}B \rightarrow \pi_n F$ представляет собой естественное преобразование (морфизм) функтора $\pi_{n+1} \circ \beta$ в функтор $\pi_n \circ \varphi$, где β и φ — функторы из категории пунктированных расслоений в категорию TOP^* , сопоставляющие каждому расслоению $p: E \rightarrow B$ соответственно его базу B и его слой F .

Предположим теперь, что для любого $n \geq 0$ на категории TOP^* задан некоторый гомотопически инвариантный функтор π_n^* , принимающий значения при $n \geq 2$ в категории AB-GROUPS , при $n = 1$ в категории GROUPS и при $n = 0$ в категории ENS^* , а на категории пунктированных расслоений — некоторое естественное преобразо-

вание ∂ функтора $\pi_{n+1}^a \circ \beta$ в функтор $\pi_n^a \circ \varphi$. Тогда для любого расслоения $p: E \rightarrow B$ мы можем написать последовательность

$$(23) \quad \dots \rightarrow \pi_{n+1}^a B \xrightarrow{\partial} \pi_n^a F \xrightarrow{t_*} \pi_n^a E \xrightarrow{p_*} \pi_n^a B \rightarrow \dots$$

аналогичную последовательности (15).

Будем говорить, что $\{\pi_n^a, \partial\}$ представляет собой *систему аксиоматически заданных гомотопических групп*, если 1° (аксиома точности). Для любого пунктированного расслоения $p: E \rightarrow B$ последовательность (23) точна.

2° (аксиома размерности). Для одноточечного пространства pt при любом $n \geq 1$ имеет место равенство

$$\pi_n^a(pt) = 0.$$

3° (начальное условие). Для любого пунктированного пространства X множество $\pi_0^a X$ находится в естественном (=функториальном) биективном соответствии с пунктированным множеством $\pi_0 X$ компонент пространства X .

(Основания называть аксиому 2° аксиомой размерности мы обсудим в следующем семестре.)

В силу гомотопической инвариантности функторов π_n^a из аксиомы размерности следует, что $\pi_n^a X = 0$ при $n \geq 1$ для любого стягиваемого пространства X . В частности, $\pi_n^a(PX) = 0$, где PX , как всегда, — пространство путей пространства X , начинающихся в отмеченной точке x_0 . Поэтому, применив аксиому точности к серровскому расслоению $PX \rightarrow X$, мы получим, что для любых аксиоматически заданных гомотопических групп π_n^a имеет место изоморфизм

$$\pi_n^a X \approx \pi_{n-1}^a \Omega X.$$

Ср. с формулой (7) при $k = n - 1$.

Отсюда индукцией по n (начальный шаг которой обеспечен начальным условием 3°) немедленно вытекает, что для любого $n \geq 0$ имеется естественное (по X) биективное отображение $\pi_n^a X \xrightarrow{\approx} \pi_n X$. При этом из замечания 4 лекции 4 непосредственно следует, что при $n = 1$ это отображение является либо изоморфизмом, либо антиизоморфизмом (биективным отображением, меняющим порядок множителей на противоположный), откуда посредством той же

индукции вытекает, что это отображение будет изоморфизмом и при любом $n \geq 2$ (так как при $n \geq 2$ группа $\pi_n X$ абелева, то каждый антиизоморфизм $\pi_n^a X \rightarrow \pi_n X$ является изоморфизмом). Таким образом, мы видим, что аксиомы 1°, 2° и начальное условие 3° однозначно с точностью до изоморфизма (или при $n=1$ с точностью до антиизоморфизма) характеризуют гомотопические группы π_n .

Использованное в доказательстве этого утверждения замечание 4 лекции 4 мы докажем в следующей лекции.

ДОПОЛНЕНИЕ

Точные последовательности пунктированных пространств.— Короткие точные последовательности Н-групп.— Короткие коточные последовательности Н-когрупп.— Гомотопические слои пунктированных отображений.— Точная последовательность Пуппе.— Удлиненная последовательность Пуппе классифицированного расслоения.— Конусы отображений и коточные последовательности Пуппе.

Прием, посредством которого в произвольной категории определяются группы, может быть применен и к точным последовательностям. Для определенности мы ограничимся категорией $[TOP^*]$, хотя почти все автоматически переносится—с очевидными и само собой разумеющимися изменениями—на произвольные категории.

Определение 1. Последовательность

$$(1) \quad \dots \rightarrow A_{n-1} \xrightarrow{a_n} A_n \xrightarrow{a_{n+1}} A_{n+1} \rightarrow \dots$$

пунктированных пространств и их отображений называется *точной в члене A_n* , если для любого пунктированного пространства X последовательность пунктированных множеств

$$(2) \quad \dots \rightarrow [X, A_{n-1}]^{\cdot} \xrightarrow{(a_n)_X} [X, A_n]^{\cdot} \xrightarrow{(a_{n+1})_X} [X, A_{n+1}]^{\cdot} \rightarrow \dots$$

точна в члене $[X, A_n]^{\cdot}$. Последовательность (1) называется *точной*, если она точна в каждом члене (кроме, конечно, крайних членов, если они есть).

Пример. Пунктированное отображение $p: (E, e_0) \rightarrow (B, b_0)$ называется *квазирасслоением*, если для любой

диаграммы

$$(3) \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & E \\ \sigma_0 \downarrow & \nearrow \bar{g} & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{g} & B \end{array} \quad G \circ \sigma_1 = \text{const},$$

над категорией TOP^* , в которой конечное отображение $G \circ \sigma_1$ гомотопии G является постоянным отображением, существует накрывающая гомотопия $\bar{G}: X \times I \rightarrow E$. (Напомним, что $\sigma_0: x \mapsto (x, 0)$ и $\sigma_1: x \mapsto (x, 1)$.) Так как факт существования гомотопии G означает, что $p \circ g \sim \text{const}$, а факт существования гомотопии $\bar{G}$ означает, что $g \sim i \circ f$, где i — вложение $F \rightarrow E$, $F = p^{-1}(b_0)$, а f — конечное отображение $\bar{G} \circ \sigma_1$ гомотопии $\bar{G}$, рассматриваемое как отображение $X \rightarrow F$, то отображение $p: E \rightarrow B$ тогда и только тогда является квазирасслоением, когда трехчленная последовательность

$$F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$$

точна в члене E .

Заметим, что любое (пунктированное) расслоение является, конечно, квазирасслоением.

Отображением последовательности (1) в аналогичную последовательность $\{B_n\}$ называется такая последовательность $\{f_n\}$ пунктированных отображений $f_n: A_n \rightarrow B_n$, что для любого n диаграмма

$$(4) \quad \begin{array}{ccc} A_n & \longrightarrow & A_{n+1} \\ f_n \downarrow & & \downarrow f_{n+1} \\ B_n & \longrightarrow & B_{n+1} \end{array}$$

коммутативна. Отображение $\{f_n\}$ называется *гомотопической эквивалентностью*, если все отображения f_n являются пунктированными гомотопическими эквивалентностями. Ясно, что последовательность пунктированных пространств, гомотопически эквивалентная точной последовательности, также является точной последовательностью.

Особое значение имеют точные последовательности пространств, кончающиеся одноточечным пространством pt (или начинающиеся с такого пространства).

Легко видеть, что *последовательность*

$$(5) \quad \dots \rightarrow E \xrightarrow{p} B \rightarrow \text{pt}$$

тогда и только тогда точна в члене B , когда существует такое отображение $s: B \rightarrow E$, что $p \circ s \sim \text{id}$ (сечение отображения p в категории $[\text{TOP}^*]$). Действительно, точность последовательности (5) в члене B означает, что для любого пространства X отображение $p_X: [X, E]^* \rightarrow [X, B]^*$, $[f]^* \mapsto [f \circ p]^*$, $f: X \rightarrow E$, надъективно. В частности, оно надъективно при $X=B$, и, значит, существует такое отображение $s: B \rightarrow E$, что $p_B[s]^* = [\text{id}]^*$, т. е. $s \circ p \sim \text{id}$. Обратно, если такое отображение s существует, то $p_X[s \circ g]^* = [g]^*$ для любого отображения $g: X \rightarrow B$. $\square$

Замечание 1. Если отображение $p: E \rightarrow B$ является расслоением (хотя бы гомотопическим), то это условие равносильно существованию такого отображения $s: B \rightarrow E$ (сечения отображения p в категории TOP^*), что $p \circ s = \text{id}$. См. Дополнение к лекции 2, где, правда, этот факт доказан для непунктированных расслоений.

По аналогии со случаем групп последовательности пространств, имеющие вид

$$(6) \quad \text{pt} \rightarrow F \xrightarrow{i} F \xrightarrow{p} B \rightarrow \text{pt},$$

называются *короткими последовательностями*.

Замечание 2. Ниже мы покажем (см. замечание 4), что в случае, когда в последовательности (6) отображение p является расслоением, а отображение i — вложением его слоя, *эта последовательность тогда и только тогда точна, когда она точна в члене B* , т. е. (см. замечание 1) когда для расслоения p существует сечение s .

В частности, мы видим, что для любых пунктированных пространств F и B имеет место короткая точная последовательность

$$(7) \quad \text{pt} \rightarrow F \xrightarrow{\text{in}_F} F \times B \xrightarrow{\text{pr}_B} B \rightarrow \text{pt},$$

где $\text{in}_F: a \mapsto (a, b_0)$ и $\text{pr}_B: (a, b) \mapsto b$, $a \in F$, $b \in B$. (Конечно, точность этой последовательности легко доказывается и непосредственно.)

Короткую последовательность (6), члены F , E , B которой являются N -группами, а отображения i и p — морфизмами (гомотопическими) N -групп, мы будем называть *последовательностью N -групп*. Для любой точной

последовательности Н-групп и любого пунктированного пространства X последовательность

$$(8) \quad 1 \rightarrow [X, F] \xrightarrow{i_X} [X, E] \xrightarrow{p_X} [X, B] \rightarrow 1$$

является обычной короткой точной последовательностью групп.

Короткая точная последовательность групп

$$(9) \quad 1 \rightarrow F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B \rightarrow 1$$

называется *расщепляющейся последовательностью*, если гомоморфизм $p: E \rightarrow B$ обладает (в категории групп) сечением $s: B \rightarrow E$. Это сечение называется *расщепляющим гомоморфизмом*, а группа E называется *полупрямым произведением* групп F и B . Примером расщепляющейся последовательности является последовательность

$$1 \rightarrow F \xrightarrow{\text{in}_F} F \times B \xrightarrow{\text{pr}_B} B \rightarrow 1,$$

расщепляющим гомоморфизмом которой является гомоморфизм $\text{in}_B: b \mapsto (1, b)$, $b \in B$. Для любой расщепляющейся последовательности групп (9) формула $\theta(a, b) = i(a) \cdot s(b)$, $(a, b) \in F \times B$, определяет биективное отображение $\theta: F \times B \rightarrow E$. Действительно, пусть t и q — отображения $E \rightarrow E$, определенные формулами $t(x) = (s \circ p)(x)^{-1}$ и $q(x) = x \cdot t(x)$, $x \in E$. Тогда $(p \circ q)(x) = p(x) \cdot (p \circ t)(x) = p(x) \cdot (p \circ s \circ p)(x)^{-1} = p(x) \cdot p(x)^{-1} = 1$, и потому в силу точности существует такой элемент $r(x) \in F$, что $i(r(x)) = q(x)$. Рассмотрим отображение $r \times p: E \rightarrow F \times B$, определенное формулой $(r \times p)(x) = (r(x), p(x))$, $x \in E$. По определению $(\theta \circ (r \times p))(x) = \theta(r(x), p(x)) = (i \circ r)(x) \cdot (s \circ p)(x) = q(x) \cdot t(x)^{-1} = x$ для любого элемента $x \in E$. Кроме того, $(p \circ \theta)(a, b) = (p \circ i)(a) \cdot (p \circ s)(b) = 1 \cdot b = b$, и потому $i((r \circ \theta)(a, b)) = (q \circ \theta)(a, b) = \theta(a, b) \cdot (t \circ \theta)(a, b) = \theta(a, b) \cdot (s \circ p \circ \theta)(a, b)^{-1} = i(a) \cdot s(b) \cdot s(b)^{-1} = i(a)$ для любого элемента $(a, b) \in F \times B$. Значит, $(r \circ \theta)(a, b) = a$ и, следовательно, $((r \times p) \circ \theta)(a, b) = (a, b)$. Таким образом, θ и $r \times p$ являются взаимно обратными биективными отображениями. $\square$

Если группы F , E и B абелевы, то отображения θ и $r \times p$ являются гомоморфизмами и, следовательно, изоморфизмами. Таким образом (мы переходим к аддитивной записи и несколько меняем обозначения), в любой рас-

щепляющейся последовательности абелевых групп

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} C \xrightleftharpoons[s]{p} B \rightarrow 0$$

группа C изоморфна прямой сумме $A \oplus B$ групп A и B . Соответствующими инъекциями $A \rightarrow C$ и $B \rightarrow C$ будут при этом гомоморфизмы i и s , а проекциями $C \rightarrow B$ и $C \rightarrow A$ — гомоморфизмы p и r^1) (причем последний гомоморфизм будет определяться из соотношения $i(r(x)) = x - s(p(x))$, $x \in C$).

Аналогичным образом, короткая точная последовательность Н-групп (6) называется *расщепляющейся*, если существует такой морфизм Н-групп $s: B \rightarrow E$, что $p \circ s \sim \text{id}$. В этом случае каждая последовательность (8) будет расщепляющейся последовательностью групп с расщепляющим гомоморфизмом $s_X: [X, B] \rightarrow [X, E]$. Для любых Н-групп F и B последовательность (7) является расщепляющейся короткой точной последовательностью Н-групп (относительно умножения в $F \times B$, определяемого обычным покоординатным образом). При этом для любой расщепляющейся короткой точной последовательности Н-групп (6) пространство E гомотопически эквивалентно произведению $F \times B$. Действительно (мы фактически повторяем изложенное выше теоретико-групповое рассуждение), если t и q — такие отображения $E \rightarrow E$, что $[t]^* = [s \circ p]^{-1}$ и $[q]^* = [\text{id}]^* \cdot [t]^*$ в группе $[E, E]^*$, то $p_E[q]^* = [p \circ q]^* = [p]^* \cdot [p \circ t]^* = [p]^* \cdot [p \circ s \circ p]^{-1} = [p]^* \cdot [p]^*{}^{-1} = 1$ в группе $[E, B]^*$, и потому существует такое отображение $r: E \rightarrow F$, что $i_E[r]^* = [q]^*$, т. е. $[i \circ r]^* = [q]^*$. Следовательно, для отображения $\theta: F \times B \rightarrow E$, заданного формулой $\theta = m \circ (i \times s)$, где $i \times s: F \times B \rightarrow E \times E$, а $m: E \times E \rightarrow E$ — умножение в E , т. е. являющегося по отношению к m произведением отображений $i \circ \text{pr}_F: F \times B \rightarrow E$ и $s \circ \text{pr}_B: F \times B \rightarrow E$, в группе $[E, E]^*$ будет иметь место равенство $[\theta \circ (r \times p)]^* = [m \circ (i \times s) \circ (r \times p)]^* = [m \circ ((i \circ r) \times (s \circ p))]^* = [i \circ r]^* \cdot [s \circ p]^* = [q]^* \cdot [t]^{-1} = [\text{id}]^*$.

С другой стороны, так как отображение p является гомотопическим морфизмом Н-групп, т. е. $p \circ m \sim m' \circ (p \times p)$,

¹⁾ Следуя Стинроду и Эйленбергу [11], мы называем для абелевых групп $A_1, \dots, A_n$ инъекциями естественные мономорфизмы $\text{in}_\alpha: A_\alpha \rightarrow \bigoplus_\beta A_\beta$ и проекциями естественные эпиморфизмы $\text{pr}_\alpha: \bigoplus_\beta A_\beta \rightarrow A_\alpha$; напомним, что $\text{pr}_1 \circ \text{in}_1 + \dots + \text{pr}_n \circ \text{in}_n = \text{id}$.

где $m': B \times B \rightarrow B$ — умножение в B , то в группе $[F \times B, B]^*$ будет иметь равенство

$$\begin{aligned} [p \circ \theta]^* &= [p \circ m \circ (i \times s)]^* = [m' \circ ((p \circ i) \times (p \circ s))]^* = \\ &= [p \circ i \circ \text{pr}_F]^* \cdot [p \circ s \circ \text{pr}_B]^* = [\text{const}]^* \cdot [\text{pr}_B]^* = [\text{pr}_B]^*, \end{aligned}$$

и, значит, в группе $[F \times B, E]^*$ — равенство

$$\begin{aligned} i_{F \times B} [r \circ \theta]^* &= [i \circ r \circ \theta]^* = [q \circ \theta]^* = ([\text{id}]^* \cdot [t]^*) \circ [\theta]^* = \\ &= [\theta]^* \cdot [t \circ \theta]^* = [\theta]^* \cdot [s \circ p \circ \theta]^*{}^{-1} = \\ &= [\theta]^* \cdot [s \circ \text{pr}_B]^*{}^{-1} = [i \circ \text{pr}_F]^* = i_{F \times B} [\text{pr}_F]^*. \end{aligned}$$

Поскольку гомоморфизм $i_{F \times B}$ является по условию моно-морфизмом, этим доказано, что $[r \circ \theta]^* = [\text{pr}_F]^*$ в группе $[F \times B, F]^*$. Следовательно, $[(r \times p) \circ \theta]^* = [(r \times \theta) \times (p \circ \theta)]^* = [\text{pr}_F \times \text{pr}_B]^* = [\text{id}]^*$ в группе $[F \times B, F \times B]^*$. Таким образом, $\theta \circ (r \times p) \sim \text{id}$ и $(r \times p) \circ \theta \sim \text{id}$, т. е. θ и $r \times p$ — взаимно обратные гомотопические эквивалентности. $\square$

Если N -группы F , E и B абелевы (т. е. каждая точная последовательность (8) состоит из абелевых групп), то гомотопические эквивалентности θ и $r \times p$ будут, как показывает автоматическое вычисление, морфизмами N -групп, так что в этом случае N -группа E гомотопически изоморфна N -группе $F \times B$.

Все эти результаты немедленно дуализируются.

Определение 2. Последовательность

$$\dots \rightarrow A_{n+1} \xrightarrow{a_n} A_n \xrightarrow{a_{n-1}} A_{n-1} \rightarrow \dots$$

пунктированных пространств и их отображений называется *коточной* в члене A_n , если для любого пунктированного пространства X последовательность пунктированных множеств

$$\dots \rightarrow [A_{n+1}, X]^* \xrightarrow{a_{n-1}^X} [A_n, X]^* \xrightarrow{a_{n-1}^X} [A_{n-1}, X]^* \rightarrow \dots$$

точна в члене $[A_n, X]^*$. Последовательность называется *коточной*, если она коточна в каждом члене (кроме, конечно, крайних членов, если они есть).

Ясно, что последовательность, гомотопически изоморфная коточной последовательности, коточна. Примером коточной последовательности является трехчленная последовательность

$$(10) \quad \Lambda \xrightarrow{i} X \xrightarrow{j} X/A,$$

где $i: A \rightarrow X$ — произвольное корасслоение (рассматриваемое как вложение), а $j: X \rightarrow X/A$ — отображение факторизации.

Последовательность

$$pt \rightarrow A \xrightarrow{i} X \rightarrow \dots$$

тогда и только тогда точна в члене A , когда существует такое отображение $r: X \rightarrow A$, что $r \circ i \sim id$ (в случае, когда отображение i является корасслоением, — такое, что $r \circ i = id$), а короткая последовательность вида

$$pt \rightarrow A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{j} X/A \rightarrow pt,$$

где i — корасслоение, а j — отображение факторизации тогда и только тогда точна, когда она точна в члене A , т. е. когда $X \cong A$.

Последовательность, состоящая из Н-когрупп и их морфизмов (гомотопических), называется *последовательностью Н-когрупп*. Короткая точная последовательность Н-когрупп

$$pt \rightarrow A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{j} B \rightarrow pt$$

называется *корасщепляющейся*, если существует такой морфизм Н-когрупп $r: X \rightarrow A$, что $r \circ i \sim id$. Для любой корасщепляющейся короткой точной последовательности Н-когрупп пространство X гомотопически эквивалентно букету $A \vee B$, причем гомотопической эквивалентностью $X \rightarrow A \vee B$ будет копроизведение (по отношению к коумножению в X) отображений $in_A \circ r$ и $in_B \circ j$, где $in_A: A \rightarrow A \vee B$ и $in_B: B \rightarrow A \vee B$ — канонические вложения.

Доказательства всех этих утверждений получаются очевидной дуализацией доказательств соответствующих утверждений для точных последовательностей, и мы оставим их читателю.

Перейдем теперь от этих общих — по существу чисто теоретико-категорных — рассмотрений к более содержательным конструкциям.

Пусть $p: (E, e_0) \rightarrow (B, b_0)$ — произвольное пунктированное отображение (нам сейчас удобно несколько отойти от стандартных обозначений), и пусть $Cosyl(p)$ — его обратный коцилиндр. Напомним (см. лекцию 2), что точками коцилиндра $Cosyl(p)$ являются пары (u, e) , где $u: I \rightarrow B$ и $e \in E$, причем $u(1) = p(e)$, и что формула $q(u, e) = u(0)$ определяет некоторое расслоение $q: Cosyl(p) \rightarrow B$.

Определение 3. Слой расслоения $q: \text{Cosyl}(p) \rightarrow B$ называется *гомотопическим слоем* отображения p и обозначается символом $F(p)$.

Ясно, что соответствие $p \mapsto F(p)$ является функтором.

Легко видеть, что если отображение $p: E \rightarrow B$ является пунктированным гомотопическим расслоением, то его гомотопический слой $F(p)$ пунктированно гомотопически эквивалентен его обыкновенному слою $F = p^{-1}(b_0)$. Действительно, ясно, что вложение $i: E \rightarrow \text{Cosyl}(p)$, $e \mapsto (e, 0_{p(e)})$, переводит слой F в слой $F(p)$ и потому индуцирует некоторое отображение $j: F \rightarrow F(p)$. В соответствующей коммутативной диаграмме

$$(11) \quad \begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\zeta} & E \\ j \downarrow & & \downarrow i \\ F(p) & \xrightarrow{\zeta} & \text{Cosyl}(p) \end{array} \quad \begin{array}{c} E \xrightarrow{p} B \\ \searrow q \\ \text{Cosyl}(p) \end{array}$$

отображение i , являясь гомотопической эквивалентностью и одновременно отображением над B (относительно проекций p и q), будет, согласно предложению 1 из Дополнения к лекции 2 (в его варианте для категории TOP), послойной гомотопической эквивалентностью и, значит, отображение j будет гомотопической эквивалентностью. $\square$

Поскольку диаграмма (11) коммутативна и ее вертикальные стрелки являются пунктированными гомотопическими эквивалентностями, верхняя строка этой диаграммы гомотопически изоморфна ее нижней точной строке и, значит, является точной последовательностью. Этим доказано, что любое гомотопическое расслоение является квазирасслоением.

Весьма неожиданный результат!

В общем случае произвольного пунктированного отображения $p: E \rightarrow B$ мы можем рассмотреть отображение $p_1: F(p) \rightarrow E$, являющееся ограничением проекции $(u, e) \mapsto e$. Это отображение обладает тем свойством, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} & & E & & \\ & p_1 \nearrow & \downarrow & p \searrow & \\ F(p) & & & & B \\ & \searrow \zeta & & q \nearrow & \\ & & \text{Cosyl}(p) & & \end{array}$$

пунктированно гомотопически коммутативна, и, значит, верхняя строчка этой диаграммы гомотопически изоморфна ее нижней точной строчке и потому также является точной последовательностью. Этим доказано, что для любого пунктированного отображения $p: E \rightarrow B$ имеет место трехчленная точная последовательность

$$(12) \quad F(p) \xrightarrow{p_1} E \xrightarrow{p} B.$$

Итерируя эту конструкцию и полагая $p_n = (p_{n-1})_1$, $p_0 = p$, мы получим бесконечную влево точную последовательность

$$(13) \quad \dots \rightarrow F(p_n) \xrightarrow{p_{n+1}} F(p_{n-1}) \rightarrow \dots \rightarrow F(p) \xrightarrow{p_1} E \xrightarrow{p} B$$

пунктированных пространств, члены $F(p_n)$, $n \geq 0$, которой называются *итерированными гомотопическими слоями* пунктированного отображения p .

Далее, сравнив определения, мы немедленно получим, что отображение $p_1: F(p) \rightarrow E$ индуцировано серровским расслоением $\omega_1: PB \rightarrow B$ посредством отображения p (т. е. в обозначениях, введенных в лекции 1, является отображением $(\omega_1)_p$). Следовательно, отображение $p_1: F(p) \rightarrow E$ является расслоением. Поэтому расслоениями будут и все отображения p_n , $n \geq 1$, из последовательности (13).

Применив к последовательности (13) функтор Ω , мы получим последовательность

$$(14) \quad \dots \rightarrow \Omega F(p_n) \xrightarrow{\Omega p_{n+1}} \Omega F(p_{n-1}) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow \Omega F(p) \xrightarrow{\Omega p_1} \Omega E \xrightarrow{\Omega p} \Omega B.$$

С другой стороны, легко видеть, что пространство ΩB гомотопически эквивалентно пространству $F(p_1)$, пространство ΩE — пространству $F(p_2)$, пространство $\Omega F(p) = \Omega F(p_0)$ — пространству $F(p_3)$ и, вообще, пространство $\Omega F(p_n)$ — пространству $F(p_{n+3})$ (удобно условно считать, что $F(p_{-1}) = E$, $F(p_{-2}) = B$). Действительно, поскольку отображение p_{n+1} , $n \geq 0$, является расслоением, его гомотопический слой $F(p_{n+1})$ гомотопически эквивалентен его обыкновенному слою F_{n+1} . Но так как точками пространства $F(p_n)$ являются пары (v, e) , где $v \in PF(p_{n-2})$, $e \in F(p_{n-1})$ и $v(1) = p_n(e)$, а отображение p_{n+1} является ограничением проекции $(v, e) \mapsto e$, то слой F_{n+1} состоит из точек вида (v, e_0) , где e_0 — отмеченная

точка, а $v \in \Omega F(p_{n-2})$, и потому гомеоморфен пространству $\Omega F(p_{n-2})$. $\square$

Чтобы записать гомотопические эквивалентности $j_n: \Omega F(p_{n-2}) \rightarrow F(p_n)$, $n \geq 1$, в явном виде, мы заметим, что при $n \geq 1$ каждая точка $e \in F(p_{n-1})$ в свою очередь имеет вид (u, b) , где $u \in PF(p_{n-2})$, $b \in F(p_{n-2})$ и $u(1) = p_{n-1}(b)$, причем $p_n(e) = b$. Поэтому точками пространства $F(p_n)$ можно считать пары (v, u) , где $v \in PF(p_{n-2})$, $u \in PF(p_{n-2})$, $u(1) = p_{n-1}(v(1))$, и тогда отображение j_n будет определяться формулой $j_n(u) = (0, u)$ (а отображение p_{n+1} — формулой $p_{n+1}(v, u) = (u, v(1))$).

Естественно ожидать, что гомотопические эквивалентности j_n будут составлять гомотопический изоморфизм последовательности (14) в последовательность (13) без последних трех членов, т. е. что соответствующие квадраты будут гомотопически коммутативны. Однако это не так, и мы здесь сталкиваемся с одним из тех редких случаев, когда, казалось бы, совершенно естественные построения приводят к некоммутативным диаграммам.

Чтобы достичь коммутативности, нужно каждую гомотопическую эквивалентность j_n с нечетным номером n скомпонировать с гомотопической эквивалентностью $\Omega F(p_{n-2}) \rightarrow \Omega F(p_{n-2})$, $u \mapsto u^{-1}$, где, как всегда, $u^{-1}: t \mapsto u(1-t)$, $t \in I$. В соответствии с этим мы определим гомотопические эквивалентности

$$k_n: \Omega F(p_{n-2}) \rightarrow F(p_n), \quad n \geq 1,$$

формулой

$$k_n(u) = \begin{cases} (0, u^{-1}), & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ (0, u), & \text{если } n \text{ четно,} \end{cases} \quad u \in \Omega F(p_{n-2}).$$

Эти гомотопические эквивалентности уже составляют гомотопический изоморфизм, т. е. *диаграмма*

$$(15) \quad \begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & \Omega F(p_{n-2}) & \xrightarrow{\Omega p_{n-1}} & \Omega F(p_{n-2}) & \rightarrow & \dots \\ & & \downarrow k_{n+1} & & \downarrow k_n & & \\ \dots & \rightarrow & F(p_{n+1}) & \xrightarrow{p_{n+2}} & F(p_n) & \rightarrow & \dots \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & \Omega F(p) & \xrightarrow{\Omega p_1} & \Omega E & \xrightarrow{\Omega p} & \Omega B \\ & & \downarrow k_2 & & \downarrow k_1 & & \downarrow k_1 \\ \dots & \rightarrow & F(p_3) & \xrightarrow{p_4} & F(p_2) & \xrightarrow{p_3} & F(p_1) \xrightarrow{p_2} F(p) \xrightarrow{p_1} E \xrightarrow{p} B \end{array}$$

гомотопически коммутативна. Действительно, каждую петлю $w \in \Omega F(p_{n-2})$ отображение $p_{n+2} \circ k_{n+1}$ переводит в

точку $(\omega^e, 0)$, где $e = (-1)^{n+1}$, а отображение $k_n \circ \Omega p_{n-1}$ — в точку $(0, (p_{n-1} \circ \omega)^{-e}) = (0, p_{n-1} \circ \omega^{-e})$. Поэтому гомотопия $(\omega, \tau) \mapsto (v_{\omega, \tau}, u_{\omega, \tau})$, $(\omega, \tau) \in \Omega F(p_{n-2}) \times I$, где пути $v_{\omega, \tau} \in PF(p_{n-2})$, $u_{\omega, \tau} \in PF(p_{n-3})$ определены формулами

$$v_{\omega, \tau}(t) = \omega^e((1 - \tau)t), \quad u_{\omega, \tau}(t) = (p_{n-1} \circ \omega^e)(1 - \tau t)$$

(ясно, что эти пути удовлетворяют соотношению $u_{\omega, \tau}(1) = p_{n-1}(v_{\omega, \tau}(1))$), связывает первое отображение со вторым. $\square$

Применив теперь к диаграмме (15) функтор Ω , мы получим гомотопически коммутативную диаграмму, вертикальные стрелки которой также являются гомотопическими эквивалентностями. Поскольку нижняя строчка этой диаграммы совпадает с верхней строчкой диаграммы (15), их можно сшить в одну трехстрочную гомотопически коммутативную диаграмму.

Итерируя это построение, мы получим бесконечную влево и вверх гомотопически коммутативную диаграмму, все вертикальные стрелки которой являются гомотопическими эквивалентностями, нижняя строчка представляет собой последовательность (13), а каждая следующая строчка получается из предыдущей применением функтора Ω и сдвигом на три члена влево.

Эта диаграмма изображена на стр. 239, где к ней добавлены отображения $q_1 = p_2 \circ k_1$, Ωq_1 , $\Omega^2 q_1$, ..., сшивающие «концевые» трехчленные последовательности каждой строчки в единую последовательность

$$(16) \quad \dots \rightarrow \Omega^{n+1} B \xrightarrow{\Omega^n q_1} \Omega^n F(p) \xrightarrow{\Omega^n p_1} \Omega^n E \xrightarrow{\Omega^n p} \Omega^n B \rightarrow \dots$$

$$\dots \rightarrow \Omega B \xrightarrow{q_1} F(p) \xrightarrow{p_1} E \xrightarrow{p} B.$$

Определение 4. Последовательность (16) пунктированных пространств называется *последовательностью Пуппе* (или *резольвентой*) отображения $p: E \rightarrow B$.

Эта последовательность Ω -периодична в том смысле, что под воздействием функтора Ω она как целое сдвигается на три члена влево, и потому каждые ее три последовательные члена после применения этого функтора переходят в следующие три члена.

Ясно, что композиции вертикальных стрелок диаграммы на стр. 239 составляют гомотопический изоморфизм последовательности Пуппе на последовательность (13) итерированных гомотопических слоев отображения p . Следовательно, *последовательность Пуппе является точной*

последовательностью, т. е. для любого пунктированного пространства X имеет место точная последовательность (17)

$$\dots \rightarrow [X, \Omega^{n+1}B]^* \rightarrow [X, \Omega^n F]^* \rightarrow [X, \Omega^n E]^* \rightarrow [X, \Omega^n B]^* \rightarrow \dots$$

При этом, согласно результатам Дополнения к лекции 4, все члены последовательности (17) являются абелевыми группами (а связывающие их отображения — гомоморфизмами), кроме последних шести

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow [X, \Omega F]^* \rightarrow [X, \Omega E]^* \rightarrow [X, \Omega B]^* \rightarrow [X, F]^* \rightarrow \\ \rightarrow [X, E]^* \rightarrow [X, B]^*, \end{aligned}$$

из которых первые три являются группами, а последние три — пунктированными множествами.

В частном случае, когда отображение $p: E \rightarrow B$ является расслоением (хотя бы гомотопическим), гомотопический слой $F(p)$ в последовательности Пуппе можно заменить обыкновенным слоем F расслоения p (одновременно заменяя, конечно, отображение p_1 вложением $i: F \rightarrow E$, а отображение q_1 — соответствующим отображением $q: \Omega B \rightarrow F$). Получающаяся последовательность

$$\begin{aligned} (18) \quad \dots \rightarrow \Omega^{n+1}B \xrightarrow{\Omega^n q} \Omega^n F \xrightarrow{\Omega^n i} \Omega^n E \xrightarrow{\Omega^n p} \Omega^n B \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow \Omega B \xrightarrow{q} F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B \end{aligned}$$

называется *последовательностью Пуппе расслоения p* . Она, конечно, также точна.

З а м е ч а н и е 3. Отображение $q: \Omega B \rightarrow F$ из последовательности (18) зависит от выбора сечения $s: \text{Cosyl}(p) \rightarrow E^I$ из аксиомы НП и сопоставляет петле $u \in \Omega B$ конец пути $s(e_0, u)$, начинающегося в точке $e_0 \in F$ и накрывающего эту петлю:

$$q(u) = s(e_0, u)(1), \quad u \in \Omega B.$$

Поэтому утверждение о точности последовательности (18) в члене F (являющееся основным камнем преткновения при попытке прямого — не использующего предложения 1 из Дополнения к лекции 2 — доказательства точности этой последовательности) сводится к утверждению, что отображение $E^I \rightarrow E^I$, определенное формулой $v \mapsto s(v(0), p \circ v)$, $v \in E^I$, может быть связано с тождественным отображением такой гомотопией $f_t: E^I \rightarrow E^I$, что для любого пути $v \in E^I$ путь $p \circ f_t v \in B^I$ не зависит от t .

Для читателя будет очень хорошим упражнением попытаться доказать последнее утверждение и вывести из него точность последовательности (18) в члене F .

Замечание 4. Если для отображения $p: E \rightarrow B$ существует сечение $s: B \rightarrow E$, то отображение $\Omega s: \Omega B \rightarrow \Omega E$ будет сечением отображения $\Omega p: \Omega E \rightarrow \Omega B$, откуда непосредственно вытекает, что для любого пространства X гомоморфизм $[X, \Omega E]^* \xrightarrow{\Omega p} [X, \Omega B]^*$ является эпиморфизмом. Поэтому последовательность (17) рассыпается в короткие точные последовательности

$$0 \rightarrow [X, \Omega^n F(p)]^* \rightarrow [X, \Omega^n E]^* \rightarrow [X, \Omega^n B]^* \rightarrow 0, \quad n \geq 0,$$

и, значит, последовательность (16) — в короткие точные последовательности

$$pt \rightarrow \Omega^n F(p) \rightarrow \Omega^n E \rightarrow \Omega^n B \rightarrow 0, \quad n \geq 0.$$

В частности, мы видим, что если в последовательности (6) отображение p является расслоением, обладающим сечением (а отображение i — вложением его слоя), то эта последовательность точна. (См. выше замечание 2.)

Пользуясь сопряженностью между функторами Ω и S^* , последовательность (17) можно переписать также в следующем виде:

$$\dots \rightarrow [S^{n+1}X, B]^* \rightarrow [S^n X, F]^* \rightarrow [S^n X, E]^* \rightarrow [S^n X, B]^* \rightarrow \dots \quad (19)$$

Частным случаем последовательности (19) (получающемся при $X = S^0$) является гомотопическая последовательность расслоения $p: E \rightarrow B$.

Замечание 5. Аналог последовательности (19) (получающийся заменой F на $F(p)$) имеет место, конечно, для любого отображения $p: E \rightarrow B$; в частности, — при $E \subset B$ — для вложения $E \rightarrow B$. При этом легко видеть, что в последнем случае пространство $F(p)$ является не чем иным, как пространством $P(B, pt, E)$ путей пространства B , начинающихся в отмеченной точке и кончающихся в подпространстве E .

Мы будем называть пунктированное расслоение $p: E \rightarrow B$ *классифицированным*, если оно индуцировано (посредством некоторого отображения $\varphi: B \rightarrow B_0$, называемого *классифицирующим отображением*) расслоением $p_0: E_0 \rightarrow B_0$

со стягиваемым пространством E_0 , т. е. если существует универсальный квадрат

$$(20) \quad \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi^*} & E_0 \\ p \downarrow & & \downarrow p_0 \\ B & \xrightarrow{\varphi} & B_0 \end{array}$$

в котором отображение p_0 является расслоением, а пространство E_0 стягиваемо.

Для классифицированных расслоений $p: E \rightarrow B$ можно указать простое необходимое и достаточное условие разрешимости произвольной задачи поднятия

$$(21) \quad \begin{array}{ccc} & & E \\ & \nearrow \bar{f} & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Предложение 1. Если расслоение $p: E \rightarrow B$ в задаче (21) классифицировано и если $\varphi: B \rightarrow B_0$ — классифицирующее отображение, то накрывающее отображение $\bar{f}: X \rightarrow E$ существует тогда и только тогда, когда отображение $\varphi \circ f: X \rightarrow B_0$ гомотопно нулю.

Доказательство. Диаграммы (20) и (21) можно сшить в одну диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & & E & \xrightarrow{\varphi^*} & E_0 \\ & \nearrow \bar{f} & \downarrow p & & \downarrow p_0 \\ X & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{\varphi} & B_0 \end{array}$$

Если отображение $\bar{f}$ существует, то $\varphi \circ f = p_0 \circ \varphi^* \circ \bar{f}$. Поскольку пространство E_0 стягиваемо, то $\varphi^* \circ \bar{f} = \text{id} \circ \varphi^* \circ \bar{f} \sim \sim \text{const} \circ \varphi^* \circ \bar{f} = \text{const}$, и потому $p_0 \circ \varphi^* \circ \bar{f} \sim \text{const}$. Следовательно, $\varphi \circ f \sim \text{const}$. (Заметим, что универсальность квадрата (20) мы в этом рассуждении не использовали.)

Обратно, пусть $\varphi \circ f \sim \text{const}$. Так как постоянное отображение накрываемо, то в силу аксиомы НГ (примененной к расслоению p_0) существует отображение $g: X \rightarrow E_0$, накрывающее отображение $\varphi \circ f$, т. е. такое, что пара (f, g) представляет собой конус над парой (φ, p_0) . Следовательно, ввиду универсальности квадрата (20) существует мор-

морфизм $\bar{f}: X \rightarrow E$ этой пары в пару (p, φ^*) . Этот морфизм и будет отображением, накрывающим отображение f . $\square$

Замечание 6. В последнем рассуждении стягиваемость пространства E_0 мы не использовали. Следовательно, если расслоение $p: E \rightarrow B$ индуцировано из некоторого расслоения $p_0: E_0 \rightarrow B_0$ посредством отображения $\varphi: B \rightarrow B_0$, то для любой диаграммы (21), в которой отображение f обладает тем свойством, что $\varphi \circ f \sim \text{const}$, существует накрывающее отображение $\bar{f}$.

Это простое достаточное условие разрешимости задачи поднятия бывает полезно удивительно часто.

Существование отображения $\bar{f}$ равносильно тому, что элемент $[f]$ пунктированного множества $[X, B]^*$ принадлежит образу $\text{Im } p_*$ отображения $p_*: [X, E]^* \rightarrow [X, B]^*$, а условие $\varphi \circ f \sim \text{const}$ — тому, что этот элемент принадлежит ядру $\text{Ker } \varphi_*$ отображения $\varphi_*: [X, B]^* \rightarrow [X, B_0]^*$. Следовательно, утверждение предложения 1 равносильно равенству $\text{Im } p_* = \text{Ker } \varphi_*$, т. е. утверждению о точности последовательности

$$[X, E]^* \xrightarrow{p_*} [X, B]^* \xrightarrow{\varphi_*} [X, B_0]^*,$$

или, иными словами, о точности последовательности

$$E \xrightarrow{p} B \xrightarrow{\varphi} B_0.$$

Таким образом, мы видим, что без потери точности последовательность Пуппе классифицированного расслоения $p: E \rightarrow B$ может быть удлинена справа на один член. Получающаяся точная последовательность

$$(22) \quad \dots \rightarrow \Omega^n F \xrightarrow{\Omega^n l} \Omega^n E \xrightarrow{\Omega^n p} \Omega^n B \xrightarrow{\Omega^n \varphi} \Omega^{n-1} F \rightarrow \dots$$

$$\dots F \xrightarrow{l} E \xrightarrow{p} B \xrightarrow{\varphi_0} B_0$$

называется *удлиненной последовательностью Пуппе* классифицированного расслоения.

Следует иметь в виду, что для точности последовательности (22) классифицированность расслоения p лишь достаточна, но не необходима. Например, согласно замечанию 4 эта последовательность останется точной, если в универсальном квадрате (20) условие стягиваемости пространства E_0 заменить более слабым условием, чтобы отображение $p \circ \varphi: E \rightarrow B_0$ было гомотопно нулю.

Рассмотрим теперь двойственную ситуацию

Пусть $i: A \rightarrow X$ — произвольное пунктированное отображение, $\text{Cyl}^*(i)$ — его обращенный приведенный цилиндр и $j: A \rightarrow \text{Cyl}^*(i)$ — корасслоение $a \mapsto [a, 0]$, $a \in A$.

Определение 5. Кослой

$$(23) \quad C^*(i) = \text{Cyl}^*(i)/jA$$

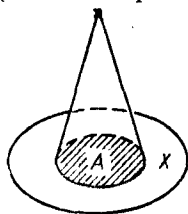
корасслоения j называется (*приведенным*) конусом отображения i . Он получается из конуса CA над пространством A приклеиванием к нему пространства X посредством отображения $[a, 1] \mapsto ia$.

В частности, если $A \subset X$ и i является вложением, то

$$C^*(i) = CA \cup X$$

(см. рис. 11).

Если, кроме того, пара (X, A) является парой Борсука (т. е. отображение i представляет собой корасслоение),



Пространство $C^*(i)$

Рис. 11.

то конус $C^*(i)$ пунктированно гомотопически эквивалентен кослою X/A пары (X, A) , поскольку этот кослой естественно гомеоморфен кослою $C^*(i)/CA$, который, согласно лемме 6 лекции 4, гомотопически эквивалентен пространству $C^*(i)$ (условия этой леммы выполнены, так как конус CA стягиваем, а пара $(C^*(i), CA)$ относительно гомеоморфна паре Борсука (X, A)).

и потому также является парой Борсука). $\square$

Заменив в коточной последовательности (10) кослой X/A на конус $C^*(i)$, мы получим последовательность

$$(24) \quad A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{i_1} C^*(i),$$

где i_1 — естественное вложение (являющееся, очевидно, корасслоением). Последовательность (24) коточна, будучи гомотопически изоморфна коточной последовательности

$$A \rightarrow \text{Cyl}^*(i) \rightarrow C^*(i).$$

Положив $i_n = (i_{n-1})_1$, $i_0 = i$, мы получим поэтому бесконечную вправо коточную последовательность

$$(25) \quad A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{i_1} C^*(i) \xrightarrow{i_2} C^*(i_1) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow C^*(i_{n-1}) \xrightarrow{i_{n+1}} C^*(i_n) \rightarrow \dots,$$

ние $S'i_{n-1} \circ k_n$ переводит в зависимости от четности n либо в точку $[i_{n-1}a, 1-t]$, либо в точку $[i_{n-1}a, t]$, а отображение $k_{n+1} \circ i_{n+2}$ — в отмеченную точку pt . Наоборот, каждую точку из $C^*(i_n)$ вида $[x, t]$, $x \in C^*(i_{n-2})$, $t \in I$, отображение $S'i_{n-1} \circ k_n$ переводит в точку pt , а отображение $k_{n+1} \circ i_{n+2}$ — либо в точку $[i_{n+2}x, t]$, либо в точку $[i_{n+2}x, 1-t]$. Таким образом, (при $n \geq 4$)

$$(S'i_{n-1} \circ k_n)[a, t] = \begin{cases} [a, 1-t] & \text{или } [a, t], \\ & \text{если } a \in C^*C^*(i_{n-2}), \\ [[a, 1-t], 0] & \text{или } [[a, t], 0], \\ & \text{если } a \in C^*C^*(i_{n-4}), \end{cases}$$

$$(k_{n+1} \circ i_{n+2})[a, t] = pt,$$

$$(S'i_{n-1} \circ k_n)[x, t] = pt,$$

$$(k_{n+1} \circ i_{n+2})[x, t] = \begin{cases} [x, t] & \text{или } [x, 1-t], \\ & \text{если } x \in C^*C^*(i_{n-4}), \\ [[x, t], 0] & \text{или } [[x, 1-t], 0], \\ & \text{если } x \in C^*C^*(i_{n-6}). \end{cases}$$

При $n \leq 4$ формулы лишь упрощаются. Например, при $n=1$ отображения $S'i_0 \circ k_1 = S'i \circ k_1$ и $k_2 \circ i_3$ из $C^*(i_1) = CX \cup CA$ (см. рис. 12) в $S^*C^*(i_{-1}) = S^*X$ задаются формулами

$$(S'i \circ k_1)[a, t] = [ia, 1-t] \quad [a, t] \in CA,$$

$$(k_2 \circ i_3)[a, t] = pt,$$

$$(S'i \circ k_1)[x, t] = pt, \quad [x, t] \in CX,$$

$$(k_2 \circ i_3)[x, t] = [x, t],$$

Положив

$$g_\tau[a, t] = [ia, 1-t+\tau t], \quad [a, t] \in CA,$$

$$g_\tau[x, t] = [x, \tau t], \quad [x, t] \in CX,$$

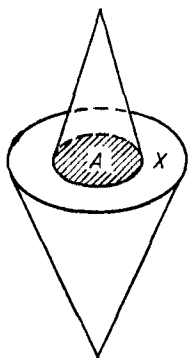
Пространство $C^*(i_1)$

Рис. 12.

мы, очевидно, получим гомотопию $g_\tau: C^*(i_1) \rightarrow S^*X$, связывающую отображение $S'i \circ k_1$ с отображением $k_2 \circ i_3$. При

$n > 1$ гомотопия g_τ строится, по существу, так же. $\square$

Отсюда следует, что, не нарушая кotoчности, мы можем в последовательности (25) заменить часть, начи-



нающуюся с члена $C^*(i_1)$, результатом применения к последовательности (25) функтора S^* . Итерируя это построение, мы получим бесконечную вправо S^* -периодическую коточную последовательность

$$(26) \quad A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{i_1} C^*(i) \xrightarrow{k} S^1 A \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow S^n A \xrightarrow{S^n i} S^n X \xrightarrow{S^n i_1} S^n C^*(i) \xrightarrow{S^n k} \dots,$$

где $k = k_1 \circ i_2$. Эта последовательность называется *коточной последовательностью Пуппе* (или *корезольвентой*) отображения $i: A \rightarrow X$.

В случае, когда отображение i также является корасслоением (вложением, соответствующим паре Борсука (X, A)), последовательность (26) гомотопически изоморфна коточной последовательности

$$(27) \quad A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{j} X/A \xrightarrow{k} S^1 A \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow S^n A \xrightarrow{S^n i} S^n X \xrightarrow{S^n j} S^n(X/A) \xrightarrow{S^n k} \dots,$$

где $j: X \rightarrow X/A$ — отображение факторизации. Последовательность (27) называется *коточной последовательностью Пуппе пары Борсука* (X, A) (или *корасслоения* $i: A \rightarrow X$).

По определению коточность последовательности (27) означает, что для любого пунктированного пространства Y имеет место точная последовательность

$$(28) \quad \dots \rightarrow [S^n(X/A), Y]^* \rightarrow [S^n X, Y]^* \rightarrow [S^n A, Y]^* \rightarrow \dots,$$

все члены которой являются абелевыми группами, кроме последних шести:

$$\dots \rightarrow [S(X/A), Y]^* \rightarrow [SX, Y]^* \rightarrow [SA, Y]^* \rightarrow \\ \rightarrow [X/A, Y]^* \rightarrow [X, Y]^* \rightarrow [A, Y]^*,$$

из которых первые три являются группами, а последние три — пунктированными множествами.

Если пара Борсука (X, A) классифицирована, т. е. $X = A \cup X_0$, где пространство X_0 стягиваемо, а пара (X_0, A_0) , $A_0 = X_0 \cap A$, является парой Борсука, то коточная последовательность Пуппе может быть с сохранением коточности удлинена на один член влево:

$$A_0 \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{i} X \rightarrow \dots,$$

где $\varphi: A_0 \rightarrow A$ —вложение (это же останется верным, если условие стягиваемости пространства X_0 заменить более слабым условием, чтобы вложение $i \circ \varphi_0: A_0 \rightarrow X$ было гомотопно нулю).

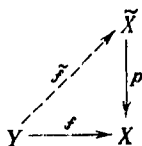
В теории функторов, двойственных функторам гомотопических групп (этими функторами мы займемся в следующем семестре) коточные последовательности Пуппе играют ту же роль, что и точные последовательности Пуппе (точнее, их частные случаи—гомотопические последовательности расслоений) в теории гомотопических групп.

Задача поднятия для накрытий.— Накрытия и подгруппы фундаментальной группы.— Автоморфизмы накрытий.— Вполне разрывные действия групп.— Фундаментальная группа букета окружностей.— Единственность умножения в группе $\pi_1 X$.— Универсальные накрытия.— Фундаментальные группы топологических групп и их факторпространств.

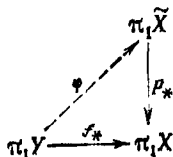
В этой лекции мы, пользуясь отождествлением накрытий с расслоениями, имеющими дискретные слои, изложим основные свойства накрывающих пространств и на этой основе получим практические методы вычисления фундаментальных групп. «Прямые» методы, не связанные с накрытиями, будут изложены в Дополнении.

Замечательное свойство накрытий (определяющее успех их применения в конкретных вычислениях) состоит в том, что для них оказывается возможным (при весьма широких общетопологических предположениях) указать необходимое и достаточное условие разрешимости произвольной задачи поднятия

(1)



Мы будем рассматривать эту задачу в категории TOP , т. е. предполагая накрытие p и данное отображение f пунктированными отображениями и требуя, чтобы искомое отображение $\tilde{f}$ также было пунктированным. В силу этого предположения мы можем, следуя общему методу алгебраической топологии, описанному в лекции 0, применить к диаграмме (1) функтор π_1 . Необходимым условием разрешимости соответствующей алгебраической задачи



является включение

$$(2) \quad \text{Im } f_* \subset \text{Im } p_*,$$

поскольку если φ существует, то $\text{Im } f_* = \text{Im } (p_* \circ \varphi) = p_*(\text{Im } \varphi) \subset \text{Im } p_*$. Поэтому включение (2) необходимо для разрешимости задачи (1).

Вопрос о достаточности этого условия уже не подведомствен алгебраическим методам и должен решаться прямым геометрическим построением. При этом, конечно, мы без ограничения общности можем считать пунктированное пространство Y связным.

В первую очередь мы заметим, что для связного пространства Y накрывающее отображение $\tilde{f}$, когда оно существует, единственно. Действительно, пусть $\bar{f}$ — другое накрывающее отображение, и пусть B — подмножество пространства Y , состоящее из всех точек $b \in Y$, для которых $\bar{f}(b) = \tilde{f}(b)$. Это подмножество содержит отмеченную точку и потому не пусто. Пусть $b \in Y$ и $x = f(b)$. По условию существует такая окрестность U точки x , что множество $p^{-1}U$ является дизъюнктым объединением открытых множеств $\bar{U}_\alpha$, каждое из которых отображение p гомеоморфно отображает на U . Если $b \in B$, то пусть $\bar{U}$ — то из этих множеств, которое содержит точку $\bar{f}(b) = \tilde{f}(b)$. Тогда множество $\bar{f}^{-1}(\bar{U}) \cap \tilde{f}^{-1}(\bar{U})$ открыто в Y , содержит точку b и содержится в B . Следовательно, множество B открыто в Y . Если $b \notin B$ и, значит, $\bar{f}(b) \neq \tilde{f}(b)$, то точки $\bar{f}(b)$ и $\tilde{f}(b)$ принадлежат двум различным из множеств $\bar{U}_\alpha$, скажем, $\bar{U}_1$ и $\bar{U}_2$. Тогда множество $\bar{f}^{-1}(\bar{U}_1) \cap \tilde{f}^{-1}(\bar{U}_2)$ открыто в Y , содержит точку b и содержится в $Y \setminus B$. Следовательно, множество B замкнуто. Являясь непустым, открытым и замкнутым подмножеством связного пространства Y , оно совпадает со всем Y . Поэтому $\bar{f} = \tilde{f}$. $\square$

Отсюда следует, что отображения $\tilde{f}, \tilde{g}: Y \rightarrow \tilde{X}$ гомотопны, если гомотопны отображения $f = p \circ \tilde{f}, g = p \circ \tilde{g}$. Действительно, по аксиоме НГ гомотопия G , связывающая отображения f и g , может быть накрыта гомотопией, $\tilde{G}$, связывающей отображение $\tilde{f}$ с некоторым отображением, накрывающим отображение g и потому совпадающим с отображением $\tilde{g}$. $\square$

При этом, если гомотопия G неподвижна на некотором подпространстве $B \subset Y$, то для любой точки $b \in B$ путь

$t \mapsto G(b, t)$ будет лежать в слое над точкой b и потому в силу дискретности этого слоя будет постоянным отображением, т. е. гомотопия $\bar{G}$ также будет неподвижна на B . Следовательно, в частности, отображения $\bar{f}$ и $\bar{g}$ будут совпадать на B . Таким образом, для того чтобы доказать, что отображения $\bar{f}, \bar{g}: Y \rightarrow \bar{X}$ совпадают на подпространстве $B \subset Y$, достаточно доказать, что отображения $\rho \circ \bar{f}, \rho \circ \bar{g}: Y \rightarrow X$ совпадают на B и гомотопны относительно B .

Этот способ доказательства совпадения на B отображений $Y \rightarrow \bar{X}$ часто бывает полезен.

Напомним теперь (см. [9]), что пространство Y называется *локально (линейно) связным*, если любая компонента каждого его открытого множества является открытым множеством (или, что равносильно, каждая окрестность его произвольной точки содержит связную окрестность).

Лемма 1. Для любого связного и локально связного пунктированного пространства Y серровское расслоение

$$\omega_1: PY \rightarrow Y, \quad u \mapsto u(1),$$

является эпиморфизмом.

Доказательство. Поскольку пространство Y связно, отображение ω_1 надъективно. Поэтому нам нужно только доказать, что каждое множество $V \subset Y$, полный прообраз $\omega_1^{-1}V$ которого открыт в PY , открыто в Y . Но по определению топологии в PY открытость множества $\omega_1^{-1}V$ означает, что оно является объединением конечных пересечений множеств вида $\mathscr{W}(K, U) \cap PY$, где, напомним, K — компактное (= замкнутое) подмножество отрезка I , U — открытое подмножество пространства Y , а $\mathscr{W}(K, U)$ — множество всех путей $u: I \rightarrow Y$, обладающих тем свойством, что $u(K) \subset U$. Следовательно, для любого пути $u_0 \in \omega_1^{-1}V$ существуют такие компактные подмножества $K_1, \dots, K_n \subset I$ и такие открытые подмножества $U_1, \dots, U_n \subset Y$, что $u_0 \in W_0 \subset \omega_1^{-1}V$, где

$$W_0 = \mathscr{W}(K_1, U_1) \cap \dots \cap \mathscr{W}(K_n, U_n) \cap PY.$$

При этом, перенумеровав, если нужно, множества $K_1, \dots, K_n$, мы можем считать, что для некоторого $m = 0, 1, \dots, n$ (случаи $m = 0$ и $m = n$ не исключаются)

$$1 \in K_1 \cap \dots \cap K_m \quad \text{и} \quad 1 \notin K_{m+1} \cup \dots \cup K_n.$$

Тогда $\omega_1(u_0) = u_0(1) \in U_1 \cap \dots \cap U_m$, и потому в Y существует такая связная окрестность V_0 точки $y_0 = \omega_1(u_0)$, что $V_0 = U_1 \cap \dots \cap U_m$.

Поскольку окрестность V_0 открыта (а множество $K = K_{m+1} \cup \dots \cup K_n$ замкнуто), существует такая точка

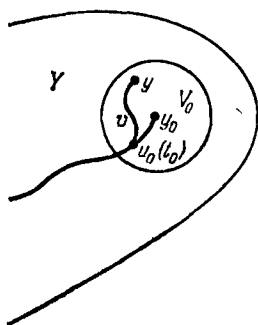


Рис. 13.

$t_0 < 1$ отрезка I , что $u_0([t_0, 1]) \subset V_0$, а поскольку окрестность V_0 связна, для любой точки $y \in V_0$, существует путь v , целиком лежащий в V_0 и соединяющий точки $u_0(t_0)$ и y (см. рис. 13). Тогда путь $u = u_0'v$, где u_0' — путь $t \mapsto u_0(t_0t)$, $t \in I$, будет обладать тем свойством, что $u(K_i) \subset U_i$ для любого $i = 1, \dots, n$ (при $i > m$ это очевидно, ибо $u(K_i) = u_0(K_i)$, а при $i \leq m$ вытекает из того, что $K_i = (K_i \cap [0, t_0]) \cup (K_i \cap [t_0, 1])$, причем $u(K_i \cap [0, t_0]) \subset u_0(K_i) \subset U_i$ и

$u(K_i \cap [t_0, 1]) \subset v(Y) \subset W_0 \subset U_i$, т. е. будет лежать в $W_0 \subset \omega_1^{-1}V$. Поэтому $y = \omega_1(u) \in V$. Этим доказано, что $V_0 \subset V$, т. е. что точка $y_0 = \omega_1(u) \in V$ является внутренней точкой множества V . Поскольку u_0 — произвольный путь из $\omega_1^{-1}V$ и, следовательно, y_0 — произвольная точка из V , лемма 1 тем самым полностью доказана. $\square$

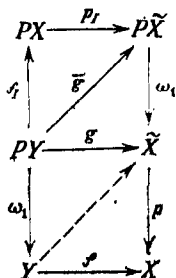
Теперь у нас все готово для доказательства следующей основной теоремы.

Теорема 1. Если пространство Y связно и локально связно, то отображение $\tilde{f}$ в диаграмме (1) существует тогда и только тогда, когда имеет место включение (2).

Доказательство. Поскольку необходимость этого условия уже доказана выше, нам остается доказать лишь его достаточность.

С этой целью мы заметим, что поскольку пространство PY стягиваемо, отображение $f \circ \omega_1: PY \rightarrow X$ гомотопно постоянному отображению (соответствующая гомотопия получается компонированием с отображением $f \circ \omega_1$ деформации $u \mapsto u_t$, $0 \leq t \leq 1$, пространства PY , где $u_t: \tau \mapsto u(t\tau)$, $0 \leq \tau \leq 1$), и потому для него существует накрывающее отображение $g: PY \rightarrow \tilde{X}$. По тем же соображениям (примененным к серровскому расслоению $\omega_1: P\tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$) для отображения g также существует накрывающее отображение $\bar{g}: PY \rightarrow P\tilde{X}$, в явном виде за-

дающееся формулой $\bar{g}(u): t \mapsto g(u_t)$, $u \in PY$, $0 \leq t \leq 1$, и потому удовлетворяющее соотношению $p_! \circ \bar{g} = f_!$, где $f_!: PY \rightarrow PX$ и $p_!: P\tilde{X} \rightarrow PX$ — отображения $u \mapsto f \circ u$, $u \in PY$, и $a \mapsto p \circ a$, $a \in P\tilde{X}$ (ибо $(p_! \circ \bar{g})(u)(t) = p(g(u)(t)) = p(g(u_t)) = f(\omega_1(u_t)) = f(u(t)) = f_!(u)(t)$ для любого пути $u \in PY$). Таким образом, мы имеем коммутативную диаграмму



Оказывается, что отображение $\bar{g}$ сохраняет слои расслоений $\omega_1: PY \rightarrow Y$ и $\omega_1: P\tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$, т. е. для любых путей $u, v \in PY$, удовлетворяющих соотношению $\omega_1 u = \omega_1 v$, т. е. соотношению $u(1) = v(1)$, пути $\bar{g}u, \bar{g}v \in P\tilde{X}$, удовлетворяют соотношению $\omega_1(\bar{g}u) = \omega_1(\bar{g}v)$, т. е. соотношению $(\bar{g}u)(1) = (\bar{g}v)(1)$. Действительно, если $u(1) = v(1)$, то определена петля $uv^{-1} \in \Omega Y$, а значит, и петля $f_!(uv^{-1}) \in \Omega X$, гомотопический класс которой принадлежит подгруппе $\text{Im } f_*$ группы $\pi_1 X$, а потому в силу условия (2) — и подгруппе $\text{Im } p_*$. Это означает, что в пространстве $\tilde{X}$ существует такая петля $a \in \Omega \tilde{X}$, что петля $p_! a \in \Omega X$ гомотопна $\text{rel } \{0, 1\}$ петле $f_!(uv^{-1}) = f_! u \cdot (f_! v)^{-1} = p_! \bar{g}u \cdot (p_! \bar{g}v)^{-1}$, и потому путь $u' = p_! \bar{g}u = p \circ \bar{g}u$ — пути $v' = p_! a \cdot p_! \bar{g}v = p_! (a \cdot \bar{g}v) = p \circ (a \cdot \bar{g}v)$. Следовательно, пути $\bar{g}u$ и $a \cdot \bar{g}v$ совпадают на $\{0, 1\}$. В частности, $(\bar{g}u)(1) = (a \cdot \bar{g}v)(1) = (\bar{g}v)(1)$.

Отсюда следует, что формула

$$\tilde{f}(y) = (\bar{g}u)(1), \text{ если } y = u(1), \text{ где } y \in Y, u \in PY,$$

корректно определяет отображение $\tilde{f}: Y \rightarrow \tilde{X}$, для которого $\tilde{f} \circ \omega_1 = \omega_1 \circ \bar{g} = g$, и потому $p \circ \tilde{f} \circ \omega_1 = f \circ \omega_1$. Поскольку отображение ω_1 надъективно, отсюда вытекает, что $p \circ \tilde{f} = f$, т. е. что отображение $\tilde{f}$ замыкает диаграмму (1).

Тем самым теорема 1 полностью доказана. $\square$

Следствие. Если пунктированное пространство Y связно, локально связно и односвязно, то для каждого пунктированного накрытия $p: \tilde{X} \rightarrow X$ любое пунктированное отображение $f: Y \rightarrow X$ единственным образом покрывается некоторым пунктированным отображением $\tilde{f}: Y \rightarrow \tilde{X}$. $\square$

Фигурирующая в теореме 1 подгруппа $\text{Im } p_*$ группы $\pi_1 X$ состоит из гомотопических классов тех петель пространства X , которые покрываются петлями пространства $\tilde{X}$. Поскольку, согласно сделанным выше замечаниям, гомотопность петель пространства $\tilde{X}$ равносильна гомотопности их проекций в X и, значит, гомоморфизм $p_*: \pi_1 \tilde{X} \rightarrow \pi_1 X$ является мономорфизмом (что, впрочем, непосредственно вытекает также — в силу точности гомотопической последовательности накрытия $p: \tilde{X} \rightarrow X$ — из дискретности его слоя), отсюда следует, что подгруппа $\text{Im } p_*$ группы $\pi_1 X$ изоморфна группе $\pi_1 \tilde{X}$.

Пунктированные накрытия $p: (X, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ данного пунктированного пространства X составляют категорию $\text{COV}^* X$ (являющуюся полной подкатегорией категории TOP^*_X), морфизмами которой являются их отображения над X , т. е. такие пунктированные отображения $\varphi: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_1 & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{X}_2 \\ p_1 \searrow & & \swarrow p_2 \\ & X & \end{array}$$

коммутативна.

Предложение 1. Если пространство X локально связно, то для накрытий $p_1: \tilde{X}_1 \rightarrow X$ и $p_2: \tilde{X}_2 \rightarrow X$ морфизм $\varphi: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ существует тогда и только тогда, когда

$$\text{Im } p_{1*} \subset \text{Im } p_{2*}.$$

Доказательство. Морфизм φ является поднятием отображения p_1 по отношению к отображению p_2 . Поэтому предложение 1 является частным случаем теоремы 1.

(Заметим, что пространство $\tilde{X}_1$ тогда и только тогда локально связно, когда локально связно пространство X .) $\square$

В силу следствия из теоремы 1, если морфизм φ существует, то только один. Отсюда и из предложения 1 немедленно вытекает следующее следствие.

Следствие. Пунктированные накрытия $p_1: \tilde{X}_1 \rightarrow X$ и $p_2: \tilde{X}_2 \rightarrow X$ связного и локально связного пространства X тогда и только тогда изоморфны, когда

$$\text{Im } p_{1*} = \text{Im } p_{2*}. \quad \square$$

В случае, когда морфизм φ существует, мы будем писать $p_1 \geq p_2$. Отношение $\geq$ является отношением порядка на классах изоморфных накрытий, и для локально связного пространства X соответствие

$$p \mapsto \text{Im } p_*$$

является антиизоморфным вложением множества всех классов изоморфных накрытий этого пространства в упорядоченное по включению множество всех подгрупп группы $\pi_1 X$. В этом смысле подгруппы $\text{Im } p_*$ группы $\pi_1 X$ классифицируют накрытия $p: \tilde{X} \rightarrow X$.

Ясно, что для любого элемента $\xi \in \pi_1 X$ и любой точки $x \in F$ конец ξx пути, начинающегося в точке x и накрывающего произвольную петлю класса ξ^{-1} , зависит только от ξ и x и что тем самым мы получаем некоторое действие группы $\pi_1 X$ на слое F накрытия $p: \tilde{X} \rightarrow X$. Ясно также, что это действие транзитивно (орбитой любой точки является весь слой F) и что стационарной подгруппой точки $\tilde{x}_0 \in F$ является подгруппа $\text{Im } p_*$.

В частности, отсюда вытекает, что соответствие $\xi \mapsto \xi \tilde{x}_0$ определяет биективное отображение фактор-множества

$$\text{Coker } p_* = \pi_1 X / \text{Im } p_*$$

на слой F .

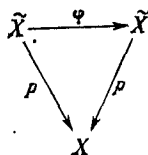
Накрытие $p: \tilde{X} \rightarrow X$ называется *конечнолистным*, если его слой F конечен, и в этом случае мощность слоя называется *числом листов накрытия* $p: \tilde{X} \rightarrow X$.

Из существования биективного отображения $\text{Coker } p_* \rightarrow F$ непосредственно вытекает, что накрытие $p: \tilde{X} \rightarrow X$ тогда и только тогда конечнолистно, когда индекс $\text{Card}(\text{Coker } p_*)$ подгруппы $\text{Im } p_*$ в группе $\pi_1 X$ конечен, и в этом случае число листов накрытия $p: \tilde{X} \rightarrow X$ равно этому индексу.

Утверждение, что число листов накрытия $p: \tilde{X} \rightarrow X$ равно 1, равносильно утверждению, что это накрытие является биективным и, следовательно, гомеоморфным отображением $\tilde{X} \rightarrow X$. Называя гомеоморфизмы $\tilde{X} \rightarrow X$ *тривиальными накрытиями*, мы получаем, следовательно, что накрытие $p: \tilde{X} \rightarrow X$ тогда и только тогда тривиально, когда $\text{Im } p_* = \pi_1 X$, т. е. когда отображение $p_*: \pi_1 \tilde{X} \rightarrow \pi_1 X$ является изоморфизмом.

Это, по-видимому, единственный случай, когда простое гомотопическое условие обеспечивает гомеоморфность отображения.

Гомеоморфное (вообще говоря, не сохраняющее отмеченную точку!) отображение $\varphi: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ называется *автоморфизмом* (или *скольжением*) накрытия $p: \tilde{X} \rightarrow X$, если оно является его изоморфизмом на себя как объекта категории $\text{COV } X$, т. е. если диаграмма



коммутативна. Каждый такой автоморфизм можно рассматривать как поднятие отображения p , и потому в силу теоремы единственности поднятий два автоморфизма совпадают, если они одинаково действуют на отмеченной точке $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ (напомним, что пространство $\tilde{X}$, по определению, связно). Следовательно, формула $\varphi \mapsto \varphi(\tilde{x}_0)$ задает инъективное отображение группы $\text{Aut } \tilde{X} = \text{Aut}(p: \tilde{X} \rightarrow X)$ автоморфизмов накрытия $p: \tilde{X} \rightarrow X$ в его слой $F = p^{-1}(x_0)$.

Впрочем, удобнее рассматривать отображение $\varphi \mapsto \varphi^{-1}(\tilde{x}_0)$, являющееся композицией биективного отображения $\varphi \mapsto \varphi^{-1}$ и отображения $\varphi \mapsto \varphi(\tilde{x}_0)$.

Накрытие $p: \tilde{X} \rightarrow X$ называется *транзитивным*, если это инъективное отображение биективно, т. е. если группа $\text{Aut } \tilde{X}$ транзитивно действует на слое F .

Компонируя отображение $\varphi \mapsto \varphi^{-1}(\tilde{x}_0)$ с биективным отображением $F \rightarrow \text{Coker } p_*$, обратным к построенному выше отображению $\text{Coker } p_* \rightarrow F$, мы получим некоторое

инъективное отображение

$$\alpha: \text{Aut } \tilde{X} \rightarrow \text{Coker } p_*.$$

Автоморфизму φ это отображение сопоставляет смежный класс по подгруппе $\text{Im } p_*$ элемента группы $\pi_1 X$, задаваемого петлей пространства X , являющейся образом при отображении p пути пространства $\tilde{X}$, соединяющего точку $\tilde{x}_0$ с точкой $\varphi(\tilde{x}_0)$.

Ясно, что накрытие $p: \tilde{X} \rightarrow X$ тогда и только тогда транзитивно, когда отображение α биективно.

Пусть $N(\text{Im } p_*)$ — нормализатор подгруппы $\text{Im } p_*$, т. е. наибольшая подгруппа группы $\pi_1 X$, в которой подгруппа $\text{Im } p_*$ инвариантна (является нормальным делителем). Тогда определена факторгруппа

$$\text{Weyl}(\tilde{X}) = N(\text{Im } p_*) / \text{Im } p_*,$$

называемая группой Вейля накрытия $p: \tilde{X} \rightarrow X$. Как множество она является подмножеством множества $\text{Coker } p_*$.

Предложение 2. Отображение α является мономорфным отображением группы автоморфизмов $\text{Aut } \tilde{X}$ в группу Вейля

$$(3) \quad \alpha: \text{Aut } \tilde{X} \rightarrow \text{Weyl}(\tilde{X}).$$

Доказательство. Утверждение, что α отображает группу $\text{Aut } \tilde{X}$ в группу $\text{Weyl}(\tilde{X})$, равносильно утверждению, что для любого автоморфизма $\varphi \in \text{Aut } \tilde{X}$ и любого пути $\tilde{u}$, соединяющего в $\tilde{X}$ точку $\tilde{x}_0$ с точкой $\varphi(\tilde{x}_0)$, гомотопический класс $[p \circ \tilde{u}]$ петли $u = p \circ \tilde{u} \in \Omega X$ лежит в нормализаторе $N(\text{Im } p_*)$ подгруппы $\text{Im } p_*$, т. е. что для любой петли $\tilde{v} \in \Omega(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ петля $u \circ v^{-1} \in \Omega X$, где $v = p \circ \tilde{v}$, также имеет вид $p \circ \tilde{w}$, где $\tilde{w} \in \Omega(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Но $u \circ v^{-1} = p \circ \tilde{w}_1$, где $\tilde{w}_1 = \tilde{u} \tilde{v}^{-1}$ — петля в точке $\varphi(\tilde{x}_0)$. Следовательно, $u \circ v^{-1} = (p \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \tilde{w}_1) = p \circ \tilde{w}$, где $\tilde{w} = \varphi^{-1} \circ \tilde{w}_1$ — петля в точке $\tilde{x}_0$, что и требуется.

Пусть теперь $\varphi, \psi \in \text{Aut } \tilde{X}$, и пусть $\tilde{u}, \tilde{v}$ — пути в $\tilde{X}$, соединяющие точку $\tilde{x}_0$ с соответственно точками $\varphi(\tilde{x}_0)$ и $\psi(\tilde{x}_0)$. Тогда путь $\tilde{u} \tilde{w}$, где $\tilde{w} = \varphi \circ \tilde{v}$, будет соединять точку $\tilde{x}_0$ с точкой $(\varphi \circ \psi)(\tilde{x}_0)$ и для него будет иметь место равенство

$$p \circ \tilde{u} \tilde{w} = (p \circ \tilde{u}) (p \circ \tilde{w}) = (p \circ \tilde{u}) (p \circ \tilde{v}).$$

Поэтому $\alpha(\varphi \circ \psi) = \alpha(\varphi)\alpha(\psi)$, т. е. отображение α является гомоморфизмом (а потому — в силу инъективности — и мономорфизмом). $\square$

Накрытие $p: \tilde{X} \rightarrow X$ называется *регулярным накрытием* (или *накрытием Галуа*), если подгруппа $\text{Im } p_*$ является инвариантной подгруппой группы $\pi_1 X$, т. е. если $\text{Weyl}(\tilde{X}) = \text{Coker } p_*$.

Следствие. Любое транзитивное накрытие $p: \tilde{X} \rightarrow X$ регулярно.

Доказательство. Для транзитивного накрытия $\alpha(\text{Aut } \tilde{X}) = \text{Coker } p_*$, а, согласно предложению 2, $\alpha(\text{Aut } \tilde{X}) \subset \text{Weyl } \tilde{X}$. В то же время $\text{Weyl } \tilde{X} \subset \text{Coker } p_*$. Поэтому $\text{Coker } p_* = \text{Weyl}(\tilde{X})$. $\square$

Предложение 3. Если пространство X локально связно, то, обратно, любое регулярное накрытие транзитивно.

Доказательство. Достаточно, очевидно, показать, что если пространство X локально связно, то мономорфизм (3) является изоморфизмом, т. е. что для любой петли $u \in \Omega X$ пространства X , гомотопический класс $[u]$ которой принадлежит нормализатору $N(\text{Im } p_*)$ подгруппы $\text{Im } p_*$, существует такой автоморфизм $\varphi \in \text{Aut } \tilde{X}$, что точка $\varphi(\tilde{x}_0)$ является концом пути $\tilde{u}: I \rightarrow \tilde{X}$, накрывающего петлю u и начинающегося в точке $\tilde{x}_0$. Но так как в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1) & \xrightarrow{\tilde{u}^\#} & \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \\ p_* \downarrow & & \downarrow p_* \\ \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{u^\#} & \pi_1(X, x_0) \end{array}$$

где $\tilde{x}_1 = \tilde{u}(1)$, горизонтальные стрелки являются изоморфизмами, то

$$\begin{aligned} p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) &= (p_* \circ \tilde{u}^\#) \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1) = (u^\# \circ p_*) \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1) = \\ &= p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1), \end{aligned}$$

и потому, согласно следствию из предложения 1, существует изоморфизм φ накрытия $(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ на накрытие $(\tilde{X}, \tilde{x}_1) \rightarrow (X, x_0)$. Этот изоморфизм и будет автоморфизмом $\varphi \in \text{Aut } \tilde{X}$, для которого $\varphi(\tilde{x}_0) = \tilde{u}(1)$. $\square$

Действие группы G на топологическом пространстве X называется *вполне разрывным*, если для каждой точки $x \in X$ существует такая ее окрестность U , что $g_1 U \cap g_2 U = \emptyset$ для любых двух различных элементов $g_1, g_2 \in G$, т. е., что, очевидно, равносильно, если $U \cap gU = \emptyset$ для любого элемента $g \neq e$ группы G . Ясно, что *все орбиты G_x вполне разрывного действия дискретны и оно является действием без неподвижных точек* (т. е. при $g \neq e$ каждое преобразование $x \mapsto gx$ не имеет неподвижных точек). Ясно также, что *каждая конечная группа, действующая без неподвижных точек на хаусдорфовом пространстве, действует вполне разрывно*.

Предложение 4. Для любого накрытия $p: \tilde{X} \rightarrow X$ группа $\text{Aut } \tilde{X}$ вполне разрывно действует на пространстве $\tilde{X}$. Если накрытие $p: \tilde{X} \rightarrow X$ транзитивно, то пространство $\tilde{X}/\text{Aut } \tilde{X}$ орбит этой группы гомеоморфно пространству X .

Обратно, для любого связного пространства $\tilde{X}$, на котором вполне разрывно действует некоторая группа G , естественное отображение $p: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}/G$ является транзитивным накрытием, группа $\text{Aut } \tilde{X}$ автоморфизмов которого естественно изоморфна группе G .

Короче говоря, транзитивно накрывающие пространства—это в точности пространства, в которых вполне разрывно действует некоторая группа.

Доказательство. Пусть $\tilde{x} \in \tilde{X}$, и пусть U —такая окрестность точки $x = p(\tilde{x})$, что множество $p^{-1}(U)$ является дизъюнктивным объединением открытых множеств $\tilde{U}_i$, каждое из которых накрытие p гомеоморфно отображает на U . Пусть, кроме того, $\tilde{U}_0$ —то из множеств $\tilde{U}_i$, которое содержит точку $\tilde{x}$. Ясно, что произвольный автоморфизм $\varphi \in \text{Aut } \tilde{X}$ переводит окрестность $\tilde{U}_0$ точки $\tilde{x}$, в то из множеств $\tilde{U}_i$, которое содержит точку $\varphi(\tilde{x})$. Поэтому, если $\varphi \neq \text{id}$, то $\tilde{U}_0 \cap \varphi \tilde{U}_0 = \emptyset$. Это доказывает первое утверждение предложения 3.

Поскольку орбиты группы $\text{Aut } \tilde{X}$ лежат в слоях накрытия $p: \tilde{X} \rightarrow X$, это накрытие индуцирует непрерывное отображение $\tilde{X}/\text{Aut } \tilde{X} \xrightarrow{p} X$, являющееся, как нетрудно видеть, эпиморфизмом. Если расслоение p транзитивно, то отображение p , очевидно, инъективно и, значит, пред-

ставляет собой гомеоморфизм. Это доказывает второе утверждение.

Пусть теперь $\tilde{X}$ — связное пространство, на котором вполне разрывно действует группа G , и пусть $p: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}/G$ — естественный эпиоморфизм $\tilde{x} \mapsto G\tilde{x}$. Пусть $x \in X = \tilde{X}/G$, $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$, и пусть $U = p(\tilde{U})$, где $\tilde{U}$ — такая окрестность точки $\tilde{x}$, что $\tilde{U} \cap g\tilde{U} = \emptyset$ для любого элемента $g \neq e$ группы G . Ясно, что $p^{-1}(U)$ является дизъюнктивным объединением всевозможных открытых множеств вида $g\tilde{U}$, $g \in G$, причем на каждом из этих множеств отображение p эпиоморфно. Кроме того, если $p(g\tilde{x}_1) = p(g\tilde{x}_2)$, т. е. если существует такой элемент $h \in G$, что $g\tilde{x}_1 = h(g\tilde{x}_2)$, то $g\tilde{U} \cap hg\tilde{U} = \emptyset$ и, значит, $g = hg$, т. е. $h = e$, и потому $g\tilde{x}_1 = g\tilde{x}_2$. Следовательно, отображение p на $g\tilde{U}$ инъективно и потому, будучи эпиоморфизмом, является гомеоморфизмом. Таким образом, отображение $p: \tilde{X} \rightarrow X$ представляет собой накрытие.

Наконец, так как $p(g\tilde{x}) = p(\tilde{x})$ для любой точки $\tilde{x} \in \tilde{X}$ и любого элемента $g \in G$, то группа G содержится в группе $\text{Aut } \tilde{X}$ (мы отождествляем элементы группы G с производимыми ими преобразованиями). Так как группа G транзитивно действует на каждом слое (являющемся — напомним — орбитой), то для любого автоморфизма $\varphi \in \text{Aut } \tilde{X}$ и любой точки $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ существует такой элемент g группы G , что $\varphi(\tilde{x}_0) = g\tilde{x}_0$. Поскольку отображение $\varphi \mapsto \varphi(\tilde{x}_0)$, как мы знаем, инъективно, отсюда следует, что $\varphi = g$. Следовательно, $G = \text{Aut } \tilde{X}$. $\square$

Следствие. Если пространство X является пространством орбит X/G некоторой группы G , вполне разрывно действующей на односвязном пространстве $\tilde{X}$, то

$$(4) \quad \pi_1 X \approx G.$$

Доказательство. Рассмотрим транзитивное накрытие $p: \tilde{X} \rightarrow X = \tilde{X}/G$. В силу односвязности пространства $\tilde{X}$ для этого накрытия имеет место равенство $\text{Im } p_* = 0$, т. е. равенство $\text{Coker } p_* = \pi_1 X$. Поэтому $G = \text{Aut } \tilde{X} \approx \text{Coker } p_* = \pi_1 X$. $\square$

Это следствие доставляет нам мощный способ вычисления фундаментальных групп.

Пример. Формула

$$\alpha x = x + 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

где α — образующая бесконечной циклической группы F_1 , определяет вполне разрывное действие этой группы на пространстве $\mathbb{R}$. Соответствующие орбиты являются не чем иным, как смежными классами аддитивной группы $\mathbb{R}$ по подгруппе $\mathbb{Z}$ целых чисел (изоморфной группе F_1) и, значит, пространство орбит $\mathbb{R}/F_1$ — факторгруппой $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, т. е. окружностью S^1 . Поскольку пространство $\mathbb{R}$, будучи стягиваемо, односвязно, этим доказано, что

$$(5) \quad \pi_1 S^1 = F_1,$$

или, в аддитивной записи, $\pi_1 S^1 = \mathbb{Z}$.

Легко видеть, что при изоморфизме (5) элементу $\iota = [\text{id}]$, $\text{id}: (S^1, s_0) \rightarrow (S^1, s_0)$, группы $\pi_1 S^1$ соответствует образующая α группы F_1 . Это означает, что элемент ι_1 является образующей бесконечной циклической группы $\pi_1 S^1$, т. е. — в аддитивной записи — что любой элемент группы $\pi_1 S^1$ единственным образом представляется в виде $n\iota_1$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Тем самым каждой петле $(S^1, s_0) \rightarrow (S^1, s_0)$ поставлено в соответствие некоторое целое число $n \in \mathbb{Z}$, зависящее только от гомотопического класса этой петли. Наглядно оно является не чем иным, как числом оборотов этой петли. Это число можно аналитически выразить известным интегралом и на этой основе получить прямое доказательство равенства (5). (См. ниже лекцию 7.)

Замечание 1. Важно иметь в виду, что изоморфизм (4) обладает свойством естественности, т. е. для любых групп G и H , вполне разрывно действующих на односвязных пространствах $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$, любого гомоморфизма $\varphi: G \rightarrow H$ и любого непрерывного отображения $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$, обладающего тем свойством, что $\tilde{f}(gx) = \varphi(g)\tilde{f}(x)$, $x \in \tilde{X}$, $g \in G$, и потому индуцирующего непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$, $X = \tilde{X}/G$, $Y = \tilde{Y}/H$, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi_1 X & \xrightarrow{f_*} & \pi_1 Y \\ \approx \downarrow & & \downarrow \approx \\ G & \xrightarrow{\varphi} & H \end{array}$$

Иначе говоря, изоморфизмы $G \approx \pi_1 X$ и $H \approx \pi_1 Y$ переводят гомоморфизм φ в гомоморфизм f_* .

Это замечание позволяет нам вычислять не только фундаментальные группы, но и их гомоморфизмы, индуцированные непрерывными отображениями.

Пример. Пусть f — антиподальное отображение $S^1 \rightarrow S^1$, задаваемое формулой $f(x) = -x$. Легко видеть, что при отождествлении $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}_1$ это отображение индуцируется отображением $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, действующим по формуле $\tilde{f}(x) = x + 1/2$, $x \in \mathbb{R}$. Так как $\alpha \tilde{f}(x) = \tilde{f}(\alpha x)$, где $\alpha: x \mapsto x + 1$, то соответствующий гомоморфизм $\varphi: F_1 \rightarrow F_1$ является тождественным отображением. Этим доказано, что антиподальное отображение $S^1 \rightarrow S^1$ индуцирует тождественное отображение $\text{id}: \pi_1 S^1 \rightarrow \pi_1 S^1$ фундаментальной группы окружности S^1 .

Этот пример нам пригодится в лекции 13.

В качестве более сложного примера на применение следствия из предложения 4 мы вычислим фундаментальную группу $\pi_1(S^1 \vee S^1)$ букета $S^1 \vee S^1$ двух окружностей («восьмерки»).

При каждом целом $r > 0$ отметим на окружности плоскости $\mathbb{R}^2$ радиуса r с центром $(0, 0)$ точки, являющиеся вершинами правильного $4 \cdot 3^{r-1}$ -угольника, так, чтобы среди этих точек оказалась точка $(r, 0)$. Назовем эти точки вершинами ранга $r > 0$. Точку $(0, 0)$ мы будем считать вершиной ранга 0. Вершину $(0, 0)$ мы соединим прямолинейными отрезками со всеми четырьмя вершинами ранга 1 и каждую вершину ранга $r > 0$ — с тремя ближайшими к ней вершинами ранга $r + 1$ (см. рис. 14).

Объединение всех построенных отрезков мы обозначим через T , а пересечение T с кругом радиуса r и центром $(0, 0)$ — через T_r . Очевидно, T_r стягивается к T_{r-1} , откуда по индукции непосредственно вытекает, что T_r стягиваемо. Поскольку любое компактное подмножество плоскости содержится в круге достаточно большого радиуса, то произвольное отображение $S^1 \rightarrow T$ является отображением в некоторое пространство T_r и потому — в силу стягиваемости этого пространства — гомотопно постоянному отображению. Этим доказано, что пространство T односвязно. (Фактически пространство T стягиваемо; см. предложение 4 из дополнения к этой лекции.)

Вершины пространства T удобно описываются с помощью свободной группы F_2 с двумя образующими α и β . По определению элементами этой группы являются груп-

новые слова вида

$$\alpha^{a_1}\beta^{b_1}\dots\alpha^{a_n}\beta^{b_n},$$

где $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n \in \mathbb{Z}$, причем предполагается, что показатели $a_2, \dots, a_n$ и $b_1, \dots, b_{n-1}$ отличны от нуля. Умножение этих слов состоит в их приписывании друг

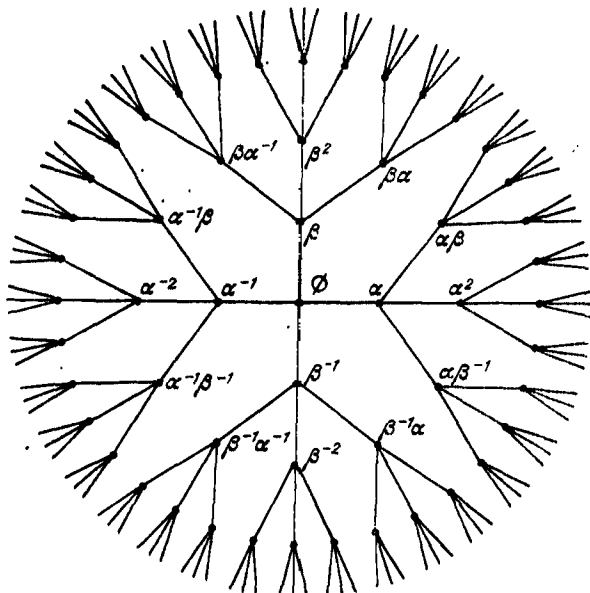


Рис. 14.

к другу с последующим, когда требуется, приведением «подобных членов». (Из-за этого приведения проверка ассоциативности умножения несколько затруднена; см. Дополнение к этой лекции.) Единицей группы F_2 является пустое слово $\emptyset$.

Вершине $(0, 0)$ мы поставим в соответствие пустое слово $\emptyset$, а четырем вершинам ранга 1 слова $\alpha, \beta, \alpha^{-1}, \beta^{-1}$ (в любом порядке). Далее построение продолжается по индукции: если вершинам ранга r уже поставлены в соответствие элементы группы F_2 , то трем вершинам ранга $r+1$, ближайшим к вершине ранга r , которой соответствует слово σ , мы сопоставляем (в любом порядке) те три из четырех слов $\sigma\alpha, \sigma\beta, \sigma\alpha^{-1}, \sigma\beta^{-1}$, в которых невозможно приведение подобных членов (например, если слово σ кончается на β в положительной степени, то мы

берем слова $\sigma\alpha$, $\sigma\alpha^{-1}$, $\sigma\beta$; см. рис. 15). Очевидно, что таким образом устанавливается взаимно однозначное соответствие между вершинами пространства T и элементами группы F_2 , причем вершина, которой отвечает элемент $\sigma \in F$, соединена отрезками с вершинами, отвечающими элементам $\sigma\alpha$, $\sigma\beta$, $\sigma\alpha^{-1}$, $\sigma\beta^{-1}$ и только с этими вершинами.

Определим также действие группы F_2 в T , считая, что элемент $\tau \in F_2$ переводит вершину, отвечающую элементу $\sigma \in F_2$, в вершину, отвечающую элементу $\tau\sigma$, и линейно отображает каждый отрезок, соединяющий две вершины, на отрезок, соединяющий их образы. Ясно, что это — вполне разрывное действие. *Фундаментальной областью* этого действия, т. е. множеством представителей его орбит, является объединение двух отрезков, соединяющих точку $(0, 0)$ с вершинами $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$, отвечающими словам α и β , причем сами вершины $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ эквивалентны точке $(0, 0)$. Это означает, что пространством орбит T/F_2 является букет $S^1 \vee S^1$ двух окружностей, получающийся отождествлением точек $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ с точкой $(0, 0)$.

Поскольку пространство T , как мы видели, односвязно, этим доказано, что

$$(6) \quad \pi_1(S^1 \vee S^1) = F_2.$$

Легко видеть при этом, что в изоморфизме (6) элементам α и β соответствуют элементы ι' и ι'' группы $\pi_1(S^1 \vee S^1)$, являющиеся гомотопическими классами канонических вложений

$$\iota': S^1 \rightarrow S^1 \vee S^1, x \mapsto x_I, \text{ и } \iota'': S^1 \rightarrow S^1 \vee S^1, x \mapsto x_{II}.$$

Таким образом, группа $\pi_1(S^1 \vee S^1)$ является свободной группой с двумя образующими ι' и ι'' .

Аналогичным образом можно доказать, что *фундаментальная группа букета n окружностей является свободной группой с n образующими*, но мы предпочтем доказать это другим методом в Дополнении к этой лекции.

Основываясь на формуле (6) (и на ее аналоге при $n=3$) можно, в частности, доказать сделанное в замечании 2 лекции 4 утверждение (и тем самым завершить доказательство категоричности аксиом для гомотопических групп из предыдущей лекции).

Предложение 5. Умножение $([u], [v]) \mapsto [uv]$ и инверсное умножение $([u], [v]) \mapsto [vu]$ являются единствен-

ными естественными по X умножениями в множестве $\pi_1 X = [S^1, X]$.

Для любой группы G каждый элемент $s(\alpha, \beta) = \alpha^{a_1} \beta^{b_1} \dots \alpha^{a_n} \beta^{b_n}$ группы F_2 определяет отображение $s: G \times G \rightarrow G$, переводящее элемент $(g, h) \in G \times G$ в элемент $s(g, h) = g^{a_1} h^{b_1} \dots g^{a_n} h^{b_n}$ группы G . Например, при $G = F_2$ в группе G определены элементы $s(\alpha, \emptyset) = \alpha^{a_1 + \dots + a_n}$ и $s(\emptyset, \beta) = \beta^{b_1 + \dots + b_n}$, а при $G = F_3$, где F_3 — свободная группа с тремя образующими α, β, γ , в группе G определены элементы $s(s(\alpha, \beta), \gamma)$ и $s(\alpha, s(\beta, \gamma))$.

Ключом к предложению 5 является следующая комбинаторная лемма:

Лемма 2. Если слово $s(\alpha, \beta) \in F_2$ удовлетворяет соотношениям

$$(7) \quad s(\alpha, \emptyset) = \alpha, \quad s(\emptyset, \beta) = \beta$$

$$(8) \quad s(s(\alpha, \beta), \gamma) = s(\alpha, s(\beta, \gamma)),$$

то либо $s(\alpha, \beta) = \alpha\beta$, либо $s(\alpha, \beta) = \beta\alpha$.

Доказательство. Условие $s(\alpha, \emptyset) = \alpha$ означает, что $a_1 + \dots + a_n = 1$, а условие $s(\emptyset, \beta) = \beta$ — что $b_1 + \dots + b_n = 1$. Следовательно, $n \geq 1$, причем, если $n = 1$, то $a_1 = 1, b_1 = 1$ (т. е. $s(\alpha, \beta) = \alpha\beta$), а если $n = 2$ и $a_1 = 0, b_2 = 0$, то $a_2 = 1, b_1 = 1$ (т. е. $s(\alpha, \beta) = \beta\alpha$). Поэтому нам достаточно доказать, что случай $n > 2$ невозможен, а при $n = 2$ обязательно $a_1 = 0$ и $b_2 = 0$.

Пусть сначала $a_1 > 0$ и $b_n \neq 0$ ($n \geq 2$). Тогда

$$s(\alpha\beta)^{a_1} = \underbrace{\alpha^{a_1} \beta^{b_1} \alpha^{a_2} \dots \alpha^{a_{n-1}} \beta^{b_n} \dots \alpha^{a_1} \beta^{b_1} \alpha^{a_2} \dots \alpha^{a_n} \beta^{b_n}}_{a_1 \text{ раз}},$$

откуда следует, что слово $s(s(\alpha, \beta), \gamma)$ имеет вид $\alpha^{a_1} \beta^{b_1} \alpha^{a_2} \dots$. В то же время слово $s(\alpha, s(\beta, \gamma))$ при $b_1 > 0$ имеет вид $\alpha^{a_1} \beta^{a_1} \gamma^{b_1} \dots$, а при $b_1 < 0$ — вид $\alpha^{a_1} \gamma^{-b_1} \beta^{-a_n} \dots$ и потому заведомо отлично от слова $s(s(\alpha, \beta), \gamma)$. Поскольку это противоречит условию (8), случай $a_1 > 0$ и $b_n \neq 0$, следовательно, невозможен.

Если $a_1 > 0$, но $b_n = 0$, то в слове $s(\alpha, \beta)^{a_1}$ нужно привести подобные члены, т. е. при $a_n + a_1 \neq 0$ заменить $\alpha^{a_n} \beta^{b_n} \alpha^{a_1}$ на $\alpha^{a_n + a_1}$, а при $a_n + a_1 = 0$ и $b_{n-1} + b_1 \neq 0$ заменить $\beta^{b_n} \alpha^{a_n} \beta^{b_n} \alpha^{a_1} \beta^{b_1}$ на $\beta^{b_{n-1} + b_1}$ и т. д. Поскольку $a_1 + \dots + a_n = 1$ и $b_1 + \dots + b_n = 1$, полного сокращения произойти при этом не может, откуда следует, что слово $s(s(\alpha, \beta), \gamma)$ будет по-прежнему иметь вид $\alpha^{a_1} \beta^{b_1} \alpha^{a_2} \dots$.

(при $n=2$ —вид $\alpha^{a_1}\beta\alpha^{a_2}$ с $a_1+a_2=1$), и потому условие (8) опять выполненным быть не может.

Пусть теперь $a_1=-a$, где $a>0$. Тогда

$$s(\alpha, \beta)^{a_1} = \underbrace{\beta^{-b_n\alpha^{-a_n}} \dots \beta^{-b_1\alpha^{-a_1}} \dots \beta^{-b_n\alpha^{-a_n}} \dots \beta^{-b_1\alpha^{-a_1}}}_{a \text{ раз}},$$

откуда при $b_n \neq 0$ следует, что слово $s(s(\alpha, \beta), \gamma)$ имеет вид $\beta^{-b_n\alpha^{-a_n}} \dots$ и потому не может совпадать со словом $s(\alpha, s(\beta, \gamma)) = \alpha^{a_1} \dots$. Если же $b_n=0$, то—снова из-за невозможности полного сокращения—слово $s(\alpha, s(\beta, \gamma))$ будет иметь вид $\alpha^{-a_n}\beta^{-b_{n-1}}\alpha^{-a_{n-1}} \dots$ (при $n=2$ —вид $\alpha^{-a_2}\beta^{-1}\alpha^{-a_1}$ с $a_1+a_2=1$) и потому опять не может совпадать со словом $s(\alpha, s(\beta, \gamma))$ (имеющим при $a_1>0$ вид $\alpha^{a_1}\beta\alpha^{a_2}\gamma^{b_1} \dots$, а при $a_1<0$ —вид $\alpha^{a_1}\beta^{-a_n}\beta^{-b_{n-1}} \dots$).

Пусть, наконец, $a_1=0$. Если $n=2$ (т. е. если $s(\alpha, \beta) = \beta^b\alpha\beta^{1-b}$, то $s(s(\alpha, \beta), \gamma) = \gamma^b\beta^b\alpha\beta^{1-b}\gamma^{1-b}$, в то время как $s(\alpha, s(\beta, \gamma)) = (\gamma^b\beta\gamma^{1-b})^b\alpha(\gamma^b\beta\gamma^{1-b})^{1-b}$, т. е. $s(\alpha, s(\beta, \gamma)) = \gamma^b\beta \dots$, если $b>0$, и $s(\alpha, s(\beta, \gamma)) = \gamma^{b-1}\beta^{-1} \dots$, если $b<0$. Поэтому равенство (8) возможно только при $b=0$ или 1, т. е. при $s(\alpha, \beta) = \alpha\beta$ или $\beta\alpha$.

Если же $n>2$, то

$$s(s(\alpha, \beta), \gamma) = \begin{cases} \gamma^{b_1}\beta^{b_1}\alpha^{a_2} \dots, & \text{если } a_2 > 0, \\ \gamma^{b_1}\beta^{-b_n}\alpha^{-a_n} \dots, & \text{если } a_2 < 0, \end{cases}$$

и

$$s(\alpha, s(\beta, \gamma)) = \begin{cases} \gamma^{b_1}\beta^{a_2}\gamma^{b_2} \dots, & \text{если } b_1 > 0, \\ \gamma^{-b_n}\beta^{-a_n}\gamma^{-b_{n-1}} \dots, & \text{если } b_1 < 0, \end{cases}$$

и во всех случаях равенство (8) невозможно.

Тем самым лемма 2 полностью доказана. $\square$

Доказательство предложения 4. Пусть $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \circ \beta$ —произвольное естественное по X умножение в $\pi_1 X$. Тогда при $X = S^1 \vee S^1$ в свободной группе $\pi_1(S^1 \vee S^1)$ с образующими i' и i'' будет, в частности, определено слово $s(i', i'') = i' \circ i''$. Но ясно, что для любого пространства X и любых элементов $\alpha, \beta \in \pi_1 X$ существует такое отображение $f: S^1 \vee S^1 \rightarrow X$, что $f_* i' = \alpha$ и $f_* i'' = \beta$. Так как $f_* s(i', i'') = s(f_* i', f_* i'')$ и в силу естественности $f_* i' \circ f_* i'' = f_*(i' \circ i'')$, то в группе $\pi_1 X$ будет иметь место равенство

$$(9) \quad \alpha \circ \beta = s(\alpha, \beta).$$

Поэтому для доказательства предложения 4 достаточно доказать, что слово $s(\alpha, \beta)$ удовлетворяет условиям (7) и (8) леммы 2 (и потому равно либо $\alpha\beta$, либо $\beta\alpha$).

Имея это в виду, мы покажем сначала, что для любого пунктированного пространства X единицей группы $\pi_1 X$ относительно умножения $\circ$ является класс 1 постоянного отображения $S^1 \rightarrow X$. Действительно, для любого пунктированного отображения $f: Y \rightarrow X$ отображение $f_*: \pi_1 Y \rightarrow \pi_1 X$, являясь в силу естественности гомоморфизмом относительно умножения $\circ$, переводит единицу этого умножения в единицу. Но при $Y = pt$ множество $\pi_1 Y$ одноэлементно, и потому образ $f_*(1)$ его единственного элемента 1 при отображении $f_*: \pi_1(pt) \rightarrow \pi_1 X$, индуцированном отображением $f: pt \rightarrow X$, будет единицей умножения $\circ$. Этим все и доказано, поскольку $f_*(1) = 1$.

Отсюда в силу формулы (9) непосредственно следует, что $s(\alpha, 1) = \alpha$ и $s(1, \beta) = \beta$ для любых элементов $\alpha, \beta \in \pi_1 X$. При $X = S^1 \vee S^1$ это дает (7).

Наконец, так как умножение $\circ$ ассоциативно, то для любых элементов $\alpha, \beta, \gamma \in \pi_1 X$ имеет место равенство $s(s(\alpha, \beta), \gamma) = s(\alpha, s(\beta, \gamma))$, что при $X = S^1 \vee S^1 \vee S^1$ дает (8). $\square$

Вернемся теперь к накрытиям с целью в определенной мере закруглить их теорию.

Накрытие $p_0: \tilde{X}_0 \rightarrow X$ называется *односвязным*, если пространство $\tilde{X}_0$ односвязно (и, значит, $\text{Im } p_{0*} = 0$).

Пространство X называется *накрываемым*, если для него существует односвязное накрытие.

Группа автоморфизмов $\text{Aut } \tilde{X}_0$ односвязного накрытия $p_0: \tilde{X}_0 \rightarrow X$ естественным образом вкладывается в фундаментальную группу $\pi_1 X$ и совпадает с этой группой:

$$\text{Aut } \tilde{X}_0 = \pi_1 X,$$

если пространство X локально связно.

Для любой подгруппы $G \subset \text{Aut } \tilde{X}_0$ определено пространство $\tilde{X} = \tilde{X}_0/G$, для которого, во-первых, $\pi_1 \tilde{X} = G$ и, во-вторых, накрытие $p_0: \tilde{X}_0 \rightarrow X$ индуцирует отображение $p: \tilde{X} \rightarrow X$, являющееся, очевидно, накрытием. Этим, в частности, доказано, что *если связное пространство X локально связно и накрываемо, то для любой подгруппы G*

группы $\pi_1 X$ существует такое (с точностью до изоморфизма единственное) накрытие $p: \tilde{X} \rightarrow X$, что $\text{Im } p_* = G$.

Таким образом, для каждого связного локально связного и накрываемого пространства X соответствие

$$p \mapsto \text{Im } p_*$$

представляет собой антиизоморфизм частично упорядоченного множества классов изоморфных накрытий пространства X на частично упорядоченное по включению множество всех подгрупп группы $\pi_1 X$.

В этом соответствии (называемом иногда *соответствием Галуа*) регулярным (транзитивным) накрытиям отвечают инвариантные подгруппы, причем соответствующие факторгруппы будут изоморфны группам автоморфизмов этих накрытий.

Накрытие $p_0: \tilde{X}_0 \rightarrow X$ пространства X называется *универсальным*, если $p_0 \geq p$ для любого накрытия $p: \tilde{X} \rightarrow X$ пространства X .

Поскольку построенное выше отображение $p_0: \tilde{X}_0 \rightarrow \tilde{X}_0/G$ является, очевидно, отображением над X , мы видим, что $p_0 \geq p$ для любого накрытия $p: \tilde{X} \rightarrow X$, т. е. что *односвязное накрытие локально связного накрываемого пространства X универсально*.

Замечание 3. Ненакрываемое локально связное пространство может обладать универсальным накрытием (конечно, неодносвязным).

В [9] топологическое пространство X называлось *односвязным*, если тождественное отображение $\text{id}: X \rightarrow X$ было его универсальным накрытием. Таким образом, это понятие отлично от введенного здесь, но совпадает с ним для локально связных пространств.

Топологическое пространство X называется *полулокально односвязным*, если существует его открытое покрытие $\{U_\alpha\}$, обладающее тем свойством, что каждое отображение $S^1 \rightarrow X$, образ которого содержится в одном из элементов этого покрытия, гомотопен постоянному отображению.

Легко видеть, что *любое накрываемое пространство X полулокально односвязно*. Действительно, если $p_0: \tilde{X}_0 \rightarrow X$ — односвязное накрытие и U — открытое множество в X , над которым расслоение p_0 тривиально, то любое отображение $S^1 \rightarrow U$ поднимается в $\tilde{X}_0$, а так как $\tilde{X}_0$ одно-

связно, то поднятое отображение, а потому и исходное отображение, гомотопно постоянному. $\square$

Вместе с тем можно показать (см., например, [9], стр. 180), что *если связное полулокально односвязное пространство локально связно, то оно накрываемо*. Поскольку этот факт непосредственного отношения к теории гомотопий не имеет, мы его здесь доказывать не будем.

В [9] было также доказано, что если топологическая группа G , рассматриваемая как топологическое пространство, накрываема, и если $p: \tilde{G} \rightarrow G$ — соответствующее односвязное пунктированное накрытие, то в $\tilde{G}$ можно единственным образом ввести групповую структуру, по отношению к которой накрытие p будет гомоморфизмом. Ядро $\text{Ker } p$ этого гомоморфизма является (см. [9], стр. 202) дискретной абелевой инвариантной подгруппой группы $\tilde{G}$. Его действие левыми сдвигами на $\tilde{G}$ вполне разрывно и соответствующее факторпространство — являющееся не чем иным, как факторгруппой $\tilde{G}/\text{Ker } p_*$ — гомеоморфно группе G . Поэтому

$$\text{Ker } p_* = \pi_1 G.$$

Это равенство, подобно равенству (4), является одним из важнейших орудий для вычисления фундаментальных групп. В [9] оно было принято за определение группы $\pi_1 G$.

Для любой группы Ли G и любой ее замкнутой подгруппы H естественное отображение

$$G \rightarrow G/H$$

является, как легко видеть, локально тривиальным расслоением со слоем H . (Заметим, что любое факторногообразия группы Ли очевидным образом паракомпактно.) Поэтому для него имеет место точная последовательность

$$\dots \rightarrow \pi_2(G/H) \rightarrow \pi_1 H \rightarrow \pi_1 G \rightarrow \pi_1(G/H) \rightarrow \pi_0 H \rightarrow \dots,$$

откуда следует, что если подгруппа H связна, то группа $\pi_1(G/H)$ является факторгруппой группы $\pi_1 G$, а если факторпространство G/H односвязно, то группа $\pi_1 G$ является факторгруппой группы $\pi_1 H$ (см. [9], предложения 8 и 9 лекции 12).

ДОПОЛНЕНИЕ

Пределы диаграмм над произвольной категорией.— Пределы диаграмм над категорией групп.— Их копредставления.— Структура свободного произведения групп.— Теорема Зейферта—ван Кампена.— Следствия теоремы Зейферта—ван Кампена.— Графы.— Деревья.— Вычисление фундаментальной группы графа.

Диаграммной схемой называется множество, разбитое на два подмножества и снабженное двумя отображениями второго подмножества в первое. Элементы первого подмножества называются *вершинами* схемы, а второго—ее *стрелками*. Случай пустого множества стрелок не исключается. По условию каждой стрелке α отвечают две вершины a и b . Говорят, что стрелка α является стрелкой из a в b и пишут $\alpha: a \rightarrow b$.

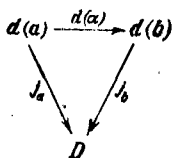
Морфизмом диаграммной схемы D в диаграммную схему D' называется произвольное отображение $D \rightarrow D'$, переводящее вершины в вершины, стрелки в стрелки и такое, что если $a \mapsto a'$, $b \mapsto b'$, $\alpha \mapsto \alpha'$ и $\alpha: a \rightarrow b$, то $\alpha': a' \rightarrow b'$.

Ясно, что каждая категория является диаграммной схемой (мы игнорируем здесь различия между «малыми» и «большими» категориями). Морфизм $D \rightarrow A$ диаграммной схемы D в категорию A (рассматриваемую как диаграммная схема) называется *диаграммой типа D над категорией A* .

Это формальное определение является экспликацией интуитивного понятия диаграммы, которого до сих пор нам было вполне достаточно.

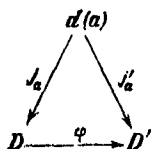
Если диаграммная схема D не содержит стрелок, то диаграммы типа D суть не что иное, как семейства объектов категории A , индексами которых являются вершины схемы D .

Конусом (прямым) над диаграммой $d: D \rightarrow A$ с вершиной D называется такое семейство морфизмов $j_a: d(a) \rightarrow D$, $a \in D$, категории A , что для любой стрелки $\alpha: a \rightarrow b$ из D диаграмма



коммутативна ($j_a = j_b \circ d(\alpha)$). Морфизмом конуса $\{j_a: d(a) \rightarrow D\}$ в конус $\{j'_a: d(a) \rightarrow D'\}$ называется такой мор-

фрмзм $\varphi: D \rightarrow D'$ категории A , что для любой вершины $a \in D$ диаграмма



коммутативна. Все конусы над диаграммой d и их морфизмы образуют, очевидно, категорию. Мы будем обозначать эту категорию символом $\text{CON}(d)$.

В случае, когда схема D имеет вид $\cdot \leftarrow \cdot \rightarrow \cdot$, диаграммами типа D являются пары морфизмов $i_A: C \rightarrow A$, $i_B: C \rightarrow B$ категории A , и мы получаем конусы над парами (i_A, i_B) в смысле лекции 1.

В случае, когда схема D не имеет стрелок и, значит, диаграммами типа D являются семейства $\{A_a, a \in D\}$ объектов категории A , конусами над $\{A_a, a \in D\}$ являются семейства морфизмов $j_a: A_a \rightarrow D$, а их морфизмами — обычные морфизмы семейств.

Определение 1. Пределом $\varinjlim d$ (или прямым пределом) диаграммы $d: D \rightarrow A$ называется вершина D инициального объекта категории $\text{CON}(d)$, т. е. такого конуса $\{j_a: d(a) \rightarrow D\}$, что для любого конуса $\{j'_a: d(a) \rightarrow D'\} \in \text{CON}(d)$ существует единственный морфизм $\varphi: D \rightarrow D'$ из $\{j_a\}$ в $\{j'_a\}$. Говорят также, что объект D является пределом объектов $d(a)$ по отношению к морфизмам j_a .

Ясно, что предел диаграммы (когда он существует) определен с точностью до канонического изоморфизма однозначно.

Пределом диаграммы $A \leftarrow C \leftarrow B$ является ее амальгама, а пределом семейства $\{A_a\}$ — копроизведение (прямая сумма) $\coprod_a A_a$ объектов A_a .

Предел существует для произвольной диаграммы над каждой из категорий ENS , ENS' , TOP и TOP' . Для диаграммы $d: D \rightarrow \text{ENS}$ над категорией множеств ENS им будет фактормножество дизъюнктного объединения $\coprod_a d(a)$ множеств $d(a)$, $a \in D$, по наименьшему отношению эквивалентности, в котором элементы $x \in d(a)$ и $y \in d(b)$ эквивалентны, если в D существует такая стрелка $\alpha: a \rightarrow b$.

что $y = d(\alpha)x$. Это же фактормножество будет пределом диаграммы $d: \mathbf{D} \rightarrow \text{ENS}^*$ над категорией пунктированных множеств ENS^* (ввиду пунктированности всех отображений $d(\alpha)$ отмеченные точки всех множеств $d(a)$ оказываются эквивалентными и их класс эквивалентности принимается за отмеченную точку предела). Снабженное фактортопологией это же фактормножество будет пределом диаграммы d над категориями TOP и TOP^* . $\square$

Замечание 1. Следует иметь в виду, что для многих диаграмм пределы хотя и существуют, но никакого интереса не представляют. Примером может служить диаграмма $A \rightarrow C \leftarrow B$, пределом которой, как легко видеть, является объект C (так что в этом случае предел не зависит от гомоморфизмов $A \rightarrow C$ и $B \rightarrow C$). Для таких диаграмм содержательно двойственное понятие *обратного предела*, которое нам пока не понадобится.

Изложенные общие концепции нам будут нужны для случая категории групп GROUPS . При этом, чтобы не отходить далеко от традиционных обозначений, мы для произвольной диаграммы $d: \mathbf{D} \rightarrow \text{GROUPS}$ будем группу $d(a)$ обозначать символом G_a .

Предложение 1. Для любой диаграммы $d: \mathbf{D} \rightarrow \text{GROUPS}$ существует предел $\lim d$.

Доказательство. Напомним, что *словом* над множеством Y называется произвольное выражение вида $y_1 y_2 \dots y_k$, где $k \geq 0$ и $y_1, y_2, \dots, y_k \in Y$. *Произведением* слов $y_1 y_2 \dots y_k$ и $y'_1 y'_2 \dots y'_l$ называется слово $y_1 y_2 \dots y_k y'_1 y'_2 \dots y'_l$. По отношению к умножению слов множество $M(Y)$ всех слов над Y является моноидом (ассоциативным унитарным моноидом). Единицей этого моноида служит пустое слово $\emptyset$. Моноид $M(Y)$ является свободным моноидом, порожденным множеством Y , т. е. для любого моноида M и любого отображения $\varphi: Y \rightarrow M$ существует единственный морфизм моноидов $\bar{\varphi}: M(Y) \rightarrow M$, продолжающий отображение φ (этот морфизм задается формулой $\bar{\varphi}(y_1 y_2 \dots y_k) = \varphi(y_1) \varphi(y_2) \dots \varphi(y_k)$).

Мы применим эту конструкцию к построению предела $\lim d$ диаграммы $d: \mathbf{D} \rightarrow \text{GROUPS}$, приняв за Y дизъюнктное объединение всех групп G_a , $a \in \mathbf{D}$, и рассмотрев в $M(Y)$ наименьшую конгруэнцию (отношение эквивалентности, согласованное с умножением), для которой

а) $x \sim d(\alpha)x$ для любого элемента $x \in G_a$ и любой стрелки $\alpha: a \rightarrow b$;

б) $xy \sim z$ для любых элементов $x, y, z \in G_a$, для которых $xy = z$ в группе G_a ;

в) $x \sim \emptyset$, если элемент $x \in G_a$ является деиницей группы G_a .

Пусть $G^{(0)}$ — фактормоноид моноида $M(Y)$ по этой конгруэнции. Так как для каждого слова $\xi = y_1 \dots y_k \in M(Y)$ слово $\xi^{-1} = y_k^{-1} \dots y_1^{-1}$ обладает в силу условий б) и в) тем свойством, что $\xi\xi^{-1} \sim \emptyset$ и $\xi^{-1}\xi \sim \emptyset$, то моноид $G^{(0)}$ является группой. Пусть $j_a^{(0)}: G_a \rightarrow G^{(0)}$ — композиция вложения $G_a \rightarrow Y \rightarrow M(Y)$ и отображения факторизации $M(Y) \rightarrow G^{(0)}$. В силу условий б) и в) каждое отображение j_a является гомоморфизмом групп, а в силу условия а) семейство гомоморфизмов $j_a^{(0)}$ является конусом над диаграммой d . Кроме того, для любого конуса $\{j_a: G_a \rightarrow G\}$ над d гомоморфизм $\bar{\varphi}: M(Y) \rightarrow G$, продолжающий отображение $\sqcup j_a: Y \rightarrow G$, обладает, очевидно, тем свойством, что $\bar{\varphi}(\xi) = \bar{\varphi}(\eta)$ для любых эквивалентных слов $\xi, \eta \in M(Y)$, и потому индуцирует гомоморфизм $\varphi: G^{(0)} \rightarrow G$, являющийся морфизмом конуса $\{j_a^{(0)}\}$ в конус $\{j_a\}$. Поскольку никакого другого морфизма $\{j_a^{(0)}\} \rightarrow \{j_a\}$ существовать, очевидно, не может, этим доказано, что построенная группа $G^{(0)}$ является пределом диаграммы d . $\square$

Чтобы более явно описать группу $G^{(0)}$, можно воспользоваться методом образующих и определяющих соотношений.

Напомним, что группа F с выделенным в ней подмножеством X называется *свободной группой над X* (а X — *множеством свободных образующих группы F*), если для любой группы G каждое отображение $\varphi: X \rightarrow G$ единственным образом продолжается до некоторого гомоморфизма $\bar{\varphi}: F \rightarrow G$. Из этого определения непосредственно следует, что свободные группы с равномошными множествами свободных образующих изоморфны.

Вместе с тем оказывается, что для любого множества X существует свободная группа $F(X)$ над X . Элементами этой группы являются *групповые слова* над X , т. е. выражения вида

(1)

$$x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_k^{a_k},$$

где $a_1, a_2, \dots, a_k$ (случай $k=0$ не исключается) — различные от нуля целые числа, а $x_1, x_2, \dots, x_k$ — такие элементы из X , что $x_i \neq x_{i+1}$ при $i=1, 2, \dots, k-1$. При этом слово вида x^{+1} отождествляется с элементом $x \in X$ (чтобы обеспечить включение $X \subset F(X)$). Умножение слов заключается в их приписывании друг к другу, сопровождаемым «приведением подобных членов», так что, в частности, слово (1) оказывается произведением степеней $x_1^{a_1}, x_2^{a_2}, \dots, x_k^{a_k}$ элементов $x_1, x_2, \dots, x_k$. Все аксиомы группы, за исключением ассоциативности, проверяются без труда (единицей группы $F(X)$ служит пустое слово $\emptyset$, а словом, обратным к слову (1), служит слово $x_k^{-a_k} \dots x_2^{-a_2} x_1^{-a_1}$). Что же касается ассоциативности, то прямое ее доказательство несколько канительно, и мы его пока отложим.

Приняв, таким образом, временно на веру, что $F(X)$ является группой, мы уже вполне автоматически можем проверить, что эта группа свободна. Действительно, если гомоморфизм $\bar{\varphi}: F(X) \rightarrow G$, продолжающий данное отображение $\varphi: X \rightarrow G$, существует, то

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_k^{a_k}) &= \bar{\varphi}(x_1)^{a_1} \bar{\varphi}(x_2)^{a_2} \dots \bar{\varphi}(x_k)^{a_k} = \\ &= \varphi(x_1)^{a_1} \varphi(x_2)^{a_2} \dots \varphi(x_k)^{a_k} \end{aligned}$$

для любого слова (1), и значит, этот гомоморфизм определен единственным образом. Чтобы доказать его существование, надо, как всегда в аналогичных ситуациях, полученную формулу принять за определение, т. е. для любого слова (1) положить

$$\bar{\varphi}(x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_k^{a_k}) = \varphi(x_1)^{a_1} \varphi(x_2)^{a_2} \dots \varphi(x_k)^{a_k}.$$

Очевидно, что тем самым мы получим гомоморфизм $\bar{\varphi}: F(X) \rightarrow G$, продолжающий данное отображение $\varphi: X \rightarrow G$. $\square$

Задание произвольной группы G образующими и определяющими соотношениями (называемое, по предложению А. М. Виноградова, «копредставлением» группы; впрочем, недавно Ю. И. Мерзляков предложил более выразительный термин — *генетический код*) состоит в задании некоторого множества X , элементы которого называются *образующими*, и некоторого подмножества R свободной группы $F(X)$, элементы которого называются *определяющими соотноше-*

ниями. Пусть $F_R(X)$ — факторгруппа группы $F(X)$ по наименьшей инвариантной подгруппе $[R]_F$ группы $F(X)$, содержащей множество R . Говорят, что пара $\langle X; R \rangle$ составляет *копредставление* группы G , и пишут $G = \langle X; R \rangle$, если задан некоторый изоморфизм $\bar{\varphi}: F_R(X) \approx G$, или, что равносильно, эпиморфизм $\varphi: F(X) \rightarrow G$ с ядром $[R]_F$. Этот эпиморфизм однозначно определяется элементами $\bar{x} = \varphi(x)$ группы G . Допуская определенную вольность, элементы x обычно обозначают просто через x (это общепринято, хотя и не очень удачно, поскольку вполне может случиться, что для различных элементов $x_1, x_2 \in X$ в группе G будет иметь место равенство $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$). Каждый элемент группы G будет тогда представляться (вообще говоря, не единственным образом) в виде произведения степеней элементов $x \in X$. Это объясняет употребление термина «образующие» по отношению к этим элементам.

Для наглядности равенство $G = \langle X; R \rangle$ часто записывают в виде $G = \langle X; r = 1, r \in R \rangle$ и просто $G = \langle X; r_1 = 1, \dots, r_m = 1 \rangle$, если $R = \{r_1, \dots, r_m\}$. Более того, если какое-нибудь слово $r \in R$ имеет вид $r = a^{-1}b$, где $a, b \in F(X)$, то вместо $r = 1$ пишут также $a = b$.

Если теперь для некоторой диаграммы $d: \mathbf{D} \rightarrow \text{GROUPS}$ над категорией GROUPS заданы копредставления

$$G_a = \langle X_a; R_a \rangle, \quad a \in \mathbf{D},$$

ее групп G_a , то мы можем без труда написать копредставление предела $G = \lim_{\rightarrow} d$ этой диаграммы. Для любой стрелки $\alpha: a \rightarrow b$ диаграммной схемы $\mathbf{D}$ и любой образующей $x_a \in X_a$ мы представим элемент $d(\alpha)x_a$ группы G_b (т. е., точнее, — элемент $d(\alpha)\bar{x}_a$) в виде некоторого (вообще говоря, не единственного) группового слова $\xi(x_a, \alpha)$ от образующих из X_b . Введя для любого $a \in \mathbf{D}$ эпиморфизм $\varphi_a: F(X_a) \rightarrow G_a$ с ядром $[R_a]_F$, мы можем слово $\xi(x_a, \alpha)$ более формально определить как элемент группы $F(X_b)$, удовлетворяющий соотношению

$$(d(\alpha) \circ \varphi_a)x_a = \varphi_b(\xi(x_a, \alpha)).$$

Пусть

$$X = \bigsqcup_{a \in \mathbf{D}} X_a$$

— дизъюнктное объединение всех множеств X_a , $a \in \mathbf{D}$. Обозначив для любой стрелки $\alpha: a \rightarrow b$ из $\mathbf{D}$ символом R_α

множество всех слов над X вида $x_a^{-1}\xi(x_a, \alpha)$, $x_a \in X_a$, мы положим

$$R = \bigcup_{a \in D} R_a \cup \bigcup_{\alpha \in D} R_\alpha.$$

Предложение 2. Пара $\langle X; R \rangle$ является копредставлением предела диаграммы d :

$$\lim_{\rightarrow} d = \langle X; R \rangle.$$

Доказательство. Нам следует построить эпиморфизм $F(X) \rightarrow G^{(0)}$ свободной группы $F(X)$ на группу $G^{(0)} = \lim_{\rightarrow} d$, ядром которого служит инвариантная подгруппа $[R]_F$. Покажем, что за этот эпиморфизм можно принять продолжение φ отображения $X \rightarrow G^{(0)}$, являющегося на каждом слагаемом X_a ограничением отображения $j_a \circ \varphi_a: F(X_a) \rightarrow G^{(0)}$. Ясно, что гомоморфизм φ является эпиморфизмом и что $\varphi(r) = 1$ для любого слова $r \in R$, т. е. что $[R]_F \subset \text{Ker } \varphi$ (мы считаем все группы $F(X_a)$ естественным образом вложенными в группу $F(X)$; в силу этого соглашения $\varphi|_{F(X_a)} = j_a \circ \varphi_a$, и потому $\varphi(r_a) = j_a(\varphi_a(r_a)) = 1$ для любого слова $r_a \in R_a$ и

$$\begin{aligned} \varphi(x_a^{-1}\xi(x_a, \alpha)) &= (j_a \circ \varphi_a)(x_a)^{-1} (j_b \circ \varphi_b)(\xi(x_a, \alpha)) = \\ &= (j_a \circ \varphi_a)(x_a)^{-1} (j_b \circ d(\alpha) \circ \varphi_b)(x_a) = \\ &= (j_a \circ \varphi_a)(x_a)^{-1} (j_a \circ \varphi_a)(x_a) = 1 \end{aligned}$$

для любого слова $x_a^{-1}\xi(x_a, \alpha) \in R_\alpha$. Таким образом, в доказательстве нуждается лишь обратное включение.

Имея это в виду, рассмотрим канонический эпиморфизм $\psi: F(X) \rightarrow F_R(X)$ с ядром $[R]_F$. Так как для любой вершины $a \in D$ имеет место включение $[R_a]_F \subset [R]_F \cap F(X_a)$, то существует гомоморфизм $\psi_a: G_a \rightarrow F_R(X)$, замыкающий коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} F(X_a) & \xrightarrow{\varphi|_{F(X_a)}} & F_R(X) \\ \varphi_a \downarrow & \nearrow \psi_a & \\ G_a & & \end{array}$$

Так как для любого элемента $x_a \in X_a$ и любой стрелки $\alpha: a \rightarrow b$ слово $x_a^{-1}\xi(x_a, \alpha)$ лежит в ядре эпиморфизма ψ , то

$$\begin{aligned} (\psi_b \circ d(\alpha))(\varphi_a(x_a)) &= (\psi_b \circ \varphi_b)(\xi(x_a, \alpha)) = \\ &= \psi(\xi(x_a, \alpha)) = \psi(x_a) = \psi_a(\varphi_a(x_a)), \end{aligned}$$

и, значит, $\psi_b \circ d(\alpha) = \psi_a$ (ибо элементы $\varphi_a(x_a) = \bar{x}_a$ порождают группу G_a). Таким образом, отображения $\psi_a: G_a \rightarrow F_R(X)$ составляют конус над диаграммой d , и потому существует такой гомоморфизм $\lambda: G^{(0)} \rightarrow F_R(X)$, что $\lambda \circ j_a = \psi_a$ для любого $a \in D$. Но тогда

$$\lambda \circ \varphi|_{F(X_a)} = \lambda \circ j_a \circ \varphi_a = \psi_a \circ \varphi_a = \psi|_{F(X_a)},$$

и, значит, $\lambda \circ \varphi = \psi$. Следовательно, $\text{Ker } \varphi \subset \text{Ker } \psi = [R]_F$. $\square$

Пример 1. Копроизведение $\bigsqcup_a G_a$ семейства групп (предел диаграммы без стрелок) называется *свободным произведением* этих групп. Согласно предложению 2 *копредставление свободного произведения получается объединением копредставлений сомножителей: если $G_a = \langle X_a; R_a \rangle$, то*

$$\bigsqcup_a G_a = \langle \bigsqcup_a X_a; \bigsqcup_a R_a \rangle.$$

Вообще говоря, копредставление из предложения 2 не является самым экономным и часто может быть упрощено.

Пусть $G = \langle X; R \rangle$, и пусть S — произвольное подмножество из $[R]_F$. Тогда ясно, что $G = \langle X; R \cup S \rangle$. Аналогично, $G = \langle X \cup \{y\}; R \cup \{y^{-1}\xi\} \rangle$, где y — произвольный символ, не содержащийся в X , а ξ — произвольное слово из $F(X)$. Преобразования копредставления $\langle X; R \rangle$ в копредставления $\langle X; R \cup S \rangle$ и $\langle X \cup \{y\}; R \cup \{y^{-1}\xi\} \rangle$ (а также обратные преобразования) называются *преобразованиями Титце*.

Замечание 2. Можно показать (это утверждение известно как теорема Титце), что два конечных копредставления тогда и только тогда задают одинаковые (= изоморфные) группы, когда они могут быть переведены друг в друга преобразованиями Титце. Однако эта теорема не указывает никакого способа, как найти эти преобразования, и, более того, можно показать, что не может существовать никакого алгоритма, позволяющего это сделать. В этом отношении задание группы образующими и определяющими соотношениями в высшей степени неэффективно.

Тем не менее во многих ситуациях преобразования Титце позволяют существенно упрощать копредставления.

Пример 2. Пусть схема D имеет вид $\cdot \xleftarrow{A} \cdot \xrightarrow{B} \cdot$, т. е. мы имеем дело с амальгамой G диаграммы $A \xleftarrow{I_A} C \xrightarrow{I_B} B$. Пусть, далее, $A = \langle X; R \rangle$, $B = \langle Y; Q \rangle$ и $C = \langle Z; P \rangle$. Для любой образующей $z \in Z$ обозначим через ξ_z и η_z группо-

вые слова над X и Y , являющиеся выражениями через образующие элементов $i_A(z) \in A$ и $i_B(z) \in B$. Тогда, согласно предложению 2, амальгама G будет иметь копредставление вида $\langle X \sqcup Y \sqcup Z; R \cup Q \cup P \cup U \cup V \rangle$, где U — множество всех слов вида $z^{-1}\xi_z$, $z \in Z$, а V — множество всех слов вида $z^{-1}\eta_z$, $z \in Z$. Но поскольку отображение i_A является гомоморфизмом, произвольное слово из P после подстановки вместо каждого элемента $z \in Z$ соответствующего слова ξ_z будет следствием соотношений из R (т. е. будет принадлежать инвариантной подгруппе $[R]_F$). Это означает, что все соотношения из P являются следствием соотношений из R и U (а также, конечно, соотношений из S и V), и потому из копредставления группы G их можно безболезненно удалить (первое преобразование Титце). Далее, ясно, что любая пара соотношений вида $z^{-1}\xi_z = 1$ и $z^{-1}\eta_z = 1$ равносильна соотношениям $z^{-1}\xi_z = 1$ и $\xi_z = \eta_z$. Поэтому, сохраняя U (а также R и Q), мы можем заменить V на множество W соотношений вида $\xi_z = \eta_z$. Но после этой замены (и удаления соотношений из P) каждая образующая $z \in Z$ будет фигурировать только в одном соотношении $z^{-1}\xi_z = 1$, и потому, выбросив z и это соотношение, мы не изменим группы G (второе преобразование Титце). Этим доказано, что при $A = \langle X; R \rangle$, $B = \langle Y; Q \rangle$ и $C = \langle Z; P \rangle$ амальгама G диаграммы $A \leftarrow C \rightarrow B$ имеет копредставление вида

$$G = \langle X \cup Y; R \cup Q \cup W \rangle,$$

где W — множество всех соотношений вида $\xi_z = \eta_z$, $z \in Z$.

Пример 3. Если в предыдущем примере группа C будет единичной группой, т. е. если речь идет о диаграмме $A \leftarrow 1 \rightarrow B$, то амальгама G будет, очевидно, свободным произведением групп A и B . Если же единичной группой будет группа B , то амальгама G будет иметь копредставление вида

$$G = \langle X; R \cup W \rangle,$$

где W — множество всех соотношений вида $\xi_z = 1$, и потому будет факторгруппой группы $A = \langle X; R \rangle$ по инвариантной подгруппе, порожденной всеми элементами ξ_z или, точнее, элементами $i(z)$, $z \in Z$, где $i = i_A$. Поскольку последняя подгруппа является, очевидно, не чем иным, как наименьшей инвариантной подгруппой, содержащей образ $\text{Im } i = iC$ гомоморфизма i , мы получаем, следовательно, что амальгамой диаграммы $A \xleftarrow{i} C \rightarrow 1$ является факторгруппа A'

группы A по наименьшей инвариантной подгруппе, содержащей подгруппу iC (соответствующий инициальный конус будет при этом естественным эпиморфизмом $A \rightarrow A'$).

Конечно, этот факт легко устанавливается и непосредственно из определения амальгамы.

В примере 3 нам удалось элиминировать — хотя бы из формулировки, если не по существу, — образующие и определяющие соотношения, что нужно рассматривать как определенное достижение в направлении эффективизации описания предела. Интересно, что аналогичную (но, конечно, значительно более трудную) элиминацию можно осуществить и в ситуациях примеров 1 и 2.

Для любой диаграммы $d: D \rightarrow \text{GROUPS}$ группа $G^{(0)} = \lim_{\rightarrow} d$ порождается, конечно, образами групп G_a при гомоморфизмах $j_a^{(0)}: G_a \rightarrow G^{(0)}$, т. е. любой элемент g группы $G^{(0)}$ можно представить в виде произведения $g_1 g_2 \dots g_k$, каждый сомножитель которого принадлежит одной из групп G_a (или, точнее, является образом некоторого элемента группы G_a при гомоморфизме $j_a^{(0)}$). При $g \neq 1$ можно считать, что это представление *редуцировано*, т. е. что ни один из сомножителей $g_1, g_2, \dots, g_k$ не является единицей соответствующей группы и любые два соседних множителя принадлежат различным группам. Естественно, что в общем случае даже редуцированное представление не единственно (хотя бы за счет того, что гомоморфизмы $j_a^{(0)}$ не являются, вообще говоря, мономорфизмами). Однако оказывается, что в ситуации примера 1, т. е. в случае, когда $G^{(0)} = \bigsqcup_a G_a$, редуцированное представление элементов группы $G^{(0)}$ единственно, т. е. из равенства

$$g_1 \dots g_k = g'_1 \dots g'_l$$

двух редуцированных произведений следует, что $k = l$ и $g_i = g'_i$ для любого $i = 1, \dots, k$. В частности, это означает, что естественные гомоморфизмы $j_a^{(0)}: G_a \rightarrow \bigsqcup_a G_a$ групп G_a в их свободное произведение $\bigsqcup_a G_a$ являются мономорфизмами, и потому группы G_a можно считать подгруппами группы $\bigsqcup_a G_a$ (что, кстати сказать, апостериори оправдывает наши обозначения). Естественный способ доказательства этого утверждения (избегающий, кстати сказать, мороки с копредставлениями) состоит в том, чтобы для данных групп G_a рассмотреть множество $\bar{G}$ всех

редуцированных слов, т. е. слов $g_1 \dots g_k$ над дизъюнктивным объединением всех групп G_a , в которых все элементы $g_1, \dots, g_k$ не являются единицами соответствующих групп и любые два соседних элемента принадлежат различным группам, и доказать, что:

1) относительно естественной операции умножения, состоящей в приписывании слов друг к другу и в последующем редуцировании полученного слова, множество $\bar{G}$ является группой;

2) естественные вложения $\bar{j}_a: G_a \rightarrow \bar{G}_a$ (сопоставляющие каждому элементу $g \neq 1$ группы G_a тот же элемент, но рассматриваемый как редуцированное слово длины 1) составляют инициальный конус (и, значит, в силу единственности инициального конуса группа $\bar{G}$ изоморфна группе $G^{(0)}$).

Пункт 2) этой программы никаких затруднений не вызывает: для любого семейства гомоморфизмов $j_a: G_a \rightarrow G$ формула

$$\varphi(g_1 \dots g_k) = j_{a_1}(g_1) \dots j_{a_k}(g_k),$$

где $a_1, \dots, a_k$ — такие индексы, что $g_1 \in G_{a_1}, \dots, g_k \in G_{a_k}$, корректно определяет гомоморфизм $\varphi: \bar{G} \rightarrow G$, удовлетворяющий соотношениям $j_a = \varphi \circ \bar{j}_a$ и никакого другого гомоморфизма $\bar{G} \rightarrow G$, удовлетворяющего этим соотношениям, существовать, очевидно, не может.

Однако пункт 1) наталкивается — снова в отношении доказательства ассоциативности умножения — на серьезные комбинаторные трудности. Чтобы обойти эти трудности, ван дер Варден предложил следующий искусственный прием.

Для каждого индекса $a \in D$ определим действие группы G_a на множестве $\bar{G}$, полагая для любого элемента $g \in G_a$ и любого редуцированного слова $\xi = g_1 g_2 \dots g_k \in \bar{G}$

$$(2) \quad g\xi = \begin{cases} g_1 g_2 \dots g_k, & \text{если } g = 1, \\ gg_1 g_2 \dots g_k, & \text{если } g \neq 1 \text{ и } g_1 \notin G_a, \\ g'_1 g_2 \dots g_k, & \text{если } g_1 \in G_a \text{ и } g'_1 = gg_1 \neq 1, \\ g_2 \dots g_k, & \text{если } g_1 \in G_a \text{ и } gg_1 = 1. \end{cases}$$

Автоматическая проверка показывает, что эти формулы действительно определяют действие группы G_a на множестве $\bar{G}$, т. е. $1\xi = \xi$ и $(g'g)\xi = g'(g\xi)$ для любого слова

$\xi \in \bar{G}$ и любых элементов $g', g \in G_a$. Ясно при этом, что это действие *эффективно*, т. е. рассматриваемое как гомоморфизм группы G_a в группу $\text{Aut } \bar{G}$ всех перестановок (биективных отображений на себя) множества $\bar{G}$, оно является мономорфизмом. Следовательно, группу G_a мы можем рассматривать как подгруппу группы $\text{Aut } \bar{G}$. Пусть $\tilde{G}$ — подгруппа группы $\text{Aut } \bar{G}$, порожденная всеми группами G_a . Каждый отличный от единицы элемент группы $\tilde{G}$ допускает редуцированное представление вида $g_1 \dots g_k$, где $g_1 \in G_{a_1}, \dots, g_k \in G_{a_k}$, все элементы $g_1, \dots, g_k$ отличны от единицы и никакие два соседних элемента не принадлежат одной и той же группе. Мы будем обозначать этот элемент символом $\tilde{\xi}$, где ξ — редуцированное слово $g_1 \dots g_k$ из $\bar{G}$ (отличие $\tilde{\xi}$ и ξ состоит в том, что ξ получается формальным приписыванием друг к другу элементов $g_1, \dots, g_k$, а $\tilde{\xi}$ представляет собой перестановку, состоящую в последовательном выполнении перестановок $g_1, \dots, g_k$). Ясно при этом, что отображение $\xi \mapsto \tilde{\xi}$ множества $\bar{G}$ на группу $\tilde{G}$, описанное в п. 1) умножение в $\bar{G}$ переводит в умножение в группе $\tilde{G}$ (является гомоморфизмом). С другой стороны, из формул (2) непосредственно следует, что $\tilde{\xi}(\emptyset) = \xi$ для любого слова $\xi \in \bar{G}$ (где $\emptyset$ — пустое слово из $\bar{G}$). Следовательно, $\tilde{\xi} = \tilde{\eta}$ тогда и только тогда, когда $\xi = \eta$, т. е. отображение $\xi \mapsto \tilde{\xi}$ биективно и потому является изоморфизмом. Таким образом, унитар $\bar{G}$ изоморфен группе $\tilde{G}$ и, значит, сам является группой. $\square$

Тем самым мы получили вполне удовлетворительное описание алгебраического строения свободного произведения $\amalg G_a$.

В частности, мы теперь можем доказать, что *умножение слов* (1) *ассоциативно*, т. е. что унитар $F(X)$ является группой. Действительно, если множество X состоит только из одного элемента, то этот факт очевиден, причем группа $F(X)$ будет в этом случае бесконечной циклической группой. Сравнив теперь определения, мы немедленно обнаружим, что в общем случае унитар $F(X)$ является не чем иным, как унитаром $\bar{G}$ для бесконечных циклических групп $G_a = F(\{x_a\})$, где x_a пробегает все множество X . Следовательно, $F(X)$ представляет собой группу. (Кроме того, мы получили, что *любая свободная*

группа является свободным произведением бесконечных циклических групп.)

Аналогичные результаты могут быть получены и в ситуации примера 2, если мы дополнительно предположим, что оба гомоморфизма i_A и i_B являются мономорфизмами, т. е. если фактически мы имеем дело с двумя группами A и B , в которых отмечены изоморфные подгруппы $A' = \text{Im } i_A$, $B' = \text{Im } i_B$ и задан изоморфизм $i = i_B \circ i_A^{-1}: A' \rightarrow B'$. В этом случае амальгама $G^{(0)}$ диа-

граммы $A \xleftarrow{i_A} C \xrightarrow{i_B} B$ называется свободным произведением групп A и B с объединенной подгруппой $A' = B'$.

Оказывается, что для этого свободного произведения гомоморфизмы $j_A: A \rightarrow G^{(0)}$ и $j_B: B \rightarrow G^{(0)}$ также являются мономорфизмами, т. е. группы A и B естественно вкладываются в группу $G^{(0)}$. Пусть A'' — система представителей правых смежных классов группы A по подгруппе A' , отличных от подгруппы A' , т. е. такое подмножество в A , что любой элемент $a \in A \setminus A'$ единственным образом представляется в виде $a'a''$, где $a' \in A'$, $a'' \in A''$, и пусть аналогично B'' — система представителей правых смежных классов группы B по подгруппе B' , отличных от подгруппы B' . Тогда оказывается, что любой элемент группы $G^{(0)}$ единственным образом представляется в виде произведения $a's_1 \dots s_k$, где $a' \in A'$, $a, s_1, \dots, s_k \in A'' \cup B''$, причем если $s_i \in A''$, то $s_{i+1} \in B''$, и наоборот. Этот факт нам нужен только для более ясного представления структуры конкретных примеров, и потому мы оставим его без доказательства (которое даже после усовершенствования по ван дер Вардену остается весьма кропотливым).

Вернемся теперь к топологии.

Пусть X — связное топологическое пространство, $\{X_a\}$ — его покрытие, состоящее из связных подпространств, и D — диаграммная схема, вершинами которой являются индексы a покрытия $\{X_a\}$, а стрелками — такие пары (a, b) , что $X_a \subset X_b$ (при этом имеется в виду, что пара (a, b) является стрелкой $a \rightarrow b$). Тем самым покрытие $\{X_a\}$ естественным образом оказывается диаграммой типа D над категорией TOP .

Если пространство X пунктировано и все подпространства X_a содержат отмеченную точку, то покрытие $\{X_a\}$ будет диаграммой типа D над категорией TOP' , а группы

$G_a = \pi_1 X_a$ и гомоморфизмы $G_a \rightarrow G_b$, индуцированные при $X_a \subset X_b$ вложениями $X_a \rightarrow X_b$, будут составлять диаграмму групп типа D. Мы обозначим эту диаграмму символом $\{\pi_1 X_a\}$.

Ясно, что гомоморфизмы $i_a: \pi_1 X_a \rightarrow \pi_1 X$, индуцированные вложениями $X_a \rightarrow X$, составляют конус $\{i_a: \pi_1 X_a \rightarrow \pi_1 X\}$ над диаграммой $\{\pi_1 X_a\}$ с вершиной $\pi_1 X$.

Покрытие $\{X_a\}$ называется *насыщенным*, если пересечение любых двух его элементов также является элементом покрытия. От любого покрытия можно перейти к насыщенному покрытию, добавив всевозможные конечные пересечения его элементов (но условие связности элементов покрытия может при этом нарушиться).

Теорема 1. Для любого пунктированного связного пространства X и любого его насыщенного покрытия $\{U_a\}$, состоящего из связных открытых множеств U_a , содержащих отмеченную точку, фундаментальная группа $\pi_1 X$ пространства X является пределом групп $\pi_1 U_a$,

$$\pi_1 X = \varinjlim \{\pi_1 U_a\},$$

по отношению к гомоморфизмам $i_a: \pi_1 U_a \rightarrow \pi_1 X$, индуцированным вложениями $U_a \rightarrow X$.

В весьма специальном частном случае эта теорема была впервые доказана Зейфертом и почти одновременно ван Кампеном. Долгое время ее называли теоремой ван Кампена, но ныне ее чаще называют теоремой Зейферта—ван Кампена. Фактически же ее впервые доказал, по-видимому, Кроуэлл.

Доказательство теоремы 1 мы разобьем в ряд лемм.

Лемма 1. В условиях теоремы 1 группа $\pi_1 X$ порождается образами групп $\pi_1 U_a$ при гомоморфизмах i_a .

Доказательство. Пусть $\alpha = [u: (I, I) \rightarrow (X, x_0)]$ — произвольный элемент группы $\pi_1 X$. Тогда, если $1/n$ меньше числа Лебега (см. Дополнение к лекции 1) прообраза покрытия $\{U_a\}$ при отображении u , то для любого $k = 1, \dots, n$ существует такой индекс $a_k \in D$, что отрезок $I_k = [(k-1)/n, k/n]$ переходит при отображении u в открытое множество U_{a_k} , т. е. путь $u_k: I \rightarrow X$, определенный формулой

$$u_k(t) = u\left(\frac{t+k-1}{n}\right), \quad t \in I,$$

является на самом деле путем в U_{a_k} . Этот путь соединяет точку $x_{k-1} = u\left(\frac{k-1}{n}\right)$ (являющуюся при $k=1$ отмеченной

точкой x_0) с точкой $x_k = u \left(\frac{k}{n} \right)$ (при $k=n$, также являющейся отмеченной точкой x_0). При $k < n$ точка x_k принадлежит множеству $U_{a_k} \cap U_{a_{k+1}}$, являющемуся по условию элементом покрытия $\{U_a\}$, и потому связному и содержащему точку x_0 . Следовательно, в $U_{a_k} \cap U_{a_{k+1}}$ существует путь w_k , соединяющий точку x_0 с точкой x_k . При $k=0$ мы будем считать, что этот путь является постоянным путем. При $k=n$ мы также примем за v_n постоянный путь. Тогда для любого $k=1, \dots, n$ в U_{a_k} будет определена петля $v_k = w_{k-1} u_k w_k^{-1}$ и в X произведение $v_1 v_2 \dots v_n$ всех этих петель будет гомотопно $\text{rel } \dot{I}$ произведению $u_1 u_2 \dots u_n$ путей u_k , т. е. будет гомотопно петле u . Этим доказано, что элементы $\beta_k = [v_k]$ групп $\pi_1 U_{a_k}$ обладают тем свойством, что элемент α является произведением элементов $i_{a_k}(\beta_k)$. Следовательно, группа $\pi_1 X$ порождается подгруппами $i_a(\pi_1 U_a)$. $\square$

Петлю u мы назовем *элементарной*, если она содержится в одном из элементов покрытия $\{U_a\}$, и петель, *подчиненной покрытию* $\{U_a\}$, если она является произведением элементарных петель. В этой терминологии лемма 1 утверждает, что *любая петля пространства X гомотопна $\text{rel } \dot{I}$ петле, подчиненной покрытию $\{U_a\}$.*

Петли u и v , подчиненные покрытию $\{U_a\}$, мы назовем *элементарно гомотопными*, если $u = u_1 u' u_2$ и $v = u_1 v' u_2$, где u_1, u_2 — петли, подчиненные покрытию $\{U_a\}$, а u' и v' — элементарные петли, содержащиеся в одном и том же элементе U_a покрытия $\{U_a\}$ и гомотопные $\text{rel } \dot{I}$ в U_a . Если от петли u можно перейти к петле v конечной последовательностью элементарных гомотопий, то мы будем называть такие петли *подчиненно гомотопными* петлями.

Лемма 2. *Петли u и v , подчиненные покрытию $\{U_a\}$, тогда и только тогда гомотопны $\text{rel } \dot{I}$, когда они подчиненно гомотопны.*

Доказательство. Ясно, что подчиненно гомотопные петли гомотопны. Обратно, пусть петли u и v , подчиненные покрытию $\{U_a\}$, гомотопны, и пусть $F: I \times I \rightarrow X$ — связывающая их гомотопия $\text{rel } \dot{I}$.

Для любого $N > 0$ рассмотрим квадраты, на которые разбивают квадрат $I \times I$ прямые $s = k/N$ и $t = l/N$, где $k, l = 0, 1, \dots, N$. Каждый такой квадрат задается двумя

числами $k, l = 1, \dots, N$ и состоит из всех точек $(s, t) \in I \times I$, для которых

$$\frac{k-1}{N} \leq s \leq \frac{k}{N}, \quad \frac{l-1}{N} \leq t \leq \frac{l}{N}.$$

Мы будем этот квадрат обозначать символом I_{kl}^2 .

Уже известное нам из доказательства леммы 1 рассуждение, использующее число Лебега покрытия $\{F^{-1}U_a\}$, показывает, что при достаточно большом N каждое из множеств $F(I_{kl}^2)$ содержится хотя бы в одном элементе покрытия $\{U_a\}$. Предположив, что N обладает этим свойством, мы для любых k и l обозначим через $a(k, l)$ один из индексов a , для которых $F(I_{kl}^2) \subset U_a$. Тогда отображение F , ограниченное на верхнюю сторону квадрата I_{kl}^2 , будет некоторым путем в $U_{a(k, l)}$. Мы обозначим этот путь символом $\bar{u}_{kl}$. С учетом преобразования параметра он определяется формулой

$$\bar{u}_{kl}(t) = F\left(\frac{t+k-1}{N}, \frac{l}{N}\right), \quad t \in I.$$

Мы введем в рассмотрение также путь $\bar{v}_{kl}: I \rightarrow U_{a(k, l)}$, определенный отображением F на правой стороне квадрата I_{kl}^2 :

$$\bar{v}_{kl}(t) = F\left(\frac{k}{N}, \frac{t+l-1}{N}\right), \quad t \in I.$$

Тогда на нижней стороне квадрата I_{kl}^2 отображение F будет определять путь $\bar{u}_{k, l-1}$, а на левой — путь $\bar{v}_{k-1, l}$. Поэтому на всем квадрате I_{kl}^2 отображение F будет определять гомотопию $\text{rel } I$, связывающую путь $\bar{u}_{k, l-1}\bar{v}_{kl}$ с путем $\bar{v}_{k-1, l}\bar{u}_{kl}$. Таким образом,

$$\bar{u}_{k, l-1}\bar{v}_{kl} \sim \bar{v}_{k-1, l}\bar{u}_{kl} \text{ rel } I \quad \text{в } U_{a(k, l)}.$$

Каждая точка вида $(i/N, j/N)$ является вершиной четырех (или меньшего числа) квадратов I_{kl}^2 . Пусть $U_{b(i, j)}$ — пересечение соответствующих множеств $U_{a(k, l)}$. Таким образом, в частности, $U_{b(i, j)} \subset U_{a(k, l)}$ при $(i, j) = (k-1, l), (k, l)$ и $(k, l-1)$.

Пусть $k, l = 1, \dots, N$. Рассмотрим множество $U_{b(k, l)}$. Это множество связно и содержит точки x_0 и $x_{kl} = F(k/N, l/N)$. Пусть w_{kl} — произвольный путь в $U_{b(k, l)}$, соединяющий точки x_0 и x_{kl} (и являющийся постоянным путем, если $x_0 = x_{kl}$). Тогда в $U_{a(k, l)}$ будут определены

петли

$$u_{kl} = w_{k-1, l} \bar{u}_{kl} w_{kl}^{-1} \quad \text{и} \quad v_{kl} = w_{k, l-1} \bar{v}_{kl} w_{kl}^{-1},$$

и для этих петель будут иметь место гомотопии

$$(3) \quad u_{k, l-1} v_{kl} \sim v_{k-1, l} u_{kl} \text{ rel } I' \quad \text{в} \quad U_a(k, l).$$

Сосредоточим теперь наше внимание на ломаных в квадрате $I \times I$, соединяющих его левую нижнюю вершину $(0, 0)$ с его правой верхней вершиной $(1, 1)$ и состоящих из сторон квадратов $I_{k, l}^2$. Каждой такой ломаной мы сопоставим петлю, являющуюся произведением элементарных петель u_{kl} и v_{kl} , отвечающих сторонам этой ломаной. Поскольку от любой ломаной мы можем перейти к любой другой ломаной последовательностью элементарных шагов, при каждом из которых две стороны одного из квадратов $I_{k, l}^2$ заменяются двумя другими его сторонами, из формулы (3) непосредственно следует, что *петли, соответствующие любым двум ломаным, подчиненно гомотопны*.

Поэтому, в частности, подчиненно гомотопны петли

$$u' = u_{10} u_{20} \dots u_{N0} v_{N1} v_{N2} \dots v_{NN}$$

и

$$v' = v_{00} v_{01} \dots v_{0N} u_{N1} u_{N2} \dots u_{NN},$$

отвечающие ломаным, состоящим (из подразделенных) сторон квадрата $I \times I$. Но по построению все петли v_{N1} , v_{N2} , ..., v_{NN} и v_{00} , v_{01} , ..., v_{0N} являются постоянными петлями (в точке x_0) и, значит, петли u' и v' подчиненно гомотопны петлям $u'' = u_{10} u_{20} \dots u_{N0}$ и $v'' = u_{N1} u_{N2} \dots u_{NN}$, отвечающим нижней и верхней сторонам квадрата $I \times I$.

Вспомним теперь, что по условию петля u является, во-первых, ограничением отображения F на нижней стороне квадрата $I \times I$, а во-вторых, подчинена покрытию $\{U_a\}$, т. е. является произведением $u_1 u_2 \dots u_n$ элементарных петель u_1 , u_2 , ..., u_n . Поскольку же все сказанное выше справедливо для любого достаточно большого N , мы можем дополнительно потребовать, чтобы число N делилось на n , т. е. имело вид $N = nM$, и, следовательно, чтобы каждая петля u_i , $i = 1, \dots, n$, была произведением путей $\bar{u}_{k0}$ с $(i-1)M \leq k \leq iM$. При этом по условию для любого $i = 1, \dots, n$ существует такой индекс a_i , что петля u_i , а значит, и каждый путь $\bar{u}_{k0}$, $(i-1)M \leq k \leq iM$, содержится в U_{a_i} . Ясно, что, без ограничения общности, мы можем предполагать (увеличив, если нужно, M),

что в U_{a_i} содержится не только путь $\bar{u}_{k_0}$ (т. е., точнее, образ при отображении F нижней стороны квадрата $I_{k_0}^2$), но и образ $F(I_{k_0}^2)$ всего квадрата $I_{k_0}^2$. Это означает, что при $(i-1)M \leq k \leq iM$ мы можем считать, что имеет место равенство $a(k, 0) = a_i$ и, следовательно, что каждая петля $u_{k_0} = \omega_{k-1,0} u_{k_0} \omega_{k_0}^{-1}$ с $(i-1)M \leq k \leq iM$ является петлей в U_{a_i} . Поэтому произведение u_i' этих петель будет в U_{a_i} гомотопно произведению путей $\bar{u}_{k_0}$, т. е. будет гомотопно петле u_i . Этим доказано, что петля

$$u'' = u_{1_0} u_{2_0} \dots u_{N_0} = u_1' u_2' \dots u_n'$$

подчиненно гомотопна петле $u = u_1 u_2 \dots u_n$.

Аналогично доказывается, что (при, возможно, еще большем N) петля v'' подчиненно гомотопна петле v .

Таким образом, имеют место подчиненные гомотопии

$$u \sim u'' \sim u' \sim v' \sim v'' \sim v,$$

и, значит, петли u и v подчиненно гомотопны. $\square$

Теперь у нас все готово для доказательства теоремы 1.

Доказательство теоремы 1. Нужно показать, что для любого конуса $\{j_a: \pi_1 U_a \rightarrow G\}$ над диаграммой $\{\pi_1 U_a\}$ существует морфизм $\varphi: \pi_1 X \rightarrow G$ конуса $\{i_a: \pi_1 U_a \rightarrow \pi_1 X\}$ в конус $\{j_a: \pi_1 U_a \rightarrow G\}$ и что этот морфизм единствен. Но если такой морфизм существует и если $\alpha = i_{a_1} \beta_1 \cdot i_{a_2} \beta_2 \cdot \dots \cdot i_{a_n} \beta_n$ — представление элемента $\alpha \in \pi_1 X$ в виде произведения элементов вида $i_a \beta$, $a \in D$, $\beta \in \pi_1 U_a$ (существующее по лемме 1), то

$$(4) \quad \varphi(\alpha) = j_{a_1} \beta_1 \cdot j_{a_2} \beta_2 \cdot \dots \cdot j_{a_n} \beta_n.$$

Следовательно, морфизм φ единствен. Поэтому все будет доказано, если мы покажем, что формула (4) корректно определяет некоторое отображение $\varphi: \pi_1 X \rightarrow G$ (которое автоматически будет гомоморфизмом групп и морфизмом конусов), т. е. что из равенства

$$(5) \quad i_{a_1} \beta_1 \cdot i_{a_2} \beta_2 \cdot \dots \cdot i_{a_n} \beta_n = i_{b_1} \gamma_1 \cdot i_{b_2} \gamma_2 \cdot \dots \cdot i_{b_m} \gamma_m$$

вытекает равенство

$$(6) \quad j_{a_1} \beta_1 \cdot j_{a_2} \beta_2 \cdot \dots \cdot j_{a_n} \beta_n = j_{b_1} \gamma_1 \cdot j_{b_2} \gamma_2 \cdot \dots \cdot j_{b_m} \gamma_m.$$

Пусть $u_1, u_2, \dots, u_n$ — произвольные петли классов $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, а $v_1, v_2, \dots, v_m$ — произвольные петли классов $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$. Рассмотрим подчиненные покрытие $\{U_a\}$ петли $u = u_1 u_2 \dots u_n$ и $v = v_1 v_2 \dots v_m$. Равенство (5)

означает, что эти петли гомотопны. Следовательно, согласно лемме 2 они и подчиненно гомотопны. Таким образом, равенство (6) нам достаточно доказать лишь в случае, когда петли u и v подчиненно гомотопны. Более того, по очевидным индуктивным соображениям, это равенство достаточно доказать лишь для элементарно гомотопных петель u и v , т. е., другими словами, для случая, когда $n=m$ и $\beta_1=\gamma_1, \dots, \beta_n=\gamma_n$. В свою очередь для этого достаточно, очевидно, доказать, что если элементарная петля $u: (I, \dot{I}) \rightarrow (X, x_0)$ содержится в элементах U_a и U_b покрытия $\{U_a\}$, то для элементов $[u]_a$ и $[u]_b$ групп $\pi_1 U_a$ и $\pi_1 U_b$, определенных этой петлей, рассматриваемой как петля в U_a и в U_b соответственно, в группе G имеет место равенство

$$(7) \quad j_a[u]_a = j_b[u]_b.$$

Пусть $U_c = U_a \cap U_b$, и пусть $[u]$ — элемент группы $\pi_1 U_c$, определенный петлей u , рассматриваемой как петля в U_c . Тогда $[u] \mapsto [u]_a$ и $[u] \mapsto [u]_b$ при гомоморфизмах, индуцированных соответствующими вложениями. Поэтому в силу определяющего свойства конуса в группе G будут иметь место равенства $j_c[u] = j_a[u]_a$ и $j_c[u] = j_b[u]_b$, а значит, и равенство (7).

Тем самым теорема 1 полностью доказана. $\square$

С помощью теоремы 1 легко вычисляется фундаментальная группа букета любых гладко пунктированных пространств.

Предложение 3. Фундаментальная группа $\pi_1(X \vee Y)$ букета $X \vee Y$ двух связных гладко пунктированных пространств X и Y является свободным произведением фундаментальных групп этих пространств:

$$\pi_1(X \vee Y) = \pi_1 X \sqcup \pi_1 Y.$$

Доказательство. По условию отмеченная точка x_0 имеет в пространствах X и Y такие (автоматически связанные) окрестности U и V , что $U \cong x_0$ и $V \cong x_0$. Рассмотрим в букете $X \vee Y$ открытые множества

$$U' = X \cup V, \quad V' = U \cup Y$$

и их пересечение $U' \cap V' = U \vee V$. Согласно теореме 1 группа $\pi_1(X \vee Y)$ является амальгамой диаграммы

$$\pi_1 U' \leftarrow \pi_1(U' \cap V') \rightarrow \pi_1 V',$$

Но ясно, что $U' \cong X$, $V' \cong Y$ и $U' \cap V' \cong x_0$. Поэтому эта амальгама изоморфна свободному произведению $\pi_1 X \sqcup \pi_1 Y$. $\square$

Конечно, аналог предложения 1 имеет место и для букета любого числа гладко пунктированных пространств, т. е.

$$\pi_1 \left(\bigvee_a X_a \right) = \coprod_a \pi_1 X_a$$

для любых гладко пунктированных пространств X_a .

Следствие. *Фундаментальная группа букета окружностей является свободной группой:*

$$(8) \quad \pi_1 \left(\bigvee_a S_a^1 \right) = F(A).$$

Здесь $F(A)$ — свободная группа, множеством свободных образующих которой является множество индексов, которыми заномерованы окружности букета $\bigvee_a S_a^1$.

Замечание 3. Используемое в доказательстве предложения 3 рассуждение имеет весьма общий характер. Оно применимо к любому семейству $\{X_a\}$ подпространств пространства X (вообще говоря, не являющемуся даже покрытием), для которого существует такое насыщенное открытое покрытие $\{U_a\}$ пространства X , что:

1) для любого индекса a имеет место включение $X_a \subset U_a$ и соответствующее вложение $X_a \rightarrow U_a$ индуцирует изоморфизм $\pi_1 X_a \approx \pi_1 U_a$ (так будет, например, в случае, когда $U_a \cong X_a$);

2) для любой пары индексов a и b включение $X_a \subset X_b$ имеет место тогда и только тогда, когда имеет место включение $U_a \subset U_b$.

Ясно, что для любого такого семейства

$$\lim_{\rightarrow} \{\pi_1 X_a\} = \pi_1 X.$$

Мы вернемся к теореме Зейферта — ван Кампена в лекции 19, а пока рассмотрим один простой, но важный класс топологических пространств, фундаментальные группы которых без труда вычисляются с помощью предыдущего следствия.

Определение 2. Хаусдорфово пространство X называется *графом*, если в нем выделено такое непустое дискретное подпространство X^0 (точки которого называются *вершинами* графа X), что

1) дополнение $X \setminus X^0$ является дизъюнктивным объединением открытых множеств, каждое из которых гомеоморфно открытому интервалу $(0, 1)$ (эти множества — а также их замыкания — называются *ребрами* графа X);

2) для любого ребра $e \subset X \setminus X^0$ существует непрерывное отображение $u: I \rightarrow X$ (называемое *характеристическим путем* этого ребра), образом которого является замыкание $\bar{e}$ ребра e и которое на внутренности $(0, 1)$ отрезка I является гомеоморфизмом на ребро e ;

3) множество $C \subset X$ тогда и только тогда замкнуто (открыто), когда для любого ребра e пересечение $C \cap \bar{e}$ замкнуто (открыто) в $\bar{e}$.

Граф называется *конечным*, если он имеет только конечное число вершин и ребер. Для любого конечного графа условие 3) выполнено автоматически.

Так как пространство X по условию хаусдорфово, то из условия 2) следует, что *граница* $\bar{e} \setminus e$ каждого ребра состоит из одной или двух вершин, причем в первом случае множество $\bar{e}$ гомеоморфно окружности, а во втором — отрезку I .

Если $\bar{e}$ гомеоморфно отрезку I , то ребро e называется *простым ребром*, а точки из $\bar{e}$ называются его *вершинами*. В противном случае ребро e называется *петлеобразным ребром*. Такое ребро, по определению, имеет только одну вершину (впрочем, для единства формулировок часто удобно считать, что петлеобразное ребро имеет две, но совпадающие вершины).

Каждое дискретное пространство является графом без ребер. В некотором смысле противоположным примером графа является любой букет окружностей. Этот граф имеет только одну вершину и не имеет простых ребер.

Замечание 4. В теории графов (претерпевшей, кстати сказать, за последние годы бурное развитие в связи с целым рядом важных прикладных исследований) принято граф определять более абстрактно как совокупность двух множеств (вершин и ребер), связанных некоторым отображением, сопоставляющим каждому ребру неупорядоченную пару вершин (возможно, совпадающих). Графы в нашем смысле называются тогда *геометрическими реализациями* такого рода «абстрактных» графов. Эта точка зрения (называемая обычно «комбинаторной») полностью равносильна нашей (которую можно назвать «топологи-

ческой»), поскольку, как легко видеть, абстрактные графы тогда и только тогда (в понятном смысле) изоморфны, когда их геометрические реализации гомеоморфны посредством гомеоморфизмов, переводящих вершины в вершины.

Из равносильности комбинаторной и топологической точек зрения вытекает, что каждое топологическое свойство графов равносильно некоторому их комбинаторному свойству, т. е. свойству, формулируемому только в терминах вершин и ребер.

Например, ясно, что *граф тогда и только тогда является букетом окружностей* (топологическое свойство), *когда он имеет только одну вершину* (комбинаторное свойство).

Чтобы получить аналогичные утверждения в отношении свойств связности и односвязности, нам нужно ввести комбинаторный аналог понятия пути.

Ориентированным ребром графа X мы будем называть произвольный символ вида e^ε , где e — некоторое ребро графа X , а $\varepsilon = \pm 1$. Каждому ориентированному ребру e^ε мы произвольным образом сопоставим одну из вершин ребра e , требуя лишь — в случае, когда ребро e простое, — чтобы ребру $e^{-\varepsilon}$ оказалась сопоставленной другая вершина ребра e . Вершину, сопоставленную ребру e^ε , мы будем называть его *начальной вершиной*, а другую вершину ребра e — в случае, когда ребро e простое, — *конечной вершиной* ориентированного ребра e^ε . Для петлеобразного ориентированного ребра его единственная вершина будет, по определению, и начальной и конечной.

Граф, все ребра которого ориентированы и для них заданы начальные и конечные вершины, называется *ориентированным*.

З а м е ч а н и е 5. Формально понятие ориентированного графа идентично понятию диаграммной схемы.

Слово вида $v_1^{\varepsilon_1} \dots v_n^{\varepsilon_n}$, состоящее из ориентированных ребер графа X , называется *маршрутом* в X , если для любого $i = 1, \dots, n-1$ конечная вершина ребра $v_i^{\varepsilon_i}$ совпадает с начальной вершиной ребра $v_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}}$. Пустое слово $\emptyset$ (для которого $n = 0$) мы также считаем маршрутом.

О маршруте $\omega = v_1^{\varepsilon_1} \dots v_n^{\varepsilon_n}$ говорят, что он *соединяет* начальную вершину x_0 ребра $v_1^{\varepsilon_1}$ с конечной вершиной y_n ребра $v_n^{\varepsilon_n}$. При $x_0 = y_n$ маршрут ω называется *замкнутым*

маршрутом с полюсом x_0 . Пустой маршрут, по определению, замкнут. Его полюсом считается произвольная вершина графа X .

Понятие маршрута является комбинаторным эквивалентом топологического понятия пути. Для маршрутов можно чисто комбинаторно построить аналог гомотопической теории путей и тем самым для любого пунктированного графа X — его «комбинаторную» фундаментальную группу, оказывающуюся изоморфной его обычной («топологической») фундаментальной группе $\pi_1 X$. Мы не будем этого делать (хотя настоятельно рекомендуем читателю самостоятельно провести все необходимые рассуждения) и будем свободно пользоваться для исследования комбинаторных конструкций тополого-геометрическими соображениями.

Для каждого ребра e графа X любые два его характеристических пути $I \rightarrow X$ отличаются на некоторое монотонное отображение $I \rightarrow I$. Поскольку любые два монотонных отображения $I \rightarrow I$ одного характера (т. е. оба возрастающие или оба убывающие), как легко видеть, гомотопны $\text{rel } I$, мы видим, следовательно, что все характеристические для ребра e пути $I \rightarrow X$ распадаются на два класса: пути одного класса (рассматриваемые как пути в $\bar{e}$) гомотопны $\text{rel } I$, а отображения разных классов не гомотопны. Эти классы естественным образом отождествляются с ориентированными ребрами $e^{\pm 1}$, что дает, таким образом, геометрическую интерпретацию формально-комбинаторного понятия ориентированного ребра.

Мы видим, следовательно, что каждое ориентированное ребро, а потому и любой маршрут, мы, допуская несущественный произвол, исчезающий после перехода к гомотопическим классам, можем рассматривать как путь в X . (Это и является причиной, почему маршруты представляют собой адекватный комбинаторный аналог путей. Конечно, для полного обоснования этого тезиса надо и, обратно, любой путь в X интерпретировать — с допустимым произволом — как маршрут, но формально это нам не понадобится, и потому в связи с нашей общей, объясненной выше установкой мы предоставим это читателю.)

В частности, мы видим, что *любой замкнутый маршрут с полюсом x_0 корректно определяет некоторый элемент группы $\pi_1(X, x_0)$.*

Маршрут в графе X называется *простым*, если он не содержит ни совпадающих ребер, ни ребер, отличающихся лишь ориентациями.

Граф X мы будем называть *связным*, если любые две его вершины можно соединить простым маршрутом. (Тот факт, что это комбинаторное понятие связности совпадает с топологическим, будет вытекать из наших окончательных результатов. Поэтому мы его доказывать здесь не будем, хотя настойчиво рекомендуем читателю доказать его сейчас же.)

Граф A называется *подграфом* графа X , если каждое ребро (и каждая вершина) графа A является ребром (вершиной) графа X . Легко видеть, что любые две вершины связного графа содержатся в конечном связном подграфе.

Связный граф T называется *деревом*, если для любых двух его вершин соединяющий их простой маршрут единствен, т. е., что, очевидно, равносильно, если в нем нет непустых простых замкнутых маршрутов. Ясно, что *никакое дерево не содержит петлеобразных ребер* и что *любой связный подграф дерева является деревом*.

Дерево, состоящее только из одной вершины и не имеющее ребер, называется *тривиальным деревом*.

Простое ребро e связного графа X называется *ветвью*, если одна (и только одна) его вершина x не является вершиной никакого другого ребра. О другой его вершине y говорят, что в ней ветвь e *прикреплена* к графу X' , получающемуся из графа X удалением ребра e и вершины x .

Ясно, что для любого графа X' и любой его вершины y можно построить граф X , получающийся из графа X' прикреплением ветви e в вершине y . При этом, если X' было деревом, то X также будет деревом.

С другой стороны, легко видеть, что *любое нетривиальное конечное дерево T содержит ветвь*. Действительно, в силу конечности в T существует простой маршрут максимальной длины, и ясно, что начальное и конечное ребро этого маршрута являются (в силу максимальнойности) ветвями. $\square$

Очевидной индукцией отсюда следует, что *любое конечное дерево получается из тривиального последовательным прикреплением ветвей*.

Теперь мы можем доказать основную теорему топологической теории деревьев.

Предложение 4. Каждое дерево T стягиваемо к любой своей вершине x_0 (и потому односвязно).

Доказательство. Ясно, что если граф X получается из графа X' прикреплением ветви, то $X \approx X'$. Поэтому для конечного дерева T предложение 4 доказывается очевидной индукцией по числу ребер.

Пусть дерево T бесконечно. Для любой вершины x дерева T в T существует конечный связный подграф T_x (и, значит, дерево), содержащий вершины x_0 и x , а в этом подграфе путь u_x , соединяющий точку x_0 с точкой x (можно, например, считать, что путь u_x получен описанным выше образом из простого маршрута, соединяющего в T_x вершины x_0 и x). Пусть e — произвольное ребро дерева T . Выбрав для e характеристический путь $u: I \rightarrow T$ (являющийся в силу простоты ребра e гомеоморфизмом) и положив $x = u(0)$, $y = u(1)$, построим путь $v = u_x u u_y^{-1}$. Этот путь задается формулой

$$v(s) = \begin{cases} u_x(3s), & \text{если } 0 \leq s \leq 1/3, \\ u(3s-1), & \text{если } 1/3 \leq s \leq 2/3, \\ u_y(3-3s), & \text{если } 2/3 \leq s \leq 1, \end{cases}$$

и является петлей в точке x_0 , целиком содержащейся в конечном подграфе $T_e = T_x \cup T_y \cup e$ дерева T . Так как подграф T_e является, очевидно, конечным деревом и потому, согласно уже доказанному, односвязен, петля v гомотопна нулю в T_e , а следовательно, и в T . Это означает, что существует такая гомотопия $G: I \times I \rightarrow T$, что $G(0, t) = G(1, t) = G(s, 1) = x_0$ и $G(s, 0) = v(s)$ для любых $t, s \in I$. Но простое элементарно-геометрическое построение (которое мы представим читателю) показывает, что существует такое непрерывное отображение $\varphi: I \times I \rightarrow I \times I$, являющееся гомеоморфизмом на внутренности квадрата $I \times I$, что

$$\varphi(s, 0) = \begin{cases} (0, 1-3s), & \text{если } 0 \leq s \leq 1/3, \\ (3s-1, 0), & \text{если } 1/3 \leq s \leq 2/3, \\ (1, 3s-2), & \text{если } 2/3 \leq s \leq 1, \end{cases}$$

и

$$\varphi(0, t) = (0, 1), \quad \varphi(s, 1) = (s, 1), \quad \varphi(1, t) = (1, 1)$$

для любых $s, t \in I$. При этом ясно, что формула $H = G \circ \varphi^{-1}$ корректно определяет непрерывное отображение $H: I \times$

$\times I \rightarrow T$, обладающее тем свойством, что

$$(9) \quad \begin{aligned} H(0, t) &= u_x(1-t), & H(1, t) &= u_y(1-t), & t \in I, \\ H(s, 0) &= u(s), & H(s, 1) &= x_0, & s \in I. \end{aligned}$$

Пользуясь тем, что отображение u является гомеоморфизмом, мы любой точке $z \in \bar{e}$ и любому числу $t \in I$ сопоставим точку $F(z, t) = H(s, t)$ дерева T , где s — такое число из I , что $z = u(s)$. Ясно, что получающееся отображение $F: \bar{e} \times I \rightarrow T$ непрерывно.

С другой стороны, из формул (9) непосредственно следует, что эта конструкция согласована на каждой вершине x дерева T , т. е. что точка $F(x, t)$ не зависит от выбора ребра e , вершиной которого является x . Это означает, что нами корректно определено отображение $F: T \times I \rightarrow T$, обладающее тем свойством, что на любом подмножестве вида $\bar{e} \times I$ оно непрерывно. Но тогда это отображение будет в силу условия 3) определения 2 непрерывно и на всем произведении $T \times I$, т. е. будет гомотопией.

Для завершения доказательства остается заметить, что, как непосредственно следует из формул (9), гомотопия F связывает тождественное отображение $T \rightarrow T$ с постоянным отображением $T \rightarrow T$. $\square$

Пусть теперь X — произвольный связный граф. Рассмотрим множество $\mathfrak{X}$ всевозможных *поддеревьев* (подграфов, являющихся деревьями) графа X . Ясно, что для любого линейно упорядоченного по вложению семейства деревьев $T_\lambda \in \mathfrak{X}$ их объединение $\bigcup T_\lambda$ также является деревом, т. е. лежит в $\mathfrak{X}$. Это означает, что (очевидно, непустое) множество $\mathfrak{X}$ удовлетворяет условиям леммы Цорна и потому содержит максимальный элемент. Этим доказано, что в любом связном графе X существует *максимальное поддерево* T .

Легко видеть, что *поддерево* T тогда и только тогда *максимально*, когда оно содержит все вершины графа X . Действительно, если в X существуют вершины, не принадлежащие дереву T , то в X существует такое простое ребро e , что одна из его вершин лежит в T , а другая нет. Тогда $T \cup \bar{e}$ будет поддеревом в X , содержащим дерево T и отличным от T , что в силу максимальной T невозможно. Обратно, пусть дерево T содержит все вершины графа X . Тогда для любой вершины $x \in X^0$ в дереве T

будет существовать единственный простой маршрут w_x , соединяющий с вершиной x некоторую фиксированную вершину x_0 . Если дерево T не максимально, то в X существует такое простое ребро e , что подграф $T' = T \cup e$ является деревом. Пусть x и y — вершины ориентированного ребра e^{+1} . Тогда маршруты w_y и $w_x e^{+1}$ будут двумя различными простыми маршрутами в T' , соединяющими вершину x_0 с вершиной y , что невозможно. Следовательно, дерево T максимально. $\square$

Предполагая максимальное дерево $T \subset X$ и вершину $x_0 \in X^0$ фиксированными, мы для любого ребра $e \in X \setminus T$ можем рассмотреть замкнутый маршрут $w_x e^{+1} w_y^{-1}$, где x, y — вершины ориентированного ребра e^{+1} , а w_x и w_y , как и выше, — простые маршруты в T , соединяющие вершину x_0 с вершинами x и y соответственно. Согласно сказанному выше этот маршрут однозначно определяет некоторый элемент фундаментальной группы $\pi_1 X$. Допуская определенную вольность, мы обозначим этот элемент символом $[e]$.

Теорема 2. *Фундаментальная группа $\pi_1 X$ произвольного связного графа X является свободной группой. Элементы вида $[e]$, $e \in X \setminus T$, являются (при любом выборе максимального поддерева T) ее свободными образующими.*

Доказательство. Рассмотрим факторпространство $X \setminus T$. Ясно, что это факторпространство является букетом окружностей, каждая из которых получается из некоторого (простого или петлеобразного) ребра $e \in X \setminus T$, т. е. имеет вид $\overline{\varphi e}$, где φ — отображение факторизации $X \rightarrow X/T$. При этом образом элемента $[e] \in \pi_1 X$, $e \in X \setminus T$, при гомоморфизме $\varphi_*: \pi_1 X \rightarrow \pi_1(X/T)$, индуцированном отображением φ , является, очевидно, образующая фундаментальной группы $\pi_1(\overline{\varphi e})$ окружности $\overline{\varphi e}$ (стандартным образом вложенной в свободное произведение $\pi_1(X/T)$ групп $\pi_1(\overline{\varphi e})$). Это означает, что гомоморфизм φ_* является гомоморфизмом группы $\pi_1 X$ на свободную группу $\pi_1(X/T)$, переводящим элементы $[e]$ в свободные образующие группы $\pi_1(X/T)$.

С другой стороны, легко видеть, что пара (X, T) является парой Борсука (мы предоставляем доказать этот факт читателю; он является тривиальным частным случаем общей теоремы Борсука, которую мы докажем в лекции 11; см. предложение 1 лекции 11). Поэтому в силу леммы 6 лекции 4 и предложения 4 отображение φ является

гомотопической эквивалентностью и, значит, гомоморфизм φ_* — изоморфизмом. Следовательно, группа $\pi_1 X$ свободна и элементы $[e]$, $e \in X \setminus T$, являются ее свободными образующими. $\square$

Замечание 6. Легко видеть, что каждый граф X накрываем и что для любого его накрытия $\tilde{X} \rightarrow X$ пространство $\tilde{X}$ также является графом (см. в лекции 19 предложение 7). Поэтому в силу теоремы 2 для любого накрытия $\tilde{X} \rightarrow X$ графа X группа $\pi_1 \tilde{X}$ свободна. Принимая за X букет окружностей, а за $\tilde{X} \rightarrow X$ накрытие, отвечающее произвольной подгруппе G группы $\pi_1 X$ (и потому обладающее тем свойством, что $\pi_1 \tilde{X} \approx G$), мы немедленно получим отсюда, что *любая подгруппа свободной группы свободна*. Это — известная теорема Нильсена — Шрайера, алгебраическое доказательство которой довольно тяжело.

Гладкие отображения и гладкие гомотопии.— Теорема Сарда.— Группа $\pi_m S^n$ при $m < n$.— Фундаментальная группа пространства S^n/G .— Степень гладкого отображения.— Гомотопическая инвариантность степени.— Степень гомотопического класса.— Инъективность отображения $\deg$.

Для применения гомотопических групп к отдельным геометрическим задачам необходимо уметь вычислять эти группы для конкретных пространств. Однако в общем виде эта задача оказывается необыкновенно трудной, и до сих пор, несмотря на все усилия и выработанную изощренную технику (с которой мы постепенно познакомимся), нет ни одного пространства (за исключением тривиальных случаев вроде окружности S^1), о котором можно было бы сказать, что все его гомотопические группы нам известны. Это относится даже к таким простым пространствам, как сферы S^n при $n > 1$.

В этой лекции мы вычислим гомотопические группы $\pi_m S^n$ при $m \leq n$. Это требует неких аппроксимационных методов, в принципе чуждых теории гомотопий (но употребления которых, по-видимому, избежать нельзя; интересно, что после того, как при $m \leq n$ группы $\pi_m S^n$ вычислены, их вычисление при $m > n$ — насколько это удастся сделать — уже может быть произведено чисто гомотопическими, или, лучше сказать, алгебро-топологическими средствами). Нужные аппроксимации можно осуществить посредством либо гладких, либо кусочно линейных (=симплициальных) отображений. Мы воспользуемся гладкими аппроксимациями, потому что, во-первых, основные понятия теории гладких многообразий, безусловно, известны читателю из обязательного курса, а во-вторых, на русском языке существует много превосходных изложений этой теории; см., например, [14]. Впрочем, все необходимые сведения из теории симплициальных аппроксимаций мы в своем месте также изложим; см. Дополнение к лекции 12.

В лекции 12 мы заново вычислим группы $\pi_m S^n$, $m \leq n$, на основании некоторых более общих соображений. Однако более геометричные методы настоящей лекции имеют свои преимущества и знакомство с ними отнюдь не бесполезно.

Под *многообразием* мы в этой лекции всегда будем понимать гладкое (некоторого предписанного класса C^r , $r \geq 2$) компактное хаусдорфово (и потому метризуемое) многообразие, вообще говоря, с краем. Многообразия без края мы будем называть *замкнутыми многообразиями*. Руководящим примером многообразия без края у нас будет сфера S^n , а многообразия с краем — ее произведение $S^n \times I$ на отрезок.

На произвольном многообразии N всегда можно ввести риманову метрику, причем, как доказывается в теории римановых пространств, для каждой римановой метрики ρ на N существует такое $\varepsilon_0 > 0$ (называемое обычно *числом Морса* риманова многообразия N), что для любых двух точек $y_0, y_1 \in N$ с $\rho(y_0, y_1) < \varepsilon_0$ в N найдется единственная геодезическая $t \mapsto \gamma(t; y_0, y_1)$ длины $< \varepsilon_0$, соединяющая точку y_0 с точкой y_1 . Например, для сферы S^n (в ее естественной метрике) число Морса равно π .

Предполагая, что геодезическая $t \mapsto \gamma(t; y_0, y_1)$ отнесена к параметру t , пропорциональному длине дуги и меняющемуся от 0 до 1, рассмотрим отображение $(y_0, y_1, t) \mapsto \gamma(t; y_0, y_1)$ в многообразии N открытого подмножества $\{(y_0, y_1, t); \rho(y_0, y_1) < \varepsilon_0\}$ многообразия $N \times N \times I$. Из теоремы о гладкой зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных данных непосредственно следует, что это отображение гладко и, в частности, непрерывно. Поэтому для любого топологического пространства X и любых двух отображений $f, g: X \rightarrow M$, удовлетворяющих условию $\rho(f(x), g(x)) < \varepsilon_0$, $x \in X$, формула

$$F(x, t) = \gamma(t; f(x), g(x))$$

корректно определяет гомотопию $F: X \times I \rightarrow N$, связывающую отображение f с отображением g . Таким образом, *отображения в многообразии гомотопны, если они достаточно близки*.

Напомним теперь, что непрерывное отображение $g: M \rightarrow N$ многообразия M в многообразии N называется *гладким отображением*, если в локальных координатах оно записывается гладкими функциями. В теории гладких многообразий доказывается, что *любое непрерывное отображение $f: M \rightarrow N$ можно сколь угодно близко приблизить гладкими отображениями*, т. е. что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое гладкое отображение $g: M \rightarrow N$, что $\rho(f(x), g(x)) < \varepsilon$ для любой точки $x \in M$. (В каждой координатной окрестности функции, задающие отображе-

ние f , приближаются—по классической теореме Вейерштрасса о полиномиальной аппроксимации—посредством гладких функций, а затем эти локальные аппроксимации сшиваются в одно отображение g .) В сочетании с предыдущим результатом это дает следующее утверждение (мы не называем его предложением, поскольку оно приводится нами фактически без доказательства).

Утверждение 1. Любое непрерывное отображение $f: M \rightarrow N$ гладкого многообразия M в гладкое многообразие N гомотопно некоторому гладкому отображению $g: M \rightarrow N$. $\square$

Для многообразий с краем это утверждение допускает уточнение.

Утверждение 1'. Если непрерывное отображение $f: M \rightarrow N$ гладко на крае ∂M многообразия M , то существует гладкое отображение $g: M \rightarrow N$, совпадающее с f на ∂M и гомотопное f относительно ∂M . $\square$

Доказательство утверждения 1' основывается на так называемой теореме о воротнике, утверждающей, что край ∂M имеет в M окрестность, диффеоморфную произведению ∂M на полуинтервал $[0, 1)$. Кроме того, требуется некое уточнение теоремы об аппроксимации, гарантирующее совпадение аппроксимирующей и аппроксимируемой функций на множестве, где аппроксимируемая функция уже является гладкой. Впрочем, утверждение 1' нам понадобится лишь для случая отображений вида $M \times I \rightarrow N$ (и фактически даже $S^n \times I \rightarrow N$), когда большая часть этих технических трудностей отсутствует (или тривиально преодолевается).

Для замкнутого многообразия M край многообразия $M \times I$ состоит из многообразий $M \times 0$ и $M \times 1$, а условие, что отображение $M \times I \rightarrow N$ гладко на крае, означает, что это отображение, рассматриваемое как гомотопия из M в N , связывает гладкие отображения. Поэтому применительно к гомотопиям из M в N утверждение 1' дает нам, что *гладкие отображения замкнутого многообразия M в произвольное многообразие N тогда и только тогда гомотопны, когда они гладко гомотопны* (т. е. связаны гомотопией из M в N , являющейся гладким отображением $M \times I \rightarrow N$).

Таким образом, при изучении гомотопических классов отображений $M \rightarrow N$ (и, в частности, групп $\pi_m S^n = [S^m, S^n]$) мы, не теряя общности, можем ограничиваться лишь гладкими отображениями и их гладкими гомотопиями.

Для замкнутых многообразий M и N каждое гладкое отображение $f: M \rightarrow N$ в любой точке $x \in M$ индуцирует линейное отображение $(df)_x$ (называемое *дифференциалом* отображения f в точке x) касательного пространства $T_x M$ многообразия M в точке x в касательное пространство $T_y N$ многообразия N в точке $y = f(x)$. В локальных координатах (или, точнее, в соответствующих базисах касательных пространств) матрицей линейного отображения $(df)_x$ является *матрица Якоби* $\partial f / \partial x$ функций $f^1, \dots, f^n$, задающих отображение f в локальных координатах; элементами этой матрицы служат значения в точке $(\xi^1(x), \dots, \xi^m(x))$ частных производных $\partial f^i / \partial \xi^j$ функций $f^1, \dots, f^n$ по локальным координатам $\xi^1, \dots, \xi^m$ на многообразии M вблизи точки x (здесь, как и всюду ниже, символом m мы обозначаем размерность многообразия M , а символом n — размерность многообразия N).

Точка x называется *критической точкой* гладкого отображения $f: M \rightarrow N$, если линейное отображение $(df)_x$ не надъективно, т. е. если ранг матрицы Якоби $\partial f / \partial x$ в точке x меньше n . Точка $y \in N$ называется *регулярным значением* отображения f , если ни одна точка $x \in f^{-1}(y)$ не является критической точкой.

Знаменитая теорема Сарда (которую, впрочем, за несколько лет до Сарда уже доказал Браун, а впоследствии существенно усовершенствовал Дубовицкий) утверждает, что для любого гладкого отображения $f: M \rightarrow N$ множество всех его регулярных значений всюду плотно (напомним, что многообразие M мы считаем компактным; для некомпактного M утверждение теоремы Сарда несколько ослабляется). В частности, согласно этой теореме, для любого гладкого отображения $f: M \rightarrow N$ существуют регулярные значения.

При $m < n$ каждая точка $x \in M$ является критической точкой, и потому регулярные значения — это в точности точки, не принадлежащие образу $f(M)$ многообразия M . Таким образом, мы видим, что при $m < n$ теорема Сарда сводится к утверждению, что гладкое отображение многообразия в многообразие большей размерности обязательно не надъективно (пользуясь несколько нечеткой, но выразительной терминологией, можно сказать, что гладкое отображение не повышает размерность).

В частности, мы видим, что при $m < n$ для любого гладкого отображения $f: S^m \rightarrow S^n$ существует такая точка

$y_0 \in S^n$, что $f(S^n) \subset S^n \setminus y_0$. Это означает, что $f = i \circ f'$, где f' — отображение $S^m \rightarrow S^n \setminus y_0$, а i — вложение $S^n \setminus y_0 \rightarrow S^n$. Но множество $S^n \setminus y_0$ гомеоморфно (посредством, скажем, стереографической проекции) пространству $\mathbb{R}^n$ и потому стягиваемо. Следовательно, отображение f' , а значит, и отображение f , гомотопны постоянному отображению. Поскольку любое непрерывное отображение $S^m \rightarrow S^n$ гомотопно гладкому отображению, этим доказано, что при $m < n$ группа $\pi_m S^n$ состоит только из нуля:

$$(1) \quad \pi_m S^n = 0, \text{ если } m < n.$$

Полагая $m=1$, мы получаем, таким образом, что при $n > 1$ сфера S^n односвязна.

В силу общего изоморфизма (4) лекции 6 отсюда следует, что для любой группы G , вполне разрывно действующей на сфере S^n , $n > 1$, фундаментальная группа пространства S^n/G изоморфна группе G :

$$(2) \quad \pi_1(S^n/G) = G.$$

Пример 1. Группа второго порядка с образующей α вполне разрывно действует на сфере S^n по формуле $\alpha(x) = -x$, и соответствующим факторпространством S^n/G является n -мерное проективное пространство $\mathbb{R}P^n$. Следовательно,

$$\pi_1 \mathbb{R}P^n = \mathbb{Z}/2 \quad \text{при } n > 1$$

(пространство $\mathbb{R}P^1$ является окружностью, и потому $\pi_1 \mathbb{R}P^1 = \mathbb{Z}$).

Пример 2. Циклическая группа порядка h с образующей α может многими способами вполне разрывно (= без неподвижных точек) действовать на нечетномерной сфере $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$. В частности, каждый набор целых взаимно простых с h чисел $a_0, a_1, \dots, a_n$ (заданных с точностью до слагаемых, кратных h) определяет такого рода действие по формуле

$$(3) \quad \alpha(z_0, z_1, \dots, z_n) = (\zeta^{a_0} z_0, \zeta^{a_1} z_1, \dots, \zeta^{a_n} z_n), \\ (z_0, \dots, z_n) \in S^{2n+1},$$

где ζ — первообразный корень из 1 степени h . (На самом деле любое вполне разрывное действие группы $\mathbb{Z}/h$ на сфере S^{2n+1} эквивалентно действию вида (3), но этот факт лежит вне русла нашего изложения.) При замене ζ другим первообразным корнем η , связанным с ζ равенством

$\xi = \eta^a$, где a взаимно просто с h , числа $a_0, a_1, \dots, a_n$ заменяются числами $aa_0, aa_1, \dots, aa_n$. Имея это в виду, мы будем называть факторпространство сферы S^{2n+1} по действию (3) группы Z/h *линзовым пространством типа* $(a_0:a_1:\dots:a_n; h)$ и будем обозначать его символом $L(a_0:a_1:\dots:a_n; h)$. Согласно общей формуле (2)

$$\pi_1 L(a_0:a_1:\dots:a_n; h) = Z/h.$$

Замечание 1. Много сил было положено на установление гомеоморфности и гомотопической эквивалентности линзовых пространств. Впрочем, вопрос о гомотопической эквивалентности решается без особого труда и, как оказывается, *два линзовых пространства $L(a_0:a_1:\dots:a_n; h)$ и $L(b_0:b_1:\dots:b_n; h)$ тогда и только тогда гомотопически эквивалентны, когда существует такое число c , что*

$$b_0 b, \dots, b_n \equiv \pm c^{n+1} a_0 a_1 \dots a_n \pmod{h}.$$

Реальные затруднения вызывает лишь вопрос о гомеоморфности линзовых пространств. Он был решен (и то лишь частично) только сравнительно недавно на основе весьма глубокой и сложной техники.

Для трехмерных (случай $n=1$) линзовых пространств $L(a_0:a_1; h)$ принято несимметричное обозначение $L[a, h]$, где a — такое число, что $a_1 \equiv aa_0 \pmod{h}$. Два пространства $L[a, h]$ и $L[b, h]$ тогда и только тогда гомотопически эквивалентны, когда существует такое число c , что $h \equiv \pm c^2 a \pmod{h}$, а гомеоморфны тогда и только тогда, когда $c \equiv 1 \pmod{h}$ или $c \equiv b \pmod{h}$ (в последнем утверждении нетривиально лишь «только тогда»).

Напомним, что атлас гладкого многообразия M называется *ориентирующим атласом*, если для любых двух его карт (с непустым пересечением) якобиан перехода от локальных координат одной карты к локальным координатам другой карты положителен. Многообразие, обладающее ориентирующим атласом, называется *ориентируемым*. Максимальные ориентирующие атласы называются *ориентациями* ориентируемого многообразия M . Многообразие с фиксированной ориентацией называется *ориентированным*. Карты этой ориентации называются *положительными картами*. Связное ориентируемое многообразие обладает точно двумя ориентациями, которые называются *противоположными*. Каждая карта связного ориентируемого мно-

гообразия определяет некоторую ориентацию многообразия, по отношению к которой эта карта положительна.

Если теперь M и N — два гладких ориентированных замкнутых многообразия одной и той же размерности n , то для любого гладкого отображения $f: M \rightarrow N$ и любой его некритической точки $x \in M$ мы можем рассмотреть в M и N положительные карты, содержащие точки x и $y = f(x)$ и якобиан функций, задающих в этих картах отображение f . Ясно, что знак этого якобиана не зависит от выбора карт, т. е. корректно определен точкой x и отображением f (при заданных ориентациях многообразий M и N). Мы будем называть его *знаком отображения f в точке x* и будем обозначать символом $e_f(x)$.

Из элементарно-аналитической теоремы об обратном отображении непосредственно следует, что гладкое отображение $f: M \rightarrow N$ замкнутых многообразий на некоторой окрестности каждой некритической точки $x \in M$ является диффеоморфизмом этой окрестности на некоторую окрестность точки $y = f(x)$. Поэтому для любого регулярного значения $y \in N$ его прообраз $f^{-1}(y)$ состоит из конечного числа (некритических) точек. (Заметим, что здесь существенно используется компактность многообразия M .) Мы положим

$$\deg_y f = \sum_{x \in f^{-1}(y)} e_f(x),$$

где суммирование распространено на все точки $x \in f^{-1}(y)$. Условно число $\deg_y f$ можно назвать «алгебраическим числом» точек из $f^{-1}(y)$.

Ясно, что каждая точка $x \in f^{-1}(y)$ обладает окрестностью, все точки которой также некритичны (это будет окрестность, в которой отображение f является диффеоморфизмом), причем $e_{x_1}(f) = e_x(f)$ для любой точки x_1 этой окрестности. Поэтому *каждое регулярное значение $y \in N$ гладкого отображения f обладает окрестностью, состоящей из регулярных значений, и для любой точки y_1 этой окрестности*

$$(4) \quad \deg_{y_1} f = \deg_y f.$$

(На языке анализа это означает, что функция $y \mapsto \deg_y f$ локально постоянна.)

Оказывается, что *если многообразие N связно, то равенство (4) справедливо для любых регулярных значений $y, y_1 \in N$ отображения f , т. е. в этом случае число $\deg_y f$*

не зависит от выбора регулярного значения y (функция $y \mapsto \deg_y f$ постоянна). Казалось бы, что это непосредственно следует из локальной постоянности функции $y \mapsto \deg_y f$, но на самом деле ситуация здесь значительно тоньше, потому что множество регулярных значений отображения f даже при связном N , вообще говоря, несвязно. Чтобы полнее понять, почему все же функция $y \mapsto \deg_y f$ постоянна, мы дадим этому два доказательства, одно из которых можно охарактеризовать как «аналитическое», а другое — как «геометрическое».

Аналитическое доказательство. Это доказательство основывается на следующих фактах, которые мы будем предполагать известными:

1. На любом ориентированном компактном гладком n -мерном многообразии N существует дифференциальная форма ω_0 степени n , для которой интеграл

$$\omega_0[N] = \int_N \omega_0$$

отличен от нуля. (Если на N введена риманова метрика, то этим свойством обладает форма объема. Для сферы S^n , отнесенной к обычным сферическим координатам $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$, форма объема равна $\cos \theta_2 \cos^2 \theta_3 \dots \cos^{n-1} \theta_n (d\theta_1 \wedge d\theta_2 \wedge \dots \wedge d\theta_n)$.)

2. Если многообразие N связно, то каждая дифференциальная форма ω степени n на N выражается формулой

$$\omega = r\omega_0 + d\alpha,$$

где $r \in \mathbb{R}$; а α — некоторая форма степени $n-1$.

3. Для любого открытого множества $U \subset M$ существует такая форма ω степени n , что $\omega = 0$ вне U и $\omega[M] \neq 0$.

Отсюда следует, что для любого гладкого отображения $f: M \rightarrow N$ замкнутых многообразий и любой формы ω на M , для которой $\omega[M] \neq 0$, число

$$(5) \quad d(f) = \frac{(f^*\omega)[M]}{\omega[N]}$$

не зависит от выбора формы ω (в предположении, что многообразие N связно). Действительно, если $\omega = r\omega_0 + d\alpha$,

то в силу теоремы Стокса $\omega[N] = r \int_N \omega_0 = r\omega_0[M]$ и

аналогично $(f^*\omega)[M] = r(f^*\omega_0)[M]$. Поэтому

$$\frac{(f^*\omega)[M]}{\omega[N]} = \frac{(f^*\omega_0)[M]}{\omega_0[N]}. \quad \square$$

С другой стороны, если $y \in N$ — регулярное значение гладкого отображения $f: M \rightarrow N$, $x_1, \dots, x_s \in M$ — все его прообразы и $V_1, \dots, V_s \subset M$ — непересекающиеся окрестности (которые мы можем предполагать координатными) точек $x_1, \dots, x_s$, каждую из которых отображение f диффеоморфно отображает на (координатную) окрестность U точки $y \in N$, то для любой формы ω , равной нулю вне U ,

$$\omega[N] = \int_N \omega = \int_U \omega,$$

$$(f^*\omega)[M] = \int_M f^*\omega = \int_{V_1} f^*\omega + \dots + \int_{V_s} f^*\omega,$$

и согласно классическому правилу замены переменных в кратных интегралах для любого $i = 1, \dots, s$ имеет место равенство

$$\int_{V_i} f^*\omega = \varepsilon_i \int_U \omega,$$

где ε_i — знак якобиана отображения f в точке x_i (или, что равносильно, в окрестности V_i). Поэтому

$$(f^*\omega)[M] = \varepsilon_1 \omega[N] + \dots + \varepsilon_s \omega[N] = (\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_s) \omega[N]$$

и, значит, $d(f) = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_s = \deg_y f$.

Так как число $d(f)$ не зависит от выбора точки y , то, следовательно, число $\deg_y f$ также обладает этим свойством.

Заметим, что мы не только доказали независимость числа $\deg_y f$ от точки y , но и нашли для него явную формулу в виде отношения двух интегралов.

Геометрическое доказательство. В этом доказательстве мы, как и выше, будем предполагать известным ряд утверждений теории гладких многообразий, большая часть которых наглядно очевидна, но аккуратно доказывается довольно хлопотно. Имея в виду дальнейшее, мы сформулируем их в несколько большем объеме, чем это непосредственно необходимо.

Пусть M и N — гладкие многообразия (вообще говоря, разных размерностей), P — подмногообразие многообразия N и $f: M \rightarrow N$ — гладкое отображение. Если для любой точки $x \in f^{-1}P$ пространство $T_{f(x)}N$ является суммой (не

обязательно прямой) своих подпространств $(df)_x T_x M$ и $T_{f(x)} P$, то отображение f называется *трансверсальным* к P (или *t-регулярным вдоль P*). Если $P = \{y\}$, то это условие сводится к требованию, чтобы точка y была регулярным значением отображения f . Если подмногообразие P имеет край ∂P , то дополнительно требуется, чтобы f было трансверсально к ∂P , а если, кроме того, и M имеет край (случай когда край имеет N нам не нужен), то требуется, чтобы условие трансверсальности (по отношению как к P , так и к ∂P) было выполнено и для ограничения отображения f на этом крае.

Утверждение 2. Если гладкое отображение $f: M \rightarrow N$ трансверсально к P , то прообраз $f^{-1}P$ подмногообразия P представляет собой подмногообразие многообразия M размерности $\dim M + \dim P - \dim N$, край которого является прообразом края многообразия P . $\square$

В частности, прообраз $f^{-1}(y)$ любого регулярного значения $y \in N$ является подмногообразием многообразия M размерности $\dim M - \dim N$.

Конечно, в соответствии с общим определением *t-регулярности*, в случае, когда многообразие M имеет край ∂M , здесь предполагается, что y является регулярным значением и отображения $f|_{\partial M}$.

В последнем случае можно дополнительно утверждать, что пересечение $f^{-1}(y) \cap \partial M$ многообразия $f^{-1}(y)$ с краем ∂M многообразия M является его краем $\partial f^{-1}(y)$, причем ни в одной точке $x \in \partial f^{-1}(y)$ многообразие $f^{-1}(y)$ не касается многообразия ∂M (т. е. $T_x(f^{-1}(y)) \not\subset T_x(\partial M)$).

Для любого подмногообразия $P \subset N$ и любого трансверсального к P гладкого отображения $f: M \rightarrow N$ можно, кроме того, довольно точно описать поведение отображения f вблизи каждой компоненты Q подмногообразия $f^{-1}P$. В общем виде это описание нам не понадобится, и потому мы ограничимся тремя простейшими случаями.

Случай 1 (фактически уже разобранный выше). Пусть P является точкой $y \in N$ (регулярным значением отображения f) и $\dim M = \dim N = n$. Тогда прообраз $f^{-1}P = f^{-1}(y)$ состоит из отдельных точек и каждая точка $x \in f^{-1}(y)$ обладает окрестностью U , которую f диффеоморфно отображает на некоторую окрестность V точки y . Уменьшив, если нужно, окрестности U и V , мы можем считать, что окрестность V диффеоморфна открытому шару E^n евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Скомпоновав этот диффео-

морфизм с диффеоморфизмом $f|_U$, мы получим диффеоморфизм $U \rightarrow \dot{E}^n$, для которого имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ \downarrow & id & \downarrow \\ \dot{E}^n & \rightarrow & \dot{E}^n \end{array}$$

Случай 2. Пусть по-прежнему $P = \{y\}$ и $\dim N = n$, но $\dim M = n + 1$. Тогда $f^{-1}P$ является компактным одномерным многообразием, и потому (конечно, это «потому» нуждается в обосновании) каждая его компонента диффеоморфна либо окружности, либо отрезку (являющемуся, как говорят, *вложенной дугой*). При этом компоненты, диффеоморфные отрезку (дуги), могут существовать только тогда, когда многообразие M обладает краем ∂M . Оказывается,

что каждая диффеоморфная отрезку компонента Q многообразия $f^{-1}P$ обладает (в M) такой окрестностью U , а точка y_0 в N — такой окрестностью V , что:

(i) имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ \downarrow & pr & \downarrow \\ \dot{E}^n \times I & \rightarrow & \dot{E}^n \end{array}$$

вертикальные стрелки которой являются диффеоморфизмами, а нижняя горизонтальная стрелка представляет собой проекцию pr :

$(x, t) \mapsto x, x \in \dot{E}^n, t \in I$;

(ii) диффеоморфизм $U \rightarrow \dot{E}^n \times I$ отображает дугу Q на отрезок $0 \times I$, а пересечение $U \cap \partial M$ — на объединение $(\dot{E}^n \times 0) \cup (\dot{E}^n \times 1)$ (см. рис. 15). (Для компонент, диффеоморфных окружности, ситуация оказывается более сложной, но, к счастью, эти компоненты нам не нужны.)

Случай 3. Пусть P является подмногообразием диффеоморфным отрезку (т. е. вложенной дугой), а $\dim M = \dim N = n$. Тогда подмногообразие $f^{-1}P$ опять одно-

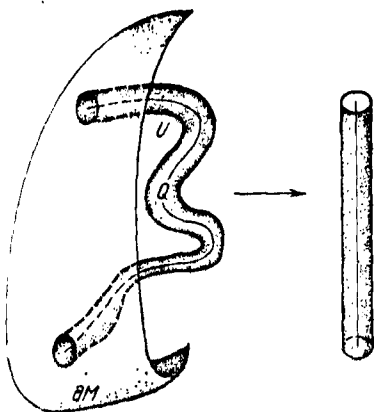


Рис. 15.

мерно и мы снова рассмотрим его компоненту Q , диффеоморфную отрезку (являющуюся вложенной дугой). В этом случае подмногообразия Q и P обладают такими окрестностями U и V , что

(i) имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ \dot{E}^{n-1} \times I_\varepsilon & \xrightarrow{\text{Id} \times \varphi} & \dot{E}^{n-1} \times I_\varepsilon \end{array}$$

вертикальные стрелки которой являются диффеоморфизмами, а нижняя горизонтальная стрелка задается соответствием

$$(x, t) \mapsto (x, \varphi(t)), \quad x \in \dot{E}^{n-1}, t \in I_\varepsilon,$$

где $I_\varepsilon = (-\varepsilon, 1 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, а φ — такая гладкая функция $I_\varepsilon \rightarrow I_\varepsilon$, что $\varphi(0) = 0$ и $\varphi'(0) \neq 0$, $\varphi'(1) \neq 1$;

(ii) диффеоморфизмы $U \rightarrow \dot{E}^{n-1} \times I_\varepsilon$ и $V \rightarrow \dot{E}^{n-1} \times I_\varepsilon$ отображают дуги Q и P на отрезок $0 \times I$.

Заметим, что из этих условий (и требования трансверсальности) следует, во-первых, что $\varphi(1)$ равно либо 0, либо 1, и, во-вторых, что при $0 < t < 1$ число $\varphi(t)$ не равно ни 0, ни 1.

Во всех трех случаях принято называть нижнюю стрелку построенных диаграмм *нормальной формой* отображения f . Таким образом, в случае 1 нормальной формой является тождественное отображение id , в случае 2 — проекция pr , а в случае 3 — отображение вида $\text{id} \times \varphi$ (отображение φ можно также дополнительно нормализовать, но это нам не понадобится).

На языке локальных координат существование этих нормальных форм означает, что в окрестностях U и V можно выбрать такие локальные координаты $\xi_1, \dots, \xi_n$ (и $\xi_{n+1} = t$ в случае 2) и $\eta_1, \dots, \eta_n$, что отображение f будет в этих координатах записываться формулами

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \xi_1, \dots, \eta_n = \xi_n && \text{в случаях 1 и 2,} \\ \eta_2 &= \xi_1, \dots, \eta_{n-1} = \xi_{n-1}, \eta_n = \varphi(\xi_n) && \text{в случае 3.} \end{aligned}$$

Теорема Сарда также может быть обобщена на случай произвольных подмногообразий $P \subset N$.

Пусть P и P' — диффеоморфные подмногообразия многообразия N . Это означает, что существует такое гладкое многообразие P_0 и такие гладкие вложения $i: P_0 \rightarrow N$

и $i': P_0 \rightarrow N$, что $iP_0 = P$ и $i'P_0 = P'$. Предполагая вложения i и i' фиксированными, мы будем называть подмногообразия P и P' *ε-близкими* (по отношению к некоторой метрике ρ на N), если $\rho(i(x), i'(x)) < \varepsilon$ для любой точки $x \in P_0$. Обобщенная теорема Сарда утверждает, что для любого гладкого отображения $f: M \rightarrow N$ гладких компактных многообразий, любого подмногообразия $P \subset N$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое ε -близкое к P подмногообразие P' , что отображение f трансверсально к P' . При этом, если подмногообразие P имеет край ∂P и отображение f трансверсально к ∂P , то можно дополнительно требовать, чтобы $\partial P' = \partial P$.

Теперь мы можем непосредственно приступить к доказательству независимости числа $\deg_y' f$ от y .

Пусть M и N — замкнутые гладкие ориентированные многообразия одной и той же размерности n , и пусть $f: M \rightarrow N$ — гладкое отображение, а $y_0, y_1 \in N$ — его два регулярных значения. Пусть, кроме того, многообразие N связно. Тогда (конечно, при $N \neq S^n$ это нужно доказать) точки y_0, y_1 можно соединить вложенной дугой P , а в силу обобщенной теоремы Сарда можно предполагать, что отображение f трансверсально к P . Согласно утверждению 2 прообраз $f^{-1}P$ будет одномерным многообразием с краем $\partial f^{-1}P$, являющимся прообразом $f^{-1}(y_0) \cup f^{-1}(y_1)$ концов дуги P . При этом каждая точка $x_0 \in \partial f^{-1}P$ будет концом некоторой вложенной дуги Q — компоненты многообразия $f^{-1}P$. Пусть $x_1 \in \partial f^{-1}P$ — другой конец этой дуги.

Согласно сказанному выше мы можем считать, что в многообразиях M и N существуют такие положительные карты $(U; \xi_1, \dots, \xi_n)$ и $(V; \eta_1, \dots, \eta_n)$, что:

1) $Q \subset U$ и точка $x \in U$ тогда и только тогда принадлежит Q , когда

$$\xi_1(x) = 0, \dots, \xi_{n-1}(x) = 0, \quad 0 \leq \xi_n(x) \leq 1;$$

2) $P \subset V$ и точка $y \in V$ тогда и только тогда принадлежит P , когда

$$\eta_1(y) = 0, \dots, \eta_{n-1}(y) = 0, \quad 0 \leq \eta_n(y) \leq 1;$$

3) имеет место включение $fU \subset V$, и отображение f задается в локальных координатах $\xi_1, \dots, \xi_n$ и $\eta_1, \dots, \eta_n$ формулами

$$\eta_1 = \xi_1, \dots, \eta_{n-1} = \xi_{n-1}, \quad \eta_n = \varphi(\xi_n),$$

где φ — такая гладкая функция, что $\varphi(0) = 0$ и $\varphi'(0) > 0$, $\varphi'(1) \neq 0$, причем $\varphi(1)$ равно либо 0, либо 1, и $0 < \varphi(\xi) < 1$ при $0 < \xi < 1$.

При этом, без ограничения общности, мы можем считать, что $\xi_n(x_0) = 0$, $\xi_n(x_1) = 1$ и аналогично, что $\eta_n(y_0) = 0$, $\eta_n(y_1) = 1$ (так что $x_0 \in f^{-1}y_0$, а $x_1 \in f^{-1}y_0$, если $\varphi(1) = 0$, и $x_1 \in f^{-1}y_1$, если $\varphi(1) = 1$).

Якобиан отображения f в точке x_0 равен, очевидно, $\varphi'(0)$, так что вклад точки x_0 в $\deg_{y_0} f$ равен $\varepsilon_{x_0} = \text{sgn } \varphi'(0)$. Аналогично, точка x_1 дает вклад в $\deg_{y_0} f$

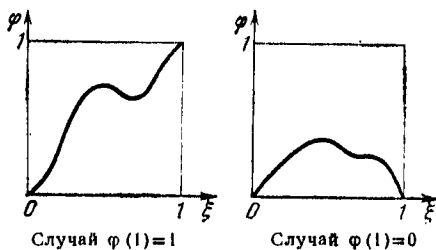


Рис. 16.

(при $\varphi(1) = 0$) или в $\deg_{y_1} f$ (при $\varphi(1) = 1$), равный $\varepsilon_{x_1} = -\text{sgn } \varphi'(1)$. С другой стороны, из условий, наложенных на функцию φ , непосредственно следует (см. рис. 16), что

$$\text{sgn } \varphi'(1) = \begin{cases} \text{sgn } \varphi'(0), & \text{если } \varphi(1) = 1, \\ -\text{sgn } \varphi'(0), & \text{если } \varphi(1) = 0. \end{cases}$$

Следовательно, при $\varphi(1) = 1$ точки x_0 и x_1 дают равные вклады в числа $\deg_{y_0} f$ и $\deg_{y_1} f$, а при $\varphi(1) = 0$ — взаимно сокращающиеся вклады в число $\deg_{y_0} f$.

Таким образом, называя точку $x_0 \in f^{-1}y_0$ (точку $x_1 \in f^{-1}y_1$) *существенной*, если $x_1 \in f^{-1}y_1$ (если $x_0 \in f^{-1}y_0$), и *несущественной*, если $x_1 \in f^{-1}y_0$ (соответственно $x_0 \in f^{-1}y_1$), мы получаем, что несущественные точки входят в $f^{-1}y_0$ (а также, конечно, в $f^{-1}y_1$) парами с различными знаками (и потому при подсчете степени взаимно уничтожаются), а каждой существенной из $f^{-1}y_0$ взаимно однозначно соответствует в $f^{-1}y_1$ существенная точка с тем же знаком. Поэтому $\deg_{y_0} f = \deg_{y_1} f$. $\square$

См. рис. 17.

Так как $\deg_y f$ не зависит от y , то, положив

$$\deg f = \deg_y f,$$

где y — произвольное регулярное значение отображения f , мы корректно отнесем каждому гладкому отображению $f: M \rightarrow N$ некоторое целое число $\deg f$ (совпадающее, заметим, с числом $d(f)$), определенным интегральной формулой (5). Это число называется *степенью отображения* f .

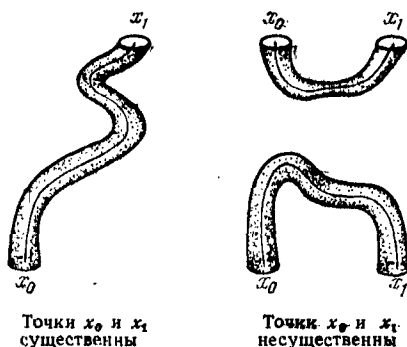


Рис. 17.

Подчеркнем, что многообразия M и N предполагаются здесь гладкими, замкнутыми, ориентированными многообразиями одной и той же размерности; и многообразие N , кроме того, предполагается связным.

Оказывается, что если два гладких отображения $f, g: M \rightarrow N$ гладко гомотопны, то их степени совпадают:

$$(6) \quad \deg f = \deg g.$$

Особенно просто это доказывается с помощью формулы (5), причем для этого не надо даже требовать, чтобы гомотопия $f_t: M \rightarrow N$, связывающая данные отображения, была гладкой. Действительно, по теореме анализа о зависимости интегралов от параметра число

$$(f_t^* \omega)[M] = \int_M f_t^* \omega$$

непрерывно зависит от t . Поэтому число

$$\deg f_t = \frac{(f_t^* \omega)[M]}{\omega[M]}$$

также непрерывно зависит от t . Следовательно, являясь целым, это число постоянно. $\square$

При «геометрическом» подходе целесообразно доказать некое более общее — очищенное от посторонних деталей — утверждение, тривиальным следствием которого является равенство (6). Для этого нам понадобятся некоторые общие результаты теории гладких многообразий, относящиеся к ориентациям, которые мы по-прежнему примем без доказательства.

Для любого $(n+1)$ -мерного многообразия W с краем точки его края ∂W характеризуется тем, что они обладают картами $(U; \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$, для которых картирующий диффеоморфизм $x \mapsto (\xi_0(x), \xi_1(x), \dots, \xi_n(x))$ является отображением на полупространство $\xi_0 \geq 0$ пространства $\mathbb{R}^{n+1}$. При этом

$$(7) \quad (U \cap \partial W; \xi_1|_{U \cap \partial W}, \dots, \xi_n|_{U \cap \partial W})$$

будет картой многообразия ∂W .

Утверждение 3. Если многообразие W ориентируемо, то его край ∂W также ориентируем. Любая ориентация многообразия W индуцирует некоторую ориентацию многообразия ∂W . $\square$

Именно, если карта $(U; \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$ задавала данную ориентацию многообразия W , то, по определению, карта (7) будет задавать индуцированную ориентацию многообразия ∂W . (Конечно, это определение нуждается в — совсем не очевидной — проверке корректности.)

В случае, когда $W = M \times I$ и, значит, $\partial W = (M \times 0) \cup (M \times 1)$, многообразие W ориентируемо тогда и только тогда, когда ориентируемо многообразие ∂W , т. е. многообразие M . При этом для любой карты $(U; \xi_1, \dots, \xi_n)$ многообразия M , задающей его ориентацию o , карта $(U \times I; \xi_0^*, \xi_1^*, \dots, \xi_n^*)$, где

$$\begin{aligned} \xi_0^*(x, t) = t, \quad \xi_i^*(x, t) = \xi_i(x), \quad \dots, \quad \xi_n^*(x, t) = \xi_n(x), \\ x \in U, \quad t \in I, \end{aligned}$$

будет задавать ориентацию $o \times I$ многообразия $M \times I$, индуцирующую на $M \times 0$ ориентацию o , т. е., точнее, переходящую в ориентацию o при отождествлении $(x, 0) \mapsto x$. Напротив, на $M \times 1$ ориентация $o \times I$ будет индуцировать противоположную ориентацию $-o$, поскольку ориентация o индуцируется, очевидно, ориентацией, задаваемой картой $(U \times I; 1 - \xi_0^*, \xi_1^*, \dots, \xi_n^*)$, которая противоположна ориентации $o \times I$. Условно эту ситуацию можно записать формулой

$$\partial(M \times I) = M \times 0 - M \times 1.$$

Отсюда, в частности, следует, что для любого гладкого отображения $h: \partial(M \times I) \rightarrow N$ имеет место формула

$$\deg h = \deg f - \deg g,$$

где f и g — отображения $M \rightarrow N$, определяемые формулами

$$f(x) = h(x, 0), \quad g(x) = h(x, 1), \quad x \in M.$$

С другой стороны, тот факт, что отображения f и g гомотопны, равносильно утверждению, что отображение h является ограничением на $\partial(M \times I)$ некоторого отображения $F: M \times I \rightarrow N$. Поэтому формула (6) является непосредственным следствием следующей общей леммы.

Лемма 1. Для любого гладкого отображения $F: W \rightarrow N$ ориентированного компактного $(n+1)$ -мерного многообразия W с краем ∂W в ориентированное связное замкнутое n -мерное многообразие N степень отображения $h = F|_{\partial W}: \partial W \rightarrow N$ равна нулю:

$$\deg(F|_{\partial W}) = 0.$$

Доказательство. Пусть y — регулярное значение отображения F (а значит, и отображения h), а x_0 — произвольная точка прообраза $h^{-1}(y)$. В $F^{-1}(y)$ точка x_0 является концевой точкой некоторой дуги — компоненты Q . Пусть x_1 — другой конец этой дуги (также лежащий в $h^{-1}(y)$). Очевидно, достаточно доказать, что знаки e_0 и e_1 якобиана отображения h в точках x_0 и x_1 противоположны, т. е. что вклады этих точек в степень $\deg h$ взаимно сокращаются.

Но поскольку это утверждение имеет локальный характер, при его доказательстве мы можем перейти к произвольным окрестностям дуги Q и точки y . Выбрав соответствующим образом в этих окрестностях локальные координаты, мы поэтому можем считать (см. выше случай 2), что

$$W = \dot{E}^n \times I, \quad N = \dot{E}^n, \quad F = \text{pr}, \\ x_0 = (0, 0), \quad x_1 = (0, 1), \quad y = 0.$$

Для завершения доказательства остается заметить, что в этой ситуации равенство $e_1 = -e_0$ очевидно, поскольку на обеих компонентах $\dot{E}^n \times 0$ и $\dot{E}^n \times 1$ края $\partial(\dot{E}^n \times I)$ отображение pr тождественно, а ориентации этих компонент различны.

Тем самым лемма 1, а значит, и формула (6), полностью доказана. $\square$

Поскольку, как уже выше было отмечено, любое непрерывное отображение $M \rightarrow N$ гомотопно гладкому отображению и два гладких отображения тогда и только тогда гомотопны, когда они гладко гомотопны, из равенства (6) следует, что для каждого гомотопического класса $\alpha \in [M, N]$ формула

$$\deg \alpha = \deg f,$$

где f — произвольное гладкое отображение класса α , корректно определяет некоторое целое число $\deg \alpha$ — степень класса α .

Здесь M и N — гладкие замкнутые ориентированные многообразия одной и той же размерности $n \geq 1$, причем многообразие N связно.

Тем самым мы определили некоторое отображение

$$\deg: [M, N] \rightarrow \mathbb{Z}.$$

В частности, при $M = N = S^n$ (и, значит, при $[M, N] = \pi_n S^n$) мы получаем отображение

$$(8) \quad \deg: \pi_n S^n \rightarrow \mathbb{Z},$$

являющееся, как нетрудно видеть, гомоморфизмом.

Теорема 1. *Отображение (8) является изоморфизмом.*

Оказывается, что в теореме 1 специфика сферы S^n играет роль только тогда, когда эта сфера выступает в роли многообразия N . Что же касается многообразия M , то от него достаточно требовать лишь связности. Иными словами, для любого гладкого, замкнутого связного n -мерного многообразия M отображение

$$(9) \quad \deg: [M, S^n] \rightarrow \mathbb{Z}$$

биективно.

Это утверждение мы и будем доказывать.

Надъективность отображения (9), т. е. тот факт, что для любого $k \in \mathbb{Z}$ существует отображение $f: M \rightarrow S^n$ степени k , доказывается без всякого труда (и даже без предположения, что многообразие M связно). Действительно, выбрав в многообразии M систему $|k|$ непересекающихся открытых шаров, зададим отображение $M \rightarrow S^n$, потребовав, чтобы дополнение к этим шарам оно переводило в точку $s_0 \in S^n$, а каждый шар диффеоморфно отображало на клетку $e^n = S^n \setminus s_0$, сохраняя ориентацию при $k > 0$ и обращая ориентацию при $k < 0$. Ясно, что степень этого отображения равна k .

При $M = S^n$ этот факт можно доказать еще проще, заметив, что в силу гомоморфности отображения (8) его образ является подгруппой группы Z , содержащей степень 1 тождественного отображения, и потому совпадающей со всей группой Z .

Таким образом, нам нужно доказать лишь инъективность отображения (9), т. е. тот факт, что *[два отображения $f, g: M \rightarrow S^n$ тогда и только тогда гомотопны, когда степени этих отображений равны:*

$$\deg f = \deg g.$$

Это утверждение является простейшим примером так называемых теорем гомотопической классификации, устанавливающих в тех или иных ситуациях необходимые и достаточные условия гомотопности отображений.

В силу общей связи между задачами гомотопии и пространства (см. лекцию 0) эта теорема непосредственно вытекает из следующей теоремы распространения (примененной к многообразию $W = M \times I$).

Предложение 1. *Гладкое отображение*

$$f: \partial W \rightarrow S^n$$

края ∂W гладкого компактного ориентированного $(n+1)$ -мерного связного многообразия W в сферу S^n тогда и только тогда может быть распространено на все многообразие W , когда его степень равна нулю:

$$(10) \quad \deg f = 0.$$

Доказательство. Необходимость условия (10) составляет содержание леммы 1. Поэтому в доказательстве нуждается только его достаточность.

Условие (10) означает, что для некоторой точки $y \in S^n$ ее прообраз $f^{-1}y$ состоит из четного числа точек, в одной половине которых якобиан отображения f положителен, а в другой половине отрицателен. Построим семейство непересекающихся вложенных дуг Q_i , соединяющих в W каждую точку первого типа с некоторой точкой второго типа, целиком — за исключением концов — лежащих во внутренней $W \setminus \partial W$ многообразия W , а в концах не касающихся края ∂W . Очевидно, что это всегда можно сделать (только при $n=1$ следует с определенной осторожностью выбирать пары соединяемых точек). Мы дока-

жем предложение 1, построив такое гладкое отображение $F: W \rightarrow S^n$, что:

а) $F|_{\partial W} = h$;

б) точка y является регулярным значением отображения F ;

в) ее прообраз $F^{-1}y$ состоит из дуг Q_i .

Построение такого отображения мы произведем в два этапа.

Этап 1. Пусть Q — одна из дуг Q_i . Очевидно, что эта дуга обладает такой окрестностью U («трубкой вдоль Q »), что существует диффеоморфизм

$$\varphi: \mathbb{R}^n \times I \rightarrow U,$$

переводящий отрезок $0 \times I$ в дугу Q и отображающий край $\mathbb{R}^n \times 0 \cap \mathbb{R}^n \times 1$ произведения $\mathbb{R}^n \times I$ на пересечение $U \cap \partial W$. При этом окрестности U , отвечающие всевозможным дугам Q_i , мы можем считать непересекающимися. Кроме того, уменьшив, если нужно, окрестности U , мы можем считать, что на компонентах $V_0 = \varphi(\mathbb{R}^n \times 0)$ и $V_1 = \varphi(\mathbb{R}^n \times 1)$ пересечения $U \cap \partial W$ отображение h является диффеоморфизмом на некоторую окрестность V точки y .

На этапе 1 мы построим отображение F на каждой окрестности U отдельно. Ясно, что для этого достаточно построить такое гладкое отображение

$$\Phi: \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

что:

$$a') \quad \Phi|_{\mathbb{R}^n \times 0} = \text{id} \text{ и } \Phi|_{\mathbb{R}^n \times 1} = k,$$

где

$$k = (\varphi|_{\mathbb{R}^n \times 0})^{-1} \circ (h|_{V_0})^{-1} \circ (h|_{V_1}) \circ (\varphi|_{\mathbb{R}^n \times 1})$$

(мы отождествляем $\mathbb{R}^n \times 0$ с $\mathbb{R}^n$);

б') точка $0 \in \mathbb{R}^n$ является регулярным значением отображения Φ ;

в') ее прообразом $\Phi^{-1}0$ является отрезок $0 \times I$. (Действительно, если такое отображение Φ построено, то отображение F на U можно будет задать формулой

$$F = (h|_{V_0}) \circ (\varphi|_{\mathbb{R}^n \times 0}) \circ \Phi \circ \varphi^{-1}.)$$

Пусть $l: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — дифференциал (в точке 0) диффеоморфизма k (рассматриваемого как диффеоморфизм $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$). Ясно, что если окрестности U и V выбраны достаточно малыми, то ни для одной точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus 0$ точка 0 не будет принадлежать отрезку с концами $l(x)$ и $k(x)$.

Поэтому отображение $\Phi_1: \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$, определенное формулой

$$\Phi_1(x, t) = (1-t)l(x) + tk(x), \quad x \in \mathbb{R}^n; t \in I,$$

будет обладать тем свойством, что $\Phi_1^{-1}0 = 0 \times I$. При этом точка 0 будет, очевидно, регулярным значением отображения Φ_1 , и будут иметь место равенства

$$\Phi_1|_{\mathbb{R}^n \times 0} = l, \quad \Phi_1|_{\mathbb{R}^n \times 1} = k.$$

Таким образом, гомотопия Φ_1 обладает всеми свойствами а')—в'), за исключением первого из свойств а').

Чтобы исправить дело, мы воспользуемся тем, что по условию якобианы диффеоморфизмов $h|_{V_0}$ и $h|_{V_1}$ имеют противоположные знаки. Так как этим же свойством обладают и диффеоморфизмы $\varphi|_{\mathbb{R}^n \times 0}$ и $\varphi|_{\mathbb{R}^n \times 1}$, то, следовательно, якобиан диффеоморфизма k положителен, т. е. линейный оператор l имеет положительный определитель, и, значит, принадлежит компоненте единицы полной линейной группы $GL(n)$. Поэтому в $GL(n)$ существует гладкий путь $t \mapsto l_t$, соединяющий тождественный оператор $\text{id} = l_0$ с оператором $l = l_1$. Мы определим (очевидно, гладкую) гомотопию $\Phi_0: \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$, положив

$$\Phi_0(x, t) = (l_t x, t) \text{ для любой точки } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times I.$$

Очевидно, что эта гомотопия также обладает свойствами б') и в'), а свойство а') для нее имеет вид

$$\Phi_0|_{\mathbb{R}^n \times 0} = \text{id}, \quad \Phi_0|_{\mathbb{R}^n \times 1} = l.$$

Теперь ясно, что гомотопия Φ , получающаяся, когда мы произведем сначала гомотопию Φ_0 , а затем гомотопию Φ_1 , обладает (после соответствующего сглаживания вблизи точки $t = 1/2$) всеми требуемыми свойствами.

Этап 2. В результате этапа 1 (произведенного для всех дуг Q_i одновременно) мы получим на некоторой окрестности объединения $\bigcup Q_i$ всех дуг Q_i (обозначим эту окрестность снова символом U) отображение F , удовлетворяющее всем условиям а)—в) (с той лишь оговоркой, что в условии а) край ∂W надо заменить пересечением $U \cap \partial W$).

Поскольку каждое гладкое многообразие является — в силу локальной компактности и хаусдорфовости — регулярным пространством, подмногообразие $\bigcup Q_i$ обладает в W такой окрестностью V , что $\bar{V} \subset U$.

Ясно, что на пересечении множеств $\bar{V} \setminus V$ и $\partial W \setminus V$ (замкнутых в $W \setminus V$) отображения F и h совпадают. Поэтому формула

$$\hat{F}(x) = \begin{cases} F(x), & \text{если } x \in \bar{V} \setminus V, \\ h(x), & \text{если } x \in \partial W \setminus V, \end{cases}$$

корректно определяет непрерывное отображение $\hat{F}$ объединения $(\bar{V} \cup \partial W) \setminus V$ этих множеств в сферу S^n , не задевающее точку y , т. е. являющееся отображением в $S^n \setminus y$. Поскольку $S^n \setminus y \approx \mathbb{R}^n$, мы можем поэтому рассматривать $\hat{F}$ как отображение в $\mathbb{R}^n$ и применить к нему теорему Титце (см. Дополнение к лекции 0). Согласно этой теореме существует непрерывное отображение $\bar{F}: W \setminus V \rightarrow S^n \setminus y$, совпадающее на $(\bar{V} \cup \partial W) \setminus V$ с отображением $\hat{F}$, т. е. совпадающее на $\bar{V} \setminus V$ с отображением F , а на $\partial W \setminus V$ с отображением h . Мы определим непрерывное отображение $F_1: W \rightarrow S^n$, полагая, что на $\bar{V}$ оно совпадает с F , а на $W \setminus V$ — с $\bar{F}$.

Это непрерывное отображение гладко на ∂W и на V . Поэтому (см. выше утверждение 1) его можно сгладить, не меняя на ∂W (а также на некоторой содержащейся в V окрестности подмногообразия UQ_i). Получающееся отображение и будет гладким распространением отображения h с ∂W на все W .

Тем самым предложение 1 полностью доказано. Вместе с ним полностью доказана и теорема 1. $\square$

Замечание 2. Аналогичным образом (вводя в рассмотрение так называемую *степень mod 2*) можно доказать, что если гладкое замкнутое связное n -мерное многообразие M неориентируемо, то множество $[M, S^n]$ состоит из двух элементов. Что же касается многообразий с краем, то для них легко доказывается, что любое отображение $M \rightarrow S^n$ гомотопию нулю.

Замечание 3. Рассмотрение прообразов регулярных значений полезно и при изучении отображений сфер различных размерностей. На этой основе Л. С. Понтрягин построил свой знаменитый метод вычисления гомотопических групп $\pi_m S^n$, идентифицирующий их с так называемыми группами кобордизмов оснащенных многообразий. К сожалению, у нас нет времени для изложения этого метода (интересующийся читатель может обратиться к книге Понтрягина [7] или к более

доступному, рассчитанному на начинающих изложению Милнора [5]).

Замечание 4. Понятие степени можно ввести и для отображений многообразий с краем (в многообразия с краем). Мы не будем развивать здесь соответствующую общую теорию и лишь опишем несколько специальных случаев, когда возможна *ad hoc* редукция к случаю отображений сфер.

Случай 1. Отображения

$$(11) \quad f: (E^n, S^{n-1}) \rightarrow (S^n, s_0).$$

С помощью стандартного относительного гомеоморфизма

$$(12) \quad \chi: (E^n, S^{n-1}) \rightarrow (S^n, s_0)$$

(см. лекцию 3) любое такое отображение мы можем представить в виде $f = \hat{f} \circ \chi$, где $\hat{f}: (S^n, s_0) \rightarrow (S^n, s_0)$. Считая, по определению, что $\deg f = \deg \hat{f}$, мы немедленно получим, что *отображения (11) тогда и только тогда гомотопны (rel S^{n-1}), когда их степени совпадают.*

Случай 2. Отображения

$$(I^n, I^n) \rightarrow (S^n, s_0) \text{ или } (I^{n+1}, 0) \rightarrow (S^n, s_0).$$

Этот случай во всем подобен предыдущему, только вместо гомеоморфизма (12) надо использовать относительный гомеоморфизм

$$(13) \quad \chi: (I^n, I^n) \rightarrow (S^n, s_0)$$

или соответственно пунктированный гомеоморфизм

$$(14) \quad \omega: (I^{n+1}, 0) \rightarrow (S^n, s_0).$$

Подчеркнем, что здесь мы имеем дело с отображениями пространств, не являющимися гладкими многообразиями (даже — с краем).

Случай 3. Отображения

$$(15) \quad (I^n, I^n) \rightarrow (I^{n+1}, 0).$$

Здесь также применим аналогичный трюк, но необходимы оба гомеоморфизма (13) и (14).

Полезно иметь в виду, что в этих конструкциях нет необходимости обязательно предполагать отображения (13) и (14) гомеоморфизмами — достаточно, чтобы они были отображениями степени 1.

Конечно, в каждом из случаев 1—3 можно дать прямое определение степени. Например, если отображение (15) гладко на прообразе внутренней одной из граней куба I^{n+1} , то его степень равна «алгебраическому числу» прообразов произвольного регулярного значения, принадлежащего этой грани.

ДОПОЛНЕНИЕ

Простейшие следствия того, что $\pi_n S^n = 0$.— Распространение отображений в сферы.— Теорема Борсука о неограниченной компоненте.— Топологическая инвариантность размерности кубируемых множеств.— Множества, не пересекающие сферу.— Теорема об инвариантности области.— Топологическая инвариантность размерности многообразий.

Удивительно, что важные геометрические следствия имеет уже тот факт, что группа $\pi_n S^n$ отлична от нуля (а группы $\pi_m S^n$ при $m < n$ равны нулю). Например, поскольку $\pi_n E^{n+1} = 0$, функтор π_n обладает свойствами, которые мы требовали от функтора Π в доказательстве теоремы об барабане в лекции 0. Тем самым мы теперь (и только теперь!) можем считать эту теорему доказанной. Вместе с тем оказывается доказанной и теорема Брауера о неподвижной точке (см. лекцию 0).

Далее, мы теперь можем доказать, что при $m \neq n$ сферы S^m и S^n гомотопически не эквивалентны. Действительно, если, скажем, $m < n$, то $\pi_m S^n = 0$, тогда как $\pi_m S^m \neq 0$. $\square$

Отсюда следует, что при $m \neq n$ пространства $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ не гомеоморфны. Действительно, любой гомеоморфизм этих пространств определял бы гомеоморфизм — и, значит, гомотопическую эквивалентность — их одноточечных компактификаций S^m и S^n . $\square$

Чтобы получить более глубокие результаты, нам понадобится несколько простых замечаний об отображениях в сферы.

В первую очередь заметим, что если в замкнутой паре (X, A) пространство X нормально, то любое отображение $f: A \rightarrow S^n$ можно распространить на некоторую окрестность U множества A . Действительно, в силу вложения $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ отображение f мы можем рассматри-

вать как отображение $A \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. По теореме Титце это отображение распространяется до некоторого отображения $g: X \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Пусть $U = X \setminus g^{-1}(0)$. Ясно, что $A \subset U$ и формула

$$\bar{f}(x) = \frac{g(x)}{|g(x)|}, \quad x \in U,$$

определяет непрерывное отображение $\bar{f}: U \rightarrow S^n$, совпадающее на A с отображением f . $\square$

Отсюда вытекает, что если для замкнутой пары (X, A) пространство X устойчиво нормально (т. е. оно само нормально и нормально произведение $X \times I$), то для каждой коммутативной диаграммы вида

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & X \\ \downarrow \sigma_0 & \searrow f & \swarrow f \\ & S^n & \\ \uparrow f & \nwarrow f & \downarrow \sigma_0 \\ A \times I & \xrightarrow{i \times \text{id}} & X \times I \end{array}$$

существует замыкающая гомотопия $\bar{F}: X \times I \rightarrow S^n$ (т. е., как говорят, пара (X, A) удовлетворяет аксиоме РГ по отношению к отображениям в сферы). Действительно, применив предыдущее утверждение к паре $(X \times I, \bar{A})$, где, как всегда, $\bar{A} = (X \times 0) \cup (A \times I)$, и к отображению $\bar{f}: \bar{A} \rightarrow S^n$, заданному формулой

$$\bar{f}(x, t) = \begin{cases} f(x), & \text{если } t = 0, \\ F(x, t), & \text{если } x \in A, \end{cases}$$

мы сможем распространить это отображение на некоторую окрестность U подпространства $\bar{A}$. Из компактности отрезка I непосредственно следует, что в пространстве X существует такая окрестность V подпространства A , что $V \times I \subset U$. По лемме Урысона существует функция $\varphi: X \rightarrow I$, равная нулю на $X \setminus V$ и единице на A . Тогда $(x, \varphi(x)t) \in U$ для любой точки $(x, t) \in X \times I$, и потому формула

$$\bar{F}(x, t) = g(x, \varphi(x)t), \quad x \in X, t \in I,$$

где $g: U \rightarrow S^n$ — распространение на U отображения $\bar{f}$, корректно определяет гомотопию $\bar{F}: X \times I \rightarrow S^n$, замыкающую, очевидно, диаграмму (1). $\square$

Отображения $X \rightarrow S^n$, гомотопные нулю, называются также *несущественными отображениями*. Все остальные

отображения $X \rightarrow S^n$ называются *существенными отображениями*.

В случае, когда X является n -мерным многообразием, существенные отображения — это в точности отображения, степень которых отлична от нуля.

Заметим, что любое существенное отображение надъективно.

Из доказанного выше утверждения немедленно вытекает, что если для замкнутой пары (X, A) пространство X устойчиво нормально, то любое несущественное отображение $f: A \rightarrow S^n$ допускает распространение $\bar{f}: X \rightarrow S^n$, также являющееся несущественным отображением.

Пусть теперь X — произвольное компактное подмногообразие евклидова пространства $\mathbb{R}^{n+1}$. Тогда для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus X$ формула

$$p_{x_0}: x \mapsto \frac{x - x_0}{|x - x_0|}, \quad x \in X,$$

определяет некоторое непрерывное отображение $p_{x_0}: X \rightarrow S^n$. Если точки x_0 и x_1 лежат в одной компоненте дополнения $\mathbb{R}^{n+1} \setminus X$, то отображения $p_{u(t)}$, где $u: t \mapsto u(t)$ — произвольный путь, соединяющий в $\mathbb{R}^{n+1} \setminus X$ точки x_0 и x_1 , составляют, очевидно, гомотопию, связывающую отображения p_{x_0} и p_{x_1} . Таким образом, гомотопический класс отображения p_{x_0} зависит только от компоненты C дополнения $\mathbb{R}^{n+1} \setminus X$, содержащей точку x_0 .

В отношении компоненты C возможны два случая: либо эта компонента ограничена, либо она неограничена. Пусть сначала компонента C ограничена. Поскольку множество X компактно, оно содержится в некотором замкнутом шаре E . Ясно, что компонента C , а потому и ее замыкание $\bar{C}$ также содержатся в E . Подвергнув пространство $\mathbb{R}^{n+1}$ параллельному переносу и гомотетии, мы можем добиться того, чтобы точка x_0 совпала с точкой 0 (и потому отображение $p = p_{x_0}$ задавалось формулой $x \mapsto x/|x|$), а шар E был единичным шаром E^{n+1} . Имея это в виду, предположим, что отображение $p: X \rightarrow S^n$, $x \mapsto x/|x|$, несущественно. Тогда по сделанному выше замечанию оно распространяется до некоторого (также несущественного) отображения $\bar{p}: X \cup C \rightarrow S^n$. Ясно, что формула

$$r(x) = \begin{cases} \bar{p}(x), & \text{если } x \in X \cup C, \\ x/|x|, & \text{если } x \in E^{n+1} \setminus C, \end{cases}$$

корректно определяет непрерывное отображение $r: E^{n+1} \rightarrow S^n$, тождественное на S^n , т. е. являющееся ретракцией $E^{n+1} \rightarrow S^n$. Поскольку такой ретракции существовать не может, предположение о несущественности отображения p ложно, т. е. это отображение существенно.

Пусть теперь компонента C неограничена. Не теряя общности, мы можем считать, что точка x_0 лежит вне шара E и потому отделена от X некоторой гиперплоскостью. Тогда направления векторов $x - x_0$ для точек $x \in E$, а значит, и для точек $x \in X$, содержатся в некоторой полусфере сферы S^n и потому заведомо не заполняют всю эту сферу. Поэтому отображение p несущественно.

Этим доказано следующее предложение.

Предложение 1. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus X$ тогда и только тогда лежит в неограниченной компоненте множества $\mathbb{R}^{n+1} \setminus X$, когда отображение $p_{x_0}: X \rightarrow S^n$ несущественно.

Это предложение известно как теорема Борсука о неограниченной компоненте.

Применительно к замкнутым подмножествам сфер из теоремы Борсука следует, что если замкнутое подмножество X сферы S^{n+1} обладает тем свойством, что каждое отображение $X \rightarrow S^n$ несущественно, то оно не пересекает сферу (дополнение $S^{n+1} \setminus X$ связно). Действительно, если дополнение $S^{n+1} \setminus X$ несвязно и $x_0, x_1 \in S^{n+1} \setminus X$ — точки, лежащие в его различных компонентах, то, отождествив проколотую сферу $S^{n+1} \setminus x_1$ с пространством $\mathbb{R}^{n+1}$, мы получим, что точка x_0 будет принадлежать ограниченной компоненте. Поэтому будет существовать существенное отображение $X \rightarrow S^n$ (а именно, отображение p_{x_0}). $\square$

Обратное утверждение доказывается прямым геометрическим построением, не использующим алгебро-топологических соображений и основывающемся на одном свойстве сферы S^{n+1} , которое целесообразно предварительно обсудить в общем виде.

Это свойство связано с проблемой топологической инвариантности элементарно-геометрического понятия размерности. Чтобы четко сформулировать эту проблему, надо в первую очередь четко описать класс пространств, для которых имеет смысл «элементарно-геометрическая» размерность.

Пусть $N > 0$ — целое положительное число. Гиперплоскости пространства $\mathbb{R}^n$ с уравнениями вида $t_i = k2^{-N}$, где $i = 1, \dots, n$, а $k \in \mathbb{Z}$, разбивают это пространство

в объединение замкнутых кубов со сторонами длины 2^{-N} . Эти кубы, а также все их грани (любой размерности) мы будем называть *кубиками мелкости N* пространства $\mathbb{R}^n$. Подмножество пространства $\mathbb{R}^n$ мы будем называть *кубируемым множеством*, если существует такое $N > 0$, что это подмножество представляется (очевидно, единственным образом) в виде объединения некоторого семейства кубиков мелкости N , содержащего вместе с каждым кубиком и все его грани. Это семейство мы будем называть *кубильяжем мелкости N* кубируемого множества. Ясно, что из существования кубильяжа мелкости N вытекает существование кубильяжа любой большей мелкости. Таким образом, каждое кубируемое множество обладает кубильяжами сколь угодно большой мелкости. Любое кубируемое множество замкнуто. Оно компактно (=ограничено) тогда и только тогда, когда все его кубильяжи конечны. Согласно лемме Лебега (см. Дополнение к лекции I) для любого открытого покрытия компактного кубируемого множества существует такое $N > 0$, что каждый элемент кубильяжа мелкости N этого множества содержится в некотором элементе покрытия.

Размерностью $\dim X$ кубируемого множества X мы будем называть наибольшую размерность кубиков его произвольного кубильяжа (ясно, что эта размерность не зависит от выбора кубильяжа).

Интересующая нас проблема может быть теперь сформулирована следующим образом:

Совпадают ли размерности двух гомеоморфных кубируемых множеств?

Утвердительный ответ на этот вопрос непосредственно вытекает из следующего предложения.

Предложение 2. *Для кубируемого множества X неравенство $\dim X \leq n$ имеет место тогда и только тогда, когда для каждого замкнутого подмножества $A \subset X$ любое непрерывное отображение $f: A \rightarrow S^n$ может быть распространено на все X .*

Доказательство. Достаточность этого условия легко вытекает из теоремы о барабане. Действительно, если $\dim X > n$, то в X существуют замкнутые подмножества B , гомеоморфные $(n+1)$ -мерному шару E^{n+1} (например, каждый $(n+1)$ -мерный кубик любого кубильяжа пространства X). Пусть $g: B \rightarrow E^{n+1}$ — произвольный гомеоморфизм, $A = g^{-1}(S^n)$ и $f = g|_A$. По условию, отображение $f: A \rightarrow S^n$ может быть распространено до некото-

рого отображения $\bar{f}: X \rightarrow S^n$. Но тогда отображение $(\bar{f}|_B) \circ g^{-1}$ будет, очевидно, ретракцией $E^{n+1} \rightarrow S^n$. Поэтому $\dim X \leq n$.

Необходимость условия доказывается прямым построением. Так как пространство X , очевидно, устойчиво нормально, то, согласно сказанному выше, отображение f может быть распространено на некоторую окрестность U множества A . С другой стороны, рассмотрев достаточно мелкий кубильяж множества X , мы получим, что все кубики этого кубильяжа, пересекающие A , содержатся в U . Объединение A_0 всех этих кубиков является содержащим A кубируемым множеством, на которое распространено отображение f . Поэтому без ограничения общности мы можем с самого начала считать, что множество A является кубируемым множеством (и состоит из кубиков из некоторого кубильяжа множества X). В этом случае мы будем распространять отображение f кубик за кубиком на все кубики из X , не принадлежащие A . На каждом шаге этого распространения мы встретимся с ситуацией, когда отображение f задано на границе некоторого кубика размерности $m \leq n$, и задача будет состоять в распространении этого отображения на весь кубик. Но поскольку пара (кубик, его граница) гомеоморфна паре (E^m, S^{m-1}) и поскольку, как мы уже знаем, $\pi_{m-1} S^n = 0$ при $m \leq n$, эта задача всегда разрешима. Поэтому, двигаясь от кубика к кубику, мы в результате распространим отображение f на всё X . $\square$

Замечание 1. Предложение 2 подсказывает способ для определения понятия размерности $\dim X$ для любого топологического пространства X . Именно, можно считать, что $\dim X \leq n$, если для каждого замкнутого подмножества $A \subset X$ любое непрерывное отображение $A \rightarrow S^n$ может быть распространено на всё X , и $\dim X = n$, если $\dim X \leq n$, но неверно, что $\dim X \leq n-1$. Тогда предложение 2 будет утверждать, что для любого кубируемого множества X размерность в этом смысле совпадает с его элементарно-геометрической размерностью.

Если $\dim X > n$, то отображение $f: A \rightarrow S^n$ может быть, вообще говоря, распространено только на $X^n \cup A_0$, где X^n — объединение всех кубиков размерности $\leq n$ рассматриваемого кубильяжа множества X . С другой стороны, если $\dim X = n+1$ и если в каждом $(n+1)$ -мерном кубике из $X \setminus A_0$ выбрано по точке, то множество $X \setminus K$,

где K — множество всех выбранных точек, будет, очевидно, ретрагироваться на $X^n \cup A_0$, и потому отображение f может быть распространено с $X^n \cup A_0$ на $X \setminus K$.

Этим доказано, что для любого непрерывного отображения $f: A \rightarrow S^n$ в сферу S^n замкнутого подмножества A кубического $(n+1)$ -мерного множества X существует такое конечное множество $K \subset X \setminus A$, что f распространяется на $X \setminus K$.

Вернемся теперь к множествам, не рассекающим сферу.

Предложение 3. Замкнутое множество $X \subset S^{n+1}$ тогда и только тогда не рассекает сферу S^{n+1} , когда каждое отображение $X \rightarrow S^n$ несущественно.

Доказательство. Достаточность этого условия была доказана выше. Поэтому нам нужно доказать лишь его необходимость.

Пусть дополнение $S^{n+1} \setminus X$ связно, и пусть f — произвольное непрерывное отображение $X \rightarrow S^n$. Так как сфера S^{n+1} гомеоморфна кубическому множеству I^{n+2} , то по только что доказанному мы можем считать, что отображение f распространено до некоторого отображения пространства $S^{n+1} \setminus K$ в сферу S^n , где K — конечное подмножество дополнения $S^{n+1} \setminus K$. Будем называть точки из K особыми точками отображения f .

Предполагая, что сфера S^{n+1} снабжена римановой метрикой (например, индуцированной евклидовой метрикой объемлющего пространства R^{n+2}), назовем клеткой в $S^{n+1} \setminus X$ произвольный открытый шар $e \subset S^{n+1} \setminus X$. Ясно, что любая точка $x_0 \in S^{n+1} \setminus X$ содержится в некоторой клетке, граница $e = \bar{e} \setminus e$ которой не содержит точек из K и, более того, любые две точки $x_0, x_1 \in S^{n+1} \setminus X$ можно соединить цепочкой таких клеток, в которой любые две последовательные клетки пересекаются.

Имея это в виду, рассмотрим произвольную точку $x_1 \in K$ и клетку e , содержащую точку x_1 и такую, что ее граница $\bar{e}$ не пересекается с множеством K . Пусть x_2 — произвольная точка из e . Поскольку множество $\bar{e} \setminus x_2$ ретрагируемо, очевидно, на $\bar{e}$, отображение f может быть распространено на $\bar{e} \setminus x_2$.

Получающееся отображение имеет вне e те же особые точки, что и отображение f , а внутри e — только одну особую точку x_2 . Мы будем говорить, что особая точка x_1 сдвинута в положение x_2 . (Заметим, что при этом в x_2 сдви-

гаются также и все другие особые точки, если они имеются, содержащиеся в e .) Поскольку, как уже было замечено, любые две точки из $S^{n+1} \setminus X$ можно соединить цепочкой клеток, любые две соседние клетки которой пересекаются, отсюда следует, что все точки из K можно сдвинуть в некоторую фиксированную точку $x_0 \in S^{n+1} \setminus X$. Другими словами, без ограничения общности мы можем считать, что отображение f имеет только одну особую точку x_0 , т. е. что оно является отображением $S^{n+1} \setminus x_0 \rightarrow S^n$ и, следовательно, несущественно (ибо проколота сфера $S^{n+1} \setminus x_0$ стягиваема). Но тогда несущественно и его ограничение на X , т. е. исходное отображение f . $\square$

Следствие 1. Если $A \subset X \subset S^{n+1}$ и пара (X, A) гомеоморфна паре (E^{n+1}, S^n) , то множество $S^{n+1} \setminus A$ разбивается на две компоненты, которыми являются множества $S^{n+1} \setminus X$ и $X \setminus A$. В частности, множество $X \setminus A$ открыто в сфере S^{n+1} .

Доказательство. Так как любое отображение $E^{n+1} \rightarrow S^n$ несущественно, то множество $S^{n+1} \setminus X$ связно. Множество $X \setminus A$ связно потому, что оно гомеоморфно открытому шару. Значит, множество

$$S^{n+1} \setminus A = (S^{n+1} \setminus X) \cup (X \setminus A)$$

либо связно, либо состоит из двух компонент $S^{n+1} \setminus X$ и $X \setminus A$. Но связным оно быть не может, поскольку имеются существенные отображения $A \rightarrow S^n$ (например, гомеоморфизм $A \rightarrow S^n$). $\square$

Следствие 2 (теорема об инвариантности области). Если подмножества U и V сферы S^n гомеоморфны и U открыто в S^n , то V также открыто.

Доказательство. Пусть $f: U \rightarrow V$ — заданный гомеоморфизм, и пусть $x \in U$, а O — такая сферическая окрестность точки x , что $\bar{O} \subset U$. Так как пара $(\bar{O}, \dot{O})$ гомеоморфна паре (E^{n+1}, S^n) , то пара $(f\bar{O}, f\dot{O})$ также гомеоморфна паре (E^{n+1}, S^n) . Поэтому, согласно следствию 1, множество $f\bar{O} \setminus f\dot{O} = fO$, содержащее точку $f(x) \in V$, открыто. Поскольку это множество содержится в $V = fU$, этим доказано, что точка $f(x)$ является внутренней точкой множества V , а так как в виде $f(x)$ может быть представлена любая точка из V , то, следовательно, множество V открыто. $\square$

Напомним, что топологическое пространство X называется *топологическим n -мерным многообразием*, если любая его точка обладает окрестностью, гомеоморфной пространству $\mathbb{R}^n$.

Следствие 3. *Если подмножества U и V топологических n -мерных многообразий X и Y гомеоморфны и U открыто в X , то V открыто в Y .*

Доказательство. Пусть $f: U \rightarrow V$ — заданный гомеоморфизм, и пусть $x \in U$. Существуют такие гомеоморфные пространству $\mathbb{R}^n$, а значит, и пространству $S^n \setminus s_0$ окрестности P и Q точек x и $y = f(x)$ соответственно в многообразиях X и Y , что $P \subset U$ и $fP \subset Q$. Выбрав гомеоморфизмы $\varphi: P \rightarrow S^n \setminus s_0$ и $\psi: Q \rightarrow S^n \setminus s_0$, рассмотрим композицию $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$, являющуюся гомеоморфизмом открытого множества $S^n \setminus s_0$ на его подмножество $(\psi \circ f)(P)$. Согласно следствию 2 подмножество $(\psi \circ f)(P)$ будет открыто в S^n , а потому и в $S^n \setminus s_0$. Значит, множество $f(P)$ будет открыто в $Q = \psi^{-1}(S^n \setminus s_0)$, а потому и во всем многообразии Y . Таким образом, каждая точка $f(x)$ множества $V = fU$ имеет открытую в Y окрестность fP , содержащуюся в V . Следовательно, множество V открыто. $\square$

Замечание 2. Без предположения, что X и Y являются многообразиями, следствие 3 неверно. Чтобы получить соответствующий контрпример, достаточно принять за U , V и X ось абсцисс, а за Y объединение оси абсцисс и оси ординат.

Следствие 4. *Топологические многообразия X и Y различных размерностей не гомеоморфны.*

Доказательство. Пусть $\dim X = \dim Y = n > 0$, и пусть, вопреки утверждению, многообразия X и Y гомеоморфны. Тогда многообразие $Y \times \mathbb{R}^n$ будет иметь ту же размерность, что и многообразие X , и вместе с тем будет содержать неоткрытое подмножество $Y \times 0$, гомеоморфное многообразию X . Поскольку X открыто в X , это противоречит следствию 3. $\square$

Замечание 3. Другой, более поучительный способ доказательства следствия 4 состоит в том, что для многообразий доказывается аналог предложения 2. Подробное проведение соответствующих рассуждений мы оставим инициативе читателя.

Точные Π -последовательности.— Категория пунктированных пар TOP_2^* .— Относительные гомотопические группы.— Лемма о пяти гомоморфизмах.

Вернемся теперь к общей теории гомотопических групп.

Гомотопическая последовательность произвольного расслоения принадлежит к классу бесконечных влево точных последовательностей вида

$$(1) \quad \dots \rightarrow B_{n+1} \xrightarrow{\partial_n} F_n \xrightarrow{i_n} E_n \xrightarrow{p_n} B_n \rightarrow \dots,$$

все члены которых, за исключением последних шести правых членов, являются абелевыми группами, и которые кончаются справа тремя неабелевыми (мультипликативно записываемыми) группами и тремя пунктированными множествами:

$$\dots \rightarrow \underbrace{F_2 \xrightarrow{i_2} E_2 \xrightarrow{p_2} B_2}_{\text{абелевы группы}} \xrightarrow{\partial_1} \underbrace{F_1 \xrightarrow{i_1} E_1 \xrightarrow{p_1} B_1}_{\text{неабелевы группы}} \xrightarrow{\partial_0} \underbrace{F_0 \xrightarrow{i_0} E_0 \xrightarrow{p_0} B_0}_{\text{пунктированные множества}},$$

причем для любого $n \geq 1$ мультипликативно записанные группы F_1, E_1, B_1 действуют соответственно в группах F_n, E_n, B_n (при $n=1$ — посредством внутренних автоморфизмов).

Следуя Рохлину и Фуксу, мы будем говорить, что такого рода последовательность (1) является Π -последовательностью, если, кроме того, группа E_1 действует в группе F_n , а группа B_1 — в множестве F_0 (вообще говоря, непунктированными отображениями), причем:

а) гомоморфизм p_n при $n \geq 2$ является p_1 -гомоморфизмом;

б) гомоморфизм i_n при $n \geq 1$ является E_1 -гомоморфизмом;

в) гомоморфизм ∂_n при $n=0$ является B_1 -гомоморфизмом (по отношению к действию группы B_1 в себе посредством левых сдвигов), а при $n \geq 1$ является E_1 -гомоморфизмом по отношению к действию группы E_1 на группе B_{n+1} , индуцированному посредством гомоморфизма p_n данным действием группы B_1 ;

г) действие группы F_1 на группе F_n индуцируется посредством гомоморфизма i_1 данным действием группы E_1 .

Для такой последовательности *точность в члене F_0* мы будем понимать в более сильном смысле. Именно, мы будем требовать, чтобы прообразы элементов множества E_0 при отображении i_0 совпадали с орбитами действия группы B_1 в множестве F_0 .

Предложение 1. *Гомотопическая последовательность*

$$\dots \rightarrow \pi_{n+1}B \xrightarrow{\partial} \pi_n F \xrightarrow{i_*} \pi_n E \xrightarrow{p_*} \pi_n B \rightarrow \dots$$

произвольного пунктированного расслоения $p: E \rightarrow B$ является точной II-последовательностью.

Поскольку для гомотопической последовательности условие а) является не чем иным, как свойством функториальности действия $R: \pi_1 X \rightarrow \text{Aut } \pi_n X$ применительно к отображению $p: E \rightarrow B$, для доказательства предложения 1 нам нужно построить действие группы $\pi_1 E$ в группе $\pi_n F$ (и группы $\pi_1 B$ в множестве $\pi_n F$) и проверить условия б), в) и г) (а также точность в члене $\pi_0 F$).

В построении этого действия (так же как, кстати сказать, и в построении действия $R: \pi_1 X \rightarrow \text{Aut } \pi_n X$) из свойств пары (S^n, s_0) используется только невырожденность точки s_0 . Поэтому вместо группы $\pi_n F$ мы рассмотрим общий случай множества вида $[X, F]^*$, где X — произвольное гладко пунктированное пространство, и построим действие группы $\pi_1 E$ на этом множестве, сохраняющее групповую структуру, когда X является H -когруппой, и такое, что

1) индуцированное вложением $i: F \rightarrow E$ отображение

$$[X, F]^* \rightarrow [X, E]^*$$

является $\pi_1 E$ -гомоморфизмом (при $X = S^n$ это даст нам свойство б));

2) индуцированное этим действием посредством гомоморфизма $i_*: \pi_1 F \rightarrow \pi_1 E$ действие группы $\pi_1 F$ на множестве $[X, F]^*$ совпадает с каноническим действием из предложения 2 лекции 4 (при $X = S^n$ это даст нам свойство г)).

Чтобы построить это действие, мы заметим, что любая петля $u \in \Omega E$ определяет по формуле

$$G(x, t) = (p \circ u)(t), \quad x \in X, \quad t \in I,$$

такую гомотопию $G: X \times I \rightarrow B$, что для каждого отоб-

ражения $f: X \rightarrow F$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\{x_0\}} & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ \tilde{g}_0 \downarrow & \nearrow & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

где $\widetilde{\{x_0\}} = (X \times 0) \cup (\{x_0\} \times I)$, а $\tilde{g}$ — отображение, заданное формулой

$$\tilde{g}(x, t) = \begin{cases} (i \circ f)(x), & \text{если } t=0, \\ u(t), & \text{если } x=x_0, \end{cases} \quad (x, t) \in \widetilde{\{x_0\}}.$$

Соответствующая накрывающая гомотопия $\bar{G}: X \times I \rightarrow E$ (существующая по аксиоме РНГ) обладает тем свойством, что $\bar{G}(x, 1) \in F$ для любой точки $x \in X$ (и $G(x_0, 1) = e_0$). Поэтому, положив

$$\hat{f}(x) = \bar{G}(x, 1), \quad x \in X,$$

мы получим некоторое пунктированное отображение $\hat{f}: X \rightarrow F$, и очевидно, что если формула $\xi\alpha = [\hat{f}]^*$, где $\xi = [u]^*$, а $\alpha = [f]^*$, корректно определяет отображение $(\xi, \alpha) \mapsto \xi\alpha$, то это отображение будет действием группы $\pi_1 E$ в группе $[X, F]^*$, обладающим свойствами 1) и 2).

Поэтому нам нужно только проверить корректность этой конструкции, т. е. показать, что если $u \sim u_1 \text{ rel } \{0, 1\}$ и $f \sim f_1$, то $\hat{f} \sim \hat{f}_1$. С этой целью, введя в рассмотрение соответствующие гомотопии $u_\tau: I \rightarrow E \text{ rel } \{0, 1\}$ и $f_\tau: (X, x_0) \rightarrow (E, e_0)$, мы определим отображение $\bar{h}: \bar{X}_{\text{pt}} \rightarrow E$ в пространстве E подпространства

$$\bar{X}_{\text{pt}} = (X \times I) \times 0 \cup ((X \times 0) \cup (\{x_0\} \times I) \cup (X \times 1)) \times I$$

пространства $(X \times I) \times I$, положив

$$\bar{h}(x, \tau, t) = \begin{cases} f_\tau(x), & \text{если } t=0, \\ \bar{G}(x, t), & \text{если } \tau=0, \\ \bar{G}_1(x, t), & \text{если } \tau=1, \\ u_\tau(t), & \text{если } x=x_0, \end{cases}$$

где $\bar{G}_1$ — гомотопия $\bar{G}$, построенная для отображения f_1 и пути u_1 . Ясно, что отображение $\bar{h}$ накрывает над $\bar{X}_{\text{pt}}$ гомотопию $H: X \times I \times I \rightarrow B$, определенную формулой

$$H(x, \tau, t) = (p \circ u_\tau)(t), \quad (x, \tau, t) \in X \times I \times I.$$

Следовательно, это отображение распространяется до накрывающей гомотопии $\bar{H}: X \times I \times I \rightarrow E$, и отображение

$$\bar{H} \circ \sigma_1: (x, \tau) \mapsto \bar{H}(x, \tau, 1), \quad (x, \tau) \in X \times I,$$

будет, очевидно, пунктированной гомотопией, связывающей отображение $\hat{f}$ с отображением $\hat{g}$. $\square$

Замечание 1. Ясно, что аналогичная конструкция проходит для любых путей в E (а не только петель). В результате на пространстве E возникает ансамбль, группой (или пунктированным множеством) которого в точке $e \in E$ является группа $[(X, x_0), (F_b, e)]$, где $b = p(e)$, а $F_b = p^{-1}(b)$ — слой над точкой b расслоения $p: E \rightarrow B$ (которое теперь уже нет нужды предполагать пунктированным). В частности, мы тем самым для любого расслоения $p: E \rightarrow B$ (и каждого $n \geq 0$) получаем на пространстве E ансамбль гомотопических групп слоев $\{\pi_n(F_b, e)\}$ (при $n=0$ являющийся ансамблем пунктированных множеств).

Замечание 2. При интерпретации элементов группы $\pi_n F$ как гомотопических классов отображений $(I^n, \dot{I}^n) \rightarrow (F, e_0)$ элемент $\xi \alpha \in \pi_n F$ задается отображением $b: (I^n, \dot{I}^n) \rightarrow (F, e_0)$, связанным с отображением $a: (I^n, \dot{I}^n) \rightarrow (F, e_0)$, задающим элемент $\alpha \in \pi_n F$, и петлей $u: (I, \dot{I}) \rightarrow (E, e_0)$, задающей элемент $\xi \in \pi_1 E$, таким отображением $G: I^{n+1} \rightarrow E$, что

$$(p \circ G)(t, t) = (p \circ u)(t) \text{ для любой точки } (t, t) \in I^{n+1}, \\ G(t, 0) = a(t), \quad G(t, 1) = b(t) \text{ для любой точки } t \in I^n.$$

Аналогичное замечание справедливо, конечно, и по отношению к действию морфизмов группоиды ΠE на группах $\pi_n(F_b, e)$ ансамбля гомотопических групп слоев расслоения $p: E \rightarrow B$.

Теперь мы можем перейти непосредственно к доказательству предложения 1.

Доказательство предложения 1. Нам осталось проверить условие в) и построить действие группы $\pi_1 B$ в множестве $\pi_0 F$ (а также доказать точность в члене $\pi_0 F$).

В первую очередь мы проверим условие в) при $n \geq 1$, т. е. покажем, что для любых элементов $\alpha \in \pi_{n+1} B$ и $\xi \in \pi_1 E$ имеет место равенство

$$\xi(\partial_n \alpha) = \partial_n(p_*(\xi)\alpha).$$

Пусть отображение $a: (I^{n+1}, \dot{I}^{n+1}) \rightarrow (B, b_0)$ задает элемент $\alpha \in \pi_n B$, а петля $u: (I, \dot{I}) \rightarrow (E, e_0)$ — элемент ξ . Пусть, далее, H — такое отображение $I^{n+1} \times I \rightarrow B$, что

$$H(t, 0) = a(t) \text{ для любой точки } t \in I^{n+1}$$

и

$$H(t, t) = (p \circ u)(t) \text{ при } t \in \dot{I}^{n+1} \text{ и } t \in I$$

(так что отображение $b: t \mapsto H(t, 1)$ задает элемент $p_*(\xi)\alpha \in \pi_{n+1} B$). В силу разложения $I^{n+1} = I^n \times I$, $t = (s, s)$, мы можем отображение H рассматривать как гомотопию $I^{n+1} \times I \rightarrow B$ с параметром s . Начальное отображение $(s, t) \mapsto H(s, 0, t)$ этой гомотопии задается формулой $(s, t) \mapsto (p \circ u)(t)$ и, следовательно, покрывается отображением $(s, t) \mapsto u(t)$. Кроме того, если $s \in \dot{I}^n$ или $s = 0$, а $t = 0$ или $t = 1$, то гомотопия H покрывается постоянным отображением const_{e_0} . Следовательно, согласно аксиоме РНГ, существует такая гомотопия

$$\bar{H}: I^{n+1} \times I \rightarrow E, \quad (s, s, t) \mapsto \bar{H}(s, s, t),$$

что

$$\begin{aligned} \bar{H}(s, s, t) &= e_0, \text{ если } s \in \dot{I}^n \text{ или } s = 0, \text{ а } t = 0 \text{ или } t = 1, \\ H(s, 0, t) &= u(t) \text{ для любых точек } s \in I^n, t \in I, \\ (p \circ \bar{H})(s, s, t) &= H(t, t) \text{ для любой точки } (s, s, t) \in \\ &\quad \in I^n \times I \times I, \text{ где } t = (s, s). \end{aligned}$$

Положив $\bar{a}(s, s) = \bar{H}(s, s, 0)$, мы получим такую гомотопию $\bar{a}: I^n \times I \rightarrow E$, неподвижную на $\dot{I}^n$, что $\bar{a}(s, 0) = e_0$ и $p \circ \bar{a} = a$. Следовательно, отображение $c: s \mapsto \bar{a}(s, 1) = \bar{H}(s, 1, 0)$, рассматриваемое как отображение $(I^n, \dot{I}^n) \rightarrow (E, e_0)$, задает элемент $\partial_n \alpha \in \pi_n F$.

Аналогично, положив $\bar{b}(s, s) = \bar{H}(s, s, 1)$, мы получим такую неподвижную на $\dot{I}^n$ гомотопию $\bar{b}: I^n \times I \rightarrow E$, что $\bar{b}(s, 0) = e_0$ и $p \circ \bar{b} = b$. Следовательно, отображение $c_1: s \mapsto \bar{b}(s, 1) = \bar{H}(s, 1, 1)$, рассматриваемое как отображение $(I^n, \dot{I}^n) \rightarrow (F, e_0)$, задает элемент $\partial_n(p_*(\xi)\alpha)$.

С другой стороны, отображение $G: (s, t) \mapsto \bar{H}(s, 1, t)$ удовлетворяет, очевидно, соотношениям

$$(p \circ G)(s, t) = (p \circ u)(t)$$

для любой точки $(s, t) \in I^n \times I = I^{n+1}$,

$$G(s, 0) = c(s), \quad G(s, 1) = c_1(s) \quad \text{для любой точки } s \in I^n.$$

Поэтому отображение $c_1: (I^n, j^n) \rightarrow (F, e_0)$ задает элемент $\xi(\partial_n \alpha)$.

Следовательно,

$$\xi(\partial_n \alpha) = \partial_n(p_*(\xi)\alpha).$$

Построим теперь действие группы $\pi_1 B$ на множестве $\pi_0 F$.

Пусть $\xi \in \pi_1 B$ и $\alpha \in \pi_0 F$. Выбрав для произвольной петли $u: (I, j) \rightarrow (B, b_0)$ класса ξ накрывающий эту петлю путь $\bar{u}: I \rightarrow E$, начинающийся в некоторой точке e_α компоненты α , рассмотрим точку $u(1) \in F$. Автоматическая проверка показывает, что компонента $\xi\alpha$ этой точки зависит только от ξ и α (проще всего это увидеть, если заметить, что $\xi\alpha$ является не чем иным, как образом элемента ξ при отображении $\partial_0: \pi_1(B, b_0) \rightarrow \pi_0(F, e_\alpha)$) и что отображение $(\xi, \alpha) \mapsto \xi\alpha$ является действием группы $\pi_1 B$ на множестве $\pi_0 F$. При этом ясно, что для любых элементов $\xi, \eta \in \pi_1 B$ имеет место равенство

$$\partial_0(\xi\eta) = \xi(\partial_0\eta),$$

означающее, что условие в) выполнено и при $n=0$.

Таким образом, для завершения доказательства предложения 1 нам осталось лишь проверить точность в члене $\pi_0 F$, т. е. показать, что для элементов $\alpha, \beta \in \pi_0 F$ равенство $i_*\alpha = i_*\beta$ имеет место тогда и только тогда, когда существует такой элемент $\xi \in \pi_1 B$, что $\xi\alpha = \beta$. Но равенство $\xi\alpha = \beta$ означает, что петля, задающая элемент ξ , накрывается путем, начинающимся в компоненте α и кончающимся в компоненте β , а равенство $i_*\alpha = i_*\beta$ означает, что компоненты α и β слоя F лежат в одной компоненте пространства E , т. е. что в E существует путь, начинающийся в компоненте α и кончающийся в компоненте β . Поскольку любой такой путь является накрытием некоторой петли (а именно, своей проекции в B), равенства $\xi\alpha = \beta$ и $i_*\alpha = i_*\beta$ действительно равносильны.

Тем самым предложение 1 полностью доказано. $\square$

Замечание 3. Аналогичным образом можно для любого $n \geq 1$ построить действие группы $\pi_1 B$ на множестве $[S^n, F]$ свободных гомотопических классов отображений $S^n \rightarrow F$. Тем самым в случае, когда слой F гомотопически прост в размерности n и, значит, множество $[S^n, F]$ является группой $\pi_n F$, мы получаем действие группы $\pi_1 B$ на группе $\pi_n F$ (а для непунктированного

расслоения $p: E \rightarrow B$ ансамбль $\{\pi_n F_b\}$ групп $\pi_n F_b$ на пространстве B).

В лекции 4 мы уже имели случай ввести категорию пар TOP_2 , объектами которой являются пары (X, A) топологических пространств, а морфизмами $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ — такие отображения $f: X \rightarrow Y$, что $f(A) \subseteq B$.

Аналогичным образом для любого $n \geq 2$ вводится категория n -ок TOP_n , объекты которой имеют вид $(X, A_1, \dots, A_{n-1})$, где $X \supset A_1 \supset \dots \supset A_{n-1}$, но эти категории, в отличие от категории TOP_2 , будут играть у нас чисто служебную роль.

Категория TOP' пунктированных пространств является, очевидно, полной подкатегорией категории TOP_2 .

Пунктированной парой называется тройка вида (X, A, x_0) , где x_0 — точка подпространства A (называемая *отмеченной точкой пары*). Полная подкатегория категории TOP_2 , порожденная пунктированными парами, обозначается символом TOP'_2 , а ее морфизмы называются пунктированными отображениями пунктированных пар.

Имеются два очевидных функтора из категории TOP_2 (или категории TOP'_2) в категорию TOP (соответственно в категорию TOP'). Первый функтор каждой паре (X, A) сопоставляет пространство X и каждому отображению $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ — его само, но рассматриваемое просто как отображение $X \rightarrow Y$, а второй функтор паре (X, A) сопоставляет пространство A , а отображению $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ — индуцированное им отображение $A \rightarrow B$ (которое мы часто будем обозначать тем же символом f).

Гомотопия $f_t: X \rightarrow Y$ называется *гомотопией отображений пар* (или *гомотопией в TOP_2*), если $f_t(X, A) \rightarrow (Y, B)$ для любого $t \in I$. (Гомотопии отображений пар не следует путать с более узким понятием гомотопий относительно A .) Аналогично определяются *пунктированные гомотопии* отображений пар.

Ясно, что тем самым категория TOP_2 (категория TOP'_2) оказывается категорией с гомотопиями в смысле, введенном в лекции 0. Поэтому в ней имеют смысл все обычные гомотопические понятия: гомотопические эквивалентности, деформационные ретракции, гомотопически инвариантные функторы и т. п.

Примером пунктированной пары является пара (E^n, S^{n-1}, s_0) , состоящая из n -мерного ($n \geq 1$) шара E^n , его граничной сферы S^{n-1} и точки $s_0 \in S^{n-1}$.

Определение 1. Для любой пунктированной пары (X, A, x_0) символом $\pi_n(X, A, x_0)$ или просто $\pi_n(X, A)$ обозначается множество

$$[(E^n, S^{n-1}, s_0), (X, A, x_0)] = [(E^n, S^{n-1}), (X, A)]^*$$

гомотопических классов пунктированных отображений $(E^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$.

Это множество мы будем считать пунктированным множеством, отмеченной точкой которого является класс постоянного отображения $\text{const}: E^n \rightarrow X, a \mapsto x_0$ (очевидно, представляющего собой отображение $(E^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$).

Введем теперь в рассмотрение тройку $(I^n, \dot{I}^n, J^{n-1})$, $n \geq 1$, где:

I^n , как всегда, — единичный n -мерный куб, состоящий из точек $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, для которых $0 \leq t_i \leq 1$ при каждом $i = 1, \dots, n$;

$\dot{I}^n$ — его граница, состоящая из точек $t \in I^n$, для каждой из которых существует такой индекс $i = 1, \dots, n$, что либо $t_i = 0$, либо $t_i = 1$;

J^{n-1} — дополнение в границе $\dot{I}^n$ куба внутренности его $(n-1)$ -мерной грани I^{n-1} , определяемой уравнением



Рис. 18.

$t_n = 0$, т. е. множество всех точек $t \in I^n$, для каждой из которых существует такой индекс $i = 1, \dots, n$, что либо $i < n$ и $t_i = 0$, либо $t_i = 1$. См. рис. 18.

Ясно, что пространство J^{n-1} стягиваемо в точку 0. Так как пары $(I^n, \dot{I}^n)$ и $(\dot{I}^n, J^{n-1})$ являются, очевидно, парами Борсука, то соответствующая деформация продолжается до гомотопии тройки $(I^n, \dot{I}^n, J^{n-1})$ в себя, связывающей тождественное отображение этой тройки с отображением, переводящим J^{n-1} в точку 0. Это озна-

чает, что подтройка $(I^n, \dot{I}^n, 0)$ тройки $(I^n, \dot{I}^n, J^{n-1})$ является ее деформационным ретрактом и, значит, ей гомотопически эквивалентна. Поскольку тройка $(I^n, \dot{I}^n, 0)$ (являющаяся пунктированной парой) гомеоморфна, очевидно, пунктированной паре (E^n, S^{n-1}, s_0) , то, выбрав и зафиксировав некоторый гомеоморфизм этих пар, мы можем считать, что

$$(2) \quad \pi_n(X, A, x_0) = [(I^n, \dot{I}^n, J^{n-1}), (X, A, x_0)],$$

т. е. что

$$\pi_n(X, A, x_0) = \pi_0 \Omega^n(X, A, x_0),$$

где

$$\Omega^n(X, A, x_0) = (X, A, x_0)^{(I^n, \dot{I}^n, J^{n-1})} \subset X^{I^n}.$$

Теперь мы можем забыть о паре (E^n, S^{n-1}, s_0) и принять формулу (2) за определение множества $\pi_n(X, A, x_0)$.

Определение (2) имеет то преимущество, что при $n \geq 2$ для любых двух отображений

$$a, b: (I^n, \dot{I}^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$$

формула (5) лекции 5 корректно определяет отображение

$$a + b: (I^n, \dot{I}^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0),$$

причем, как непосредственно проверяется, формула

$$[a] + [b] = [a + b]$$

определяет в множестве $\pi_n(X, A, x_0)$ операцию сложения, относительно которой оно является группой.

Впрочем, как и в случае групп $\pi_n X$, этих — довольно утомительных — проверок можно избежать, заметив, что в силу экспоненциального закона пространство $\Omega^n(X, A, x_0)$ при $n \geq 2$ естественно гомеоморфно пространству петель $\Omega \Omega^{n-1}(X, A, x_0)$ и, значит,

$$\pi_n(X, A, x_0) = \pi_1 \Omega^{n-1}(X, A, x_0).$$

Вообще,

$$(3) \quad \pi_n(X, A, x_0) = \pi_k \Omega^{n-k}(X, A, x_0) \text{ для любого } k=0, 1, \dots, n-1.$$

Группа $\pi_n(X, A, x_0)$ называется *n-мерной гомотопической группой пунктированной пары* (X, A, x_0) (или *n-мерной гомотопической группой пространства X относительно подпространства A*; Впрочем, последний термин постепенно выходит ныне из употребления).

Очевидно, что при $A = \{x_0\}$

$$\pi_n(X, \{x_0\}, x_0) = \pi_n(X, x_0).$$

В этом смысле «относительные» гомотопические группы $\pi_n(X, A, x_0)$ являются обобщением «абсолютных» групп $\pi_n(X, x_0)$.

Формула (3) при $k=2$ показывает, что при $n \geq 3$ группа $\pi_n(X, A, x_0)$ абелева.

Группа же $\pi_2(X, A, x_0)$, вообще говоря, неабелева (тем не менее, в отличие от группы $\pi_1(X, x_0)$, для обозначения операции в группе $\pi_2(X, A, x_0)$ мультипликативной записью мы пользоваться не будем), а «группа» $\pi_1(X, A, x_0)$ является лишь пунктированным множеством.

При $n=0$ группа $\pi_0(X, A, x_0)$ не определяется. Впрочем, для единства формулировок мы иногда будем тот факт, что каждая компонента пространства X содержит хотя бы одну компоненту пространства A , выражать формулой $\pi_0(X, A, x_0) = 0$.

Ясно, что соответствие $(X, A, x_0) \mapsto \pi_n(X, A, x_0)$, $n \geq 1$, представляет собой гомотопически инвариантный функтор из категории TOP_2^* в категорию AB-GROUPS абелевых групп при $n \geq 3$, в категорию GROUPS групп при $n=2$ и в категорию ENS^* пунктированных множеств при $n=1$.

При этом, если X_0 и A_0 — компоненты пространств X и A , содержащие точку x_0 , то вложение $(X_0, A_0, x_0) \rightarrow (X, A, x_0)$ индуцирует при $n \geq 2$ изоморфизм группы $\pi_n(X_0, A_0, x_0)$ на группу $\pi_n(X, A, x_0)$. Поэтому без особого ограничения общности мы можем предполагать пару (X, A) связной, т. е. состоящей из связного пространства X и его связного подпространства A .

Согласно формуле (3) при $k=n-1$

$$\pi_n(X, A, x_0) = \pi_{n-1}\Omega(X, A),$$

где $\Omega(X, A) = \Omega^1(X, A, x_0)$ — уже знакомое нам по лекции 1 пространство $P(X, A, x_0)$ всех путей в X , начинающихся в подпространстве A и кончающихся в точке x_0 , т. е. слой $\omega_1^{-1}(x_0)$ расслоения

$$(4) \quad \omega_1: P(X, A) \rightarrow X, u \mapsto u(1),$$

где $P(X, A)$ — пространство всех путей $u: I \rightarrow X$, начинающихся в подпространстве A . Это пространство является не чем иным, как коцилиндром вложения $i: A \rightarrow X$, и потому, согласно лемме 6 лекции 2 (которая, правда,

относится к обращенным коцилиндрам), пространство $P(X, A)$ гомотопически эквивалентно подпространству A . (Впрочем, взаимно обратные гомотопические эквивалентности $P(X, A) \rightarrow A$ и $A \rightarrow P(X, A)$ легко указать и непосредственно: ими будут отображение $\omega_0: P(X, A) \rightarrow A$, $u \mapsto u(0)$, и отображение $\sigma: A \rightarrow P(X, A)$, $a \mapsto 0_a$; ясно, что $\omega_0 \circ \sigma = \text{id}$, а $\sigma \circ \omega_0 \sim \text{id}$ посредством гомотопии $u \mapsto u_t$, где $u_t(\tau) = u(t\tau)$, $\tau \in I$.) Значит, для любого $n \geq 0$ группа $\pi_n P(X, A)$ изоморфна группе $\pi_n A$.

Пользуясь этим изоморфизмом (и равенством (3) с $k = n-1$) мы из гомотопической последовательности расслоения (4) получим точную Π -последовательность

$$(5) \quad \dots \xrightarrow{i_*} \pi_{n+1} X \xrightarrow{j_*} \pi_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial} \pi_n A \xrightarrow{i_*} \pi_n X \rightarrow \dots,$$

правый конец которой имеет вид

$$\begin{array}{ccccccc} \dots \rightarrow \pi_3(X, A) & \xrightarrow{\partial} & \pi_2 A & \xrightarrow{i_*} & \pi_2 X & \xrightarrow{j_*} & \pi_2(X, A) \xrightarrow{\partial} \pi_1 A \xrightarrow{i_*} \pi_1 X \rightarrow \\ & \underbrace{\hspace{10em}} & & & & \underbrace{\hspace{10em}} & \\ & \text{абелевы группы} & & & & \text{неабелевы группы} & \\ & & & & & \xrightarrow{i_*} \pi_1(X, A) \xrightarrow{\partial} \pi_0 A \xrightarrow{i_*} \pi_0 X, & \\ & & & & & \underbrace{\hspace{10em}} & \\ & & & & & \text{пунктированные множества} & \end{array}$$

и которая называется *гомотопической последовательностью пары* (X, A) .

Замечание 4. Подобно гомотопической последовательности расслоения гомотопическая последовательность пары является в силу замечания 5 из Дополнения к лекции 5 частным случаем последовательности Пуппе.

Непосредственное сравнение определений показывает, что в последовательности (5):

гомоморфизмы i_* и j_* индуцированы вложениями $i: A \rightarrow X$ и $j: (A, x_0) \rightarrow (X, A)$ (т. е. точнее, отображениями $i: (A, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ и $j: (A, x_0, x_0) \rightarrow (X, A, x_0)$); гомоморфизм ∂ индуцирован отображением $\Omega^n(X, A) \rightarrow \Omega^{n-1} A$, сопоставляющим каждому отображению $(I^n, I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$ его ограничение на грани I^{n-1} (в интерпретации элементов группы $\pi_n(X, A)$ как пунктированных отображений $(E^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, A)$ гомоморфизм ∂ задается ограничением этих отображений на сфере S^{n-1});

действие группы $\pi_1 A$ в группе $\pi_n(X, A)$, $n \geq 1$, сопоставляет элементу α группы $\pi_n(X, A)$, задаваемому

отображением $(I^n, \dot{I}^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$, и элементу ξ группы $\pi_1 A$, задаваемому петлей $u: (I, \dot{I}) \rightarrow (A, x_0)$, элемент группы $\pi_n(X, A)$, задаваемый отображением $b: (I^n, \dot{I}^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$, для которого существует такая гомотопия $G: I^n \times I \rightarrow X$ отображений пар $(I^n, \dot{I}^n) \rightarrow (X, A)$, что

$$G(t, t) = u(1-t), \text{ если } t \in J^{n-1}, t \in I,$$

и

$$G(t, 0) = a(t), \quad G(t, 1) = b(t) \text{ для любой точки } t \in I^n;$$

действие группы $\pi_1 X$ в множестве $\pi_1(X, A)$ сопоставляет элементу $\alpha = [a] \in \pi_1(X, A)$, где a — путь $(I, 0) \rightarrow (X, x_0)$, начинающийся в A , и элементу $\xi = [u] \in \pi_1 X$, где u — петля $(I, \dot{I}) \rightarrow (X, x_0)$, элемент $\xi\alpha \in \pi_1(X, A)$, задаваемый путем au' , где $u': t \mapsto u(1-t)$.

(Согласно общему определению П-последовательностей нам нужны еще действие группы $\pi_1 X$ в группах $\pi_n X$ и действие группы $\pi_2(X, A)$ в группах $\pi_n(X, A)$; но ясно, что первое действие является обычным действием $R: \pi_1 X \rightarrow \text{Aut } \pi_n X$, а второе можно отдельно не рассматривать, поскольку при $n=2$ оно является действием внутренними автоморфизмами, а при $n>2$ в силу условия г) индуцируется посредством гомоморфизма $\partial: \pi_2(X, A) \rightarrow \pi_1 A$ из действия группы $\pi_1 A$. При этом в случае $n=2$ условие г) сводится к формуле

$$(6) \quad (\partial\alpha)\beta = \alpha + \beta - \alpha,$$

которая должна иметь место для любых элементов $\alpha, \beta \in \pi_2(X, A)$.)

Тем самым мы получаем прямую конструкцию последовательности (5), не опирающуюся на расслоение (4). Конечно, при таком подходе точность этой последовательности и тот факт, что она является П-последовательностью, нуждаются в независимой проверке. Читателю настоятельно рекомендуется проделать эту проверку со всей детальностью (особое внимание нужно при этом уделить формуле (6), прямое доказательство которой несколько кропотливо).

Подчеркнем, что, таким образом, группа $\pi_n(X, A)$ при $n \geq 3$ является $\pi_1 A$ -модулем.

Для единства терминологии мы будем называть $\pi_1 A$ -модулем также и группу $\pi_2(X, A)$, хотя эта группа и

неабелева. Когда нам понадобится подчеркнуть исключительный характер этой группы, мы будем называть ее *скрещенным $\pi_1 A$ -модулем*. (Вообще, аддитивно записанная группа G , в которой действует мультипликативная группа Π , называется *скрещенным Π -модулем*, если задан такой гомоморфизм $\delta: G \rightarrow \Pi$, что для любых элементов $\alpha, \beta \in G$ имеет место соотношение (6).)

Конечно, вместо действия группы $\pi_1 A$ на группе $\pi_n(X, A)$ можно рассматривать на A соответствующий ансамбль $\{\pi_n(X, A, a), a \in A\}$.

Очевидное, обобщение доказательства предложения 2 лекции 4 показывает, что отображения $(I^n, \dot{I}^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$ (или отображения $(E^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$) тогда и только тогда *свободно гомотопны*, т. е. гомотопны как отображения $(I^n, \dot{I}^n) \rightarrow (X, A)$ (отображения $(E^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, A)$), когда они принадлежат одной орбите действия группы $\pi_1 A$. В частности, так как действие группы $\pi_1 A$ сохраняет групповую структуру на $\pi_n(X, A)$, $n \geq 2$, отсюда следует, что при $n \geq 2$ отображение $(E^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$ тогда и только тогда задает нулевой элемент группы $\pi_n(X, A)$, когда оно свободно гомотопно постоянному отображению.

С другой стороны, для того чтобы отображение $(E^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, A)$ было свободно гомотопно постоянному отображению, достаточно (и, конечно, необходимо), чтобы оно было гомотопно такому отображению $f: (E^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, A)$, что $f(E^n) \subset A$, поскольку любое такое отображение связано с постоянным отображением гомотопией $x \mapsto f(tx)$, $x \in E^n$, $t \in I$, являющейся (в силу условия $f(E^n) \subset A$) гомотопией в категории TOP_2 .

Называя отображения $f: (E^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, A)$, для которых $f(E^n) \subset A$, *стянутыми в A отображениями*, мы получаем, следовательно, что при $n \geq 2$ отображение $(E^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$ тогда и только тогда задает нулевой элемент группы $\pi_n(X, A)$, когда оно свободно гомотопно стянутому на A отображению.

Ясно, что этот вывод справедлив и при $n = 1$.

Интересно, что свободную гомотопию здесь можно заменить гомотопией относительно S^{n-1} , т. е. отображение $f: (E^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$ тогда и только тогда свободно гомотопно стянутому отображению, когда оно гомотопно такому отображению относительно S^{n-1} . Действительно, любой гомотопии $f_t: (E^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow$

$\rightarrow (X, A, x_0)$, для которой $f_0 = f$ и $f_1(E^n) \subset A$, мы можем сопоставить неподвижную на S^{n-1} гомотопию $g_t: E^n \rightarrow X$, для которой $g_0 = f$ и $g_1(E^n) \subset A$, положив

$$g_t(x) = (F \circ \varphi)(x, t), \quad x \in E^n, \quad t \in I,$$

где $F: E^n \times I \rightarrow X$ — отображение $(x, t) \mapsto f_t(x)$, а φ — такое отображение $E^n \times I \rightarrow E^n \times I$, что $\varphi(x, t) = (x, 0)$, если $t = 0$ или $x \in S^{n-1}$, и $\varphi(x, 1) \in (S^{n-1} \times I) \cup (E^n \times I)$ для любой точки $x \in E^n$. (Например, можно считать, что

$$\varphi(x, t) = \begin{cases} \left(\frac{2}{2-t} x, t \right), & 0 \leq t \leq \min(2(1-|x|), 1), \\ \left(\frac{x}{|x|}, \frac{4(1-|x|)t^2}{t^2 + 4(1-|x|)^2} \right), & \text{если } 2(1-|x|) \leq t \leq 1, \end{cases}$$

где $(x, t) \in E^n \times I$.) $\square$

В частности, мы видим, что равенство $\pi_n(X, A) = 0$ равносильно тому, что любое отображение $(E, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$ гомотопно (свободно или относительно S^{n-1}) стянутому отображению.

По аналогии с абсолютным случаем (см. определение 4 лекции 5) мы будем говорить, что пара (X, A) *асферична* в размерности $n \geq 0$, если $\pi_n(X, A, x_0) = 0$ при любом выборе точки $x_0 \in A$. В этом случае мы будем писать $\pi_n(X, A) = 0$.

Асферичность в размерности 0 (равенство $\pi_0(X, A) = 0$) означает, что любая компонента пространства X пересекается с подпространством A . Если X связно, то это условие всегда выполнено.

Асферичность в размерности $n \geq 1$ (равенство $\pi_n(X, A) = 0$) означает, что каждое отображение $(E^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, A)$ гомотопно (свободно или относительно S^{n-1}) стянутому отображению.

В частности, для асферичности в размерности 1 необходимо, чтобы любая компонента пространства X содержала не более одной компоненты подпространства A . Если A связно, то это условие выполнено.

Пара (X, A) называется *n-связной*, если она асферична во всех размерностях $\leq n$. В частности, если $n \geq 1$, то для *n-связности* пары (X, A) необходимо, чтобы каждая компонента пространства X содержала одну и только одну компоненту подпространства A . Если пара (X, A) связна, то это условие автоматически выполнено.

Если для связной пары (X, A) действие группы $\pi_1(A, x_0)$ в группе $\pi_n(X, A, x_0)$, $n \geq 2$, тривиально, то пара (X, A) называется *гомотопически простой в размерности n* . В этом случае определена группа $\pi_n(X, A)$, элементами которой являются свободные гомотопические классы отображений $(I^n, I^n) \rightarrow (X, A)$ (или $(E^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, A)$), которая для любой точки $x_0 \in A$ естественно изоморфна группе $\pi_n(X, A, x_0)$. При этом группа $\pi_1 X$ естественным образом действует на группе $\pi_n(X, A)$ (причем при $A = \{x_0\}$ это действие является стандартным действием группы $\pi_1 X$ на группе $\pi_n(X, x_0) = \pi_n X$). Для доказательства достаточно применить к расслоению (4) замечание 3.

Заметим, что, как непосредственно вытекает из формулы (6), если пара (X, A) гомотопически проста в размерности 2, то группа $\pi_2(X, A)$ абелева. В частности, группа $\pi_2(X, A)$ абелева, если пространство A односвязно.

Полезно также иметь в виду, что если пространство A связно и односвязно, то отображение $\pi_1 X \rightarrow \pi_1(X, A)$ биективно, и потому умножение в группе $\pi_1 X$ переносится в множество $\pi_1(X, A)$. Таким образом, если пространство A связно и односвязно, то множество $\pi_1(X, A)$ является группой.

Из определений непосредственно вытекает также, что для любого пунктированного отображения $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ и любого $n \geq 1$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(X, A) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}A \\ f_* \downarrow & & \downarrow f_* \\ \pi_n(Y, B) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}B \end{array}$$

На языке теории категорий это означает, что гомоморфизм $\partial: \pi_n(X, A) \rightarrow \pi_{n-1}A$ представляет собой естественное преобразование (морфизм) функтора $\pi_n: \text{TOP}_2^* \rightarrow \text{AB-GROUPS}$ в функтор

$$\pi_{n-1} \circ \alpha: \text{TOP}_2^* \xrightarrow{\alpha} \text{TOP}^* \xrightarrow{\pi_{n-1}} \text{AB-GROUPS},$$

где α — функтор $(X, A) \mapsto A$.

Это замечание позволяет сформулировать для относительных гомотопических групп аксиомы, аналогичные аксиомам 1°—3° лекции 5 для абсолютных групп (только, например, аксиома точности формулируется теперь для пар) и, по существу то же самое, индуктивное рассуждение показывает, что с точностью до изоморфизма (а для

неабелевых групп с точностью до антиизоморфизма) эти аксиомы однозначно характеризуют группы π_n .

В работе с точными последовательностями групп неожиданно широкие применения имеет следующая простая лемма, известная как лемма о пяти гомоморфизмах.

Лемма 1. Если в коммутативной диаграмме

$$(7) \quad \begin{array}{ccccccccc} A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & A_4 & \xrightarrow{\alpha_4} & A_5 \\ \varphi_1 \downarrow & & \beta_1 \downarrow & & \varphi_2 \downarrow & & \beta_2 \downarrow & & \varphi_3 \downarrow \\ B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & B_3 & \xrightarrow{\beta_3} & B_4 & \xrightarrow{\beta_4} & B_5 \end{array}$$

с точными строками гомоморфизмы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4, \varphi_5$ являются изоморфизмами, то гомоморфизм φ_3 также представляет собой изоморфизм.

Доказательство. Пусть $\varphi_2(a_3) = 0$, где $a_3 \in A_3$. Тогда $\beta_3(\varphi_2(a_3)) = 0$, и потому $\varphi_4(\alpha_3(a_3)) = 0$, т. е. $\alpha_3(a_3) = 0$. Следовательно, существует такой элемент $a_2 \in A_2$, что $\alpha_2(a_2) = a_3$. Но тогда $\beta_2(\varphi_2(a_2)) = \varphi_3(\alpha_2(a_2)) = \varphi_3(a_3) = 0$, и потому существует такой элемент $b_1 \in B_1$, что $\beta_1(b_1) = \varphi_2(a_2)$. Так как φ_1 — изоморфизм, то существует такой элемент $a_1 \in A_1$, что $b_1 = \varphi_1(a_1)$. Тогда $\varphi_1(\alpha_1(a_1)) = \beta_1(\varphi_1(a_1)) = \beta_1(b_1) = \varphi_2(a_2)$, и, значит, $\alpha_1(a_1) = a_2$. Поэтому $a_3 = \alpha_2(a_2) = \alpha_2(\alpha_1(a_1)) = 0$.

Аналогично, так как φ_4 — изоморфизм, то для любого элемента $b_3 \in B_3$ существует такой элемент $a_4 \in A_4$, что $\beta_3(b_3) = \varphi_4(a_4)$, и потому $\varphi_5(\alpha_4(a_4)) = \beta_4(\varphi_4(a_4)) = \beta_4(\beta_3(b_3)) = 0$. Следовательно, $\alpha_4(a_4) = 0$, и значит, существует такой элемент $a_3 \in A_3$, что $\alpha_3(a_3) = a_4$. Но тогда $\beta_3(\varphi_3(a_3)) = \varphi_4(\alpha_3(a_3)) = \varphi_4(a_4) = \beta_3(b_3)$, и потому существует такой элемент $b_2 \in B_2$, что $\beta_2(b_2) = \varphi_3(a_3) - b_3$. Так как φ_2 — изоморфизм, то существует такой элемент $a_2 \in A_2$, что $\varphi_2(a_2) = b_2$, и потому $\varphi_3(\alpha_2(a_2)) = \beta_2(\varphi_2(a_2)) = \beta_2(b_2) = \varphi_3(a_3) - b_3$, т. е. $b_3 = \varphi_3(a_3 - \alpha_2(a_2))$. $\square$

Ход этого доказательства однозначно диктуется стрелками данной диаграммы, и его вполне можно осуществить в уме, помогая себе движением пальца по диаграмме. По-английски этот метод доказательства называется поэтому «diagram chasing», что обычно переводится как «диаграммный поиск».

Замечание 5. Из доказательства леммы 1 вытекает, что:

а) если φ_1 — эпиморфизм, а φ_2 и φ_4 — мономорфизмы, то φ_3 — мономорфизм;

б) если φ_5 — мономорфизм, а φ_2 и φ_4 — эпиморфизмы, то φ_3 — эпиморфизм.

Это замечание иногда бывает полезно.

Чтобы показать, как работает лемма 1, мы сравним гомотопическую последовательность пунктированного расслоения $p: E \rightarrow B$ с гомотопической последовательностью пары (E, F) , где $F = p^{-1}(b_0)$ — слой этого расслоения:

$$(8) \quad \begin{array}{ccccccccc} \dots & \rightarrow & \pi_n F & \rightarrow & \pi_n E & \rightarrow & \pi_n(E, F) & \rightarrow & \pi_{n-1} F & \rightarrow & \pi_{n-1} E & \rightarrow & \dots \\ & & \text{id} \downarrow & & \text{id} \downarrow & & p_* \downarrow & & \text{id} \downarrow & & \text{id} \downarrow & & \\ \dots & \rightarrow & \pi_n F & \rightarrow & \pi_n E & \rightarrow & \pi_n B & \rightarrow & \pi_{n-1} F & \rightarrow & \pi_{n-1} E & \rightarrow & \dots \end{array}$$

Автоматическая проверка показывает, что эта диаграмма коммутативна. Поэтому, согласно лемме о пяти гомоморфизмах, отображение

$$(9) \quad p_*: \pi_n(E, F) \rightarrow \pi_n B$$

для любого $n \geq 2$ является изоморфизмом.

Конечно, это утверждение легко доказывается и непосредственно с помощью аксиомы РНГ (сделайте это!), но применение леммы о пяти гомоморфизмах редуцирует доказательство к тривиальности.

С другой стороны, если изоморфизм (9) независимо установлен, то утверждения о точности гомотопических последовательностей расслоений и пар оказываются непосредственными следствиями друг друга, так что доказательство точности гомотопических последовательностей расслоений из предыдущей лекции может быть при желании заменено доказательством точности гомотопических последовательностей пар (см. выше).

Замечание 6. Хотя лемма 1 применяется обычно к диаграммам (7), состоящим из абелевых групп (или модулей), но, как показывает ее доказательство, в котором абелевость не используется, эта лемма справедлива и для последовательностей неабелевых групп (этим мы фактически пользовались при выводе изоморфизма (9) при $n = 2$).

По тем же соображениям лемма 1 остается справедливой, если в диаграмме (7) две последние группы каждой строчки являются лишь пунктированными множествами. Более того, легко видеть, что лемма 1 сохраняется, если пунктированными множествами являются даже три последние группы в каждой строчке, группы A_2 и B_2 действуют на множествах A_3 и B_3 и точность в членах A_3 и B_3 понимается в указанном выше усиленном смысле (т. е.

прообразами точек при отображениях α_* и β_* являются орбиты; кроме того, предполагается, конечно, что отображение φ_* является φ_* -отображением).

Это замечание релевантно для случая, когда строчками диаграммы (7) являются концевые отрезки точных П-последовательностей. В частности, из него следует, что отображение (9) является изоморфизмом (биективным отображением) и при $n=1$.

Замечание 7. При $n=0$ можно лишь утверждать, что $\pi_0(E, F)=0$ тогда и только тогда, когда $\pi_0 B=0$.

ДОПОЛНЕНИЕ

Гомотопическая последовательность тройки. — Гомотопические группы триад. — Инвариантность гомотопических групп при деформационных ретракциях. — Гомотопическая последовательность 4-ады.

Доказанный в лекции 8 изоморфизм (9) может быть существенно обобщен.

Предложение 1. Для любого расслоения $p: E \rightarrow B$ и любого подпространства $A \subset B$ гомоморфизм

$$(1) \quad p_*: \pi_n(E, F_A) \rightarrow \pi_n(B, A), \quad n \geq 1, \quad \text{где } F_A = p^{-1}A,$$

индуцированный отображением $p: (E, F_A) \rightarrow (B, A)$, является изоморфизмом.

При $A = \{b_0\}$ изоморфизм (1) переходит в изоморфизм (9) лекции 8.

Предложение 1 может быть доказано многими различными способами. Например, оно без труда доказывается (сделайте это!) прямым геометрическим построением с помощью аксиомы РНГ. Но мы предпочтем другой более поучительный путь.

Пусть (X, A, B, x_0) — произвольная пунктированная тройка. По определению X представляет собой топологическое пространство, A — его подпространство, B — подпространство пространства A и x_0 — точку пространства B :

$$x_0 \in B \subset A \subset X.$$

Пусть, далее, $i: (A, B) \rightarrow (X, B)$ и $j: (X, B) \rightarrow (X, A)$ — вложения, а

$$i_*: \pi_n(A, B) \rightarrow \pi_n(X, B) \quad \text{и} \quad j_*: \pi_n(X, B) \rightarrow \pi_n(X, A)$$

— соответствующие гомоморфизмы гомотопических групп. Наконец, пусть

$$\partial: \pi_n(X, A) \rightarrow \pi_{n-1}(A, B)$$

— композиция связывающего гомоморфизма $\pi_n(X, A) \rightarrow \pi_{n-1}A$ из гомотопической последовательности пары (X, A) и гомоморфизма вложения $\pi_{n-1}A \rightarrow \pi_{n-1}(A, B)$ из гомотопической последовательности пары (A, B) .

Определение 1. Последовательность

$$(2) \quad \dots \rightarrow \pi_n(A, B) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, B) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, B) \rightarrow \dots$$

называется *гомотопической последовательностью тройки* (X, A, B) .

Предложение 2. Гомотопическая последовательность тройки точна.

Последовательность (2) влево бесконечна, а ее правый конец имеет вид

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \pi_2(A, B) \rightarrow \pi_2(X, B) \rightarrow \pi_2(X, A) \rightarrow \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{неабелевы группы}} \rightarrow \pi_1(A, B) \rightarrow \pi_1(X, B) \rightarrow \pi_1(X, A). \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{пунктированные множества}} \end{aligned}$$

Можно без труда определить в этой последовательности действия групп π_2 , по отношению к которым она будет Π -последовательностью. Однако эти действия нам не понадобятся.

Доказательство предложения 2. Пусть

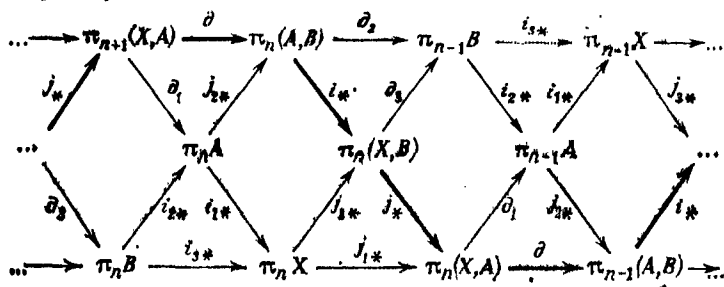
$$\begin{aligned} i_1: A \rightarrow X, \quad i_2: B \rightarrow A, \quad i_3: B \rightarrow X, \\ j_1: (X, x_0) \rightarrow (X, A), \quad j_2: (A, x_0) \rightarrow (A, B), \\ j_3: (X, x_0) \rightarrow (X, B) \end{aligned}$$

— вложения, а

$$\begin{aligned} \partial_1: \pi_{n+1}(X, A) \rightarrow \pi_n A, \quad \partial_2: \pi_{n+1}(A, B) \rightarrow \pi_n B, \\ \partial_3: \pi_{n+1}(X, B) \rightarrow \pi_n B \end{aligned}$$

— связывающие гомоморфизмы гомотопических последовательностей пар (X, A) , (A, B) и (X, B) . Рассмотрим

диаграмму



Автоматическая проверка показывает, что эта диаграмма коммутативна. Она свита из четырех симметрично расположенных последовательностей, три из которых, будучи гомотопическими последовательностями пар, точны, а четвертая, выделенная на диаграмме утолщенными стрелками, является последовательностью (2). При этом, так как отображение $j \circ i: (A, B) \rightarrow (X, B)$ может быть разложено в композицию вложений $(A, B) \rightarrow (A, A) \rightarrow (X, A)$, а $\pi_n(A, A) = 0$, то $j_* \circ i_* = 0$, т. е. $\text{Im } i_* \subset \text{Ker } j_*$. Оказывается, что предложение 2 следует отсюда уже чисто алгебраическим диаграммным поиском.

Действительно, так как $i_{1*} \circ d_1 = 0$, то $i_* \circ d = i_* \circ j_{2*} \circ d_1 = j_{3*} \circ i_{1*} \circ d_1 = 0$, и аналогично $d \circ j_* = j_{2*} \circ d_1 \circ j_* = j_{2*} \circ i_{2*} \circ d_3 = 0$. Таким образом, $\text{Im } d \subset \text{Ker } i$ и $\text{Im } j_* \subset \text{Ker } d$.

Обратно, если $\gamma \in \pi_n(A, B)$ и $\gamma \in \text{Ker } i_*$, т. е. $i_* \gamma = 0$, то $d_2 \gamma = 0$, и потому $\gamma = j_{2*} \alpha$, где $\alpha \in \pi_n A$. При этом $j_{3*} i_{1*} \alpha = i_* j_{2*} \alpha = i_* \gamma = 0$ и, значит, $i_{1*} \alpha = i_{3*} \beta$, где $\beta \in \pi_n B$. Поэтому $i_{1*}(\alpha - i_{3*} \beta) = i_{1*} \alpha - i_{3*} \beta = 0$, и, следовательно, $\alpha - i_{3*} \beta = d_1 \gamma'$, где $\gamma' \in \pi_{n+1}(X, A)$. Но тогда $d \gamma' = j_{2*} d_1 \gamma' = j_{3*}(\alpha - i_{3*} \beta) = j_{2*} \alpha = \gamma$, т. е. $\gamma \in \text{Im } d$. Таким образом, $\text{Ker } i_* \subset \text{Im } d$.

Аналогично, если $\gamma \in \pi_n(X, A)$ и $\gamma \in \text{Ker } d$, т. е. $d \gamma = 0$, то $j_{2*} d_1 \gamma = 0$, и потому $d_1 \gamma = i_{2*} \beta$, где $\beta \in \pi_{n-1} B$. При этом $i_{3*} \beta = i_{1*} i_{2*} \beta = i_{1*} d_1 \gamma = 0$ и, значит, $\beta = d_3 \beta'$, где $\beta' \in \pi_n(X, B)$. Поэтому $d_1(\gamma - j_* \beta') = d_1 \gamma - i_{2*} d_3 \beta' = 0$ и, следовательно, $\gamma - j_* \beta' = j_{1*} \alpha$, где $\alpha \in \pi_n X$. Но тогда $j_*(j_{2*} \alpha + \beta') = j_{1*} \alpha + j_* \beta' = \gamma$, т. е. $\gamma \in \text{Im } j_*$. Таким образом, $\text{Ker } d \subset \text{Im } j_*$.

Наконец, мы уже видели, что $\text{Im } i_* \subset \text{Ker } j_*$. Обратно, если $\beta \in \pi_n(X, B)$ и $\beta \in \text{Ker } j_*$, т. е. $j_* \beta = 0$, то $i_{2*} d_3 \beta = 0$, и потому $d_3 \beta = d_2 \gamma$, где $\gamma \in \pi_n(A, B)$. При этом $d_3(\beta - i_* \gamma) = d_3 \beta - d_2 \gamma = 0$ и, значит, $\beta - i_* \gamma = j_{3*} \alpha$, где $\alpha \in \pi_n X$.

Поэтому $j_{1*}\alpha = j_*j_{3*}\alpha = j_*\beta - j_*i_*\gamma = 0$ и, следовательно, $\alpha = i_{1*}\alpha'$, где $\alpha' \in \pi_n A$. Но тогда $i_*(j_{2*}\alpha' + \gamma) = j_{3*}i_{1*}\alpha' + i_*\gamma = j_{3*}\alpha + i_*\gamma = \beta$, т. е. $\beta \in \text{Im } i_*$. Таким образом, $\text{Ker } j_* \subset \text{Im } i_*$. $\square$

Замечание 1. Последовательность (2) может быть построена для любого семейства $\{H_n, \partial\}$ функторов $H_n: \text{TOP}_2 \rightarrow \text{AB-GROUPS}$ и естественных преобразований $\partial: H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A, x_0)$. При этом, как непосредственно явствует из приведенного выше доказательства, эта последовательность точна, если для любой пары $(X, A) \in \text{TOP}_2$ последовательность

$$\dots \rightarrow H_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial} H_n(A, x_0) \rightarrow H_n(X, x_0) \rightarrow H_n(X, A) \rightarrow \dots$$

точна и если $H_n(A, A) = 0$ для любого пространства $A \in \text{TOP}$.

Мы будем иметь случай использовать это замечание в следующем семестре.

Доказательство предложения 1. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \rightarrow & \pi_n(F_A, F) & \rightarrow & \pi_n(E, F) & \rightarrow & \pi_n(E, F_A) & \rightarrow & \pi_{n-1}(F_A, F) & \rightarrow & \pi_{n-1}(E, F) & \rightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \rightarrow & \pi_n(A, b_0) & \rightarrow & \pi_n(B, b_0) & \rightarrow & \pi_n(B, A) & \rightarrow & \pi_{n-1}(A, b_0) & \rightarrow & \pi_{n-1}(B, b_0) & \rightarrow & \dots \end{array}$$

верхняя строчка которой является гомотопической последовательностью тройки (E, F_A, F) , нижняя строчка — гомотопической последовательностью пары (B, A) , а вертикальные гомоморфизмы индуцированы отображением p . Эта диаграмма, очевидно, коммутативна и все ее вертикальные гомоморфизмы, кроме центрального гомоморфизма $p_*: \pi_n(E, F_A) \rightarrow \pi_n(B, A)$, будучи гомоморфизмами вида (9) из лекции 8 (напомним, что отображение $p_A: F_A \rightarrow A$ также является расслоением), представляют собой изоморфизмы. Поэтому, согласно лемме о пяти гомоморфизмах, центральный гомоморфизм также является изоморфизмом. $\square$

Замечание 2. Наш путь доказательства предложений 1 и 2 не является самым простым. Значительно проще было бы обратиться к последовательности рассуждений, доказав сначала чисто геометрически предложение 1 и затем выведя из него предложение 2 с помощью

диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc} \dots \rightarrow \pi_n(S, T) & \rightarrow & \pi_{n-1}T & \rightarrow & \pi_{n-1}S & \rightarrow & \pi_{n-1}(S, T) \rightarrow \dots \\ & \downarrow & \downarrow & & & & \downarrow \\ \dots \rightarrow \pi_n(A, B) & \rightarrow & \pi_n(X, B) & \rightarrow & \pi_n(X, A) & \rightarrow & \pi_{n-1}(A, B) \rightarrow \dots \end{array}$$

где $S = \Omega(X, A)$ (соответственно $T = \Omega(X, B)$) — пространство путей в X , начинающихся в подпространстве A (в подпространстве B) и кончающихся в отмеченной точке x_0 . Верхней строчкой этой диаграммы служит гомотопическая последовательность пары $(\Omega(X, A), \Omega(X, B))$, а ее нижней строчкой — последовательность (2). Ее средними вертикальными гомоморфизмами являются изоморфизмы, обратные к изоморфизмам (3) лекции 8 (при $k = n - 1$), а боковыми — гомоморфизмы, индуцированные расслоением $\omega_0: \Omega(X, A) \rightarrow A$ и, значит, в силу предложения 1 также являющиеся изоморфизмами (ясно, что $\omega_0^{-1}B = \Omega(X, B)$). Автоматическая проверка показывает, что рассматриваемая диаграмма коммутативна. Поэтому из точности ее верхней строчки вытекает точность ее нижней строчки. Однако это доказательство не позволяет нам сделать замечание 1.

Из точности гомотопической последовательности тройки немедленно вытекает, что *при $\pi_r(A, B) = 0$ и $\pi_{r-1}(A, B) = 0$ индуцированный вложением гомоморфизм*

$$(3) \quad \pi_r(X, B) \rightarrow \pi_r(X, A)$$

является изоморфизмом. Несмотря на свою простоту, этот критерий, как мы в своем месте увидим, очень полезен и позволяет получить важные и интересные геометрические результаты. Однако он недостаточен для задач, в которых вместо пары (X, B) участвует пара вида (X', B) , где $X' \subset X$. Чтобы получить необходимое для такого рода задач обобщение этого критерия, мы должны соответствующим образом обобщить гомотопическую последовательность тройки.

Мы будем называть *n -адой* семейство $(X; A_1, \dots, A_{n-1})$, состоящее из топологического пространства X и его произвольных подпространств $A_1, \dots, A_{n-1}$. Морфизмом *n -ад* $f: (X; A_1, \dots, A_{n-1}) \rightarrow (Y; B_1, \dots, B_{n-1})$ называется непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$, для которого

$f(A_i) \subset B_i$ при любом $i = 1, \dots, n-1$. Все n -ады и их морфизмы очевидным образом составляют категорию с гомотопиями. Мы будем обозначать эту категорию символом $\text{TOP}_{[n]}$, а соответствующую гомотопическую категорию — символом $[\text{TOP}_{[n]}]$.

Введенная в лекции 8 категория n -ок TOP_n является полной подкатегорией категории $\text{TOP}_{[n]}$. При $n=2$ имеет место равенство $\text{TOP}_2 = \text{TOP}_{[2]}$, но уже при $n=3$ категория TOP_3 является собственной подкатегорией категории $\text{TOP}_{[3]}$.

Если пространство X пунктировано и отмеченная точка x_0 лежит в каждом из пространств $A_1, \dots, A_{n-1}$, то n -ада $(X; A_1, \dots, A_{n-1})$ называется *пунктированной n -адой*. Пунктированные n -ады составляют категорию $\text{TOP}'_{[n]}$, являющуюся полной подкатегорией категории $\text{TOP}_{[n+1]}$.

Для нас особый интерес будут иметь *пунктированные триады* $(X; A, B, x_0)$, которые, как правило, мы будем обозначать просто через $(X; A, B)$. Заметим, что для такой триады пересечение $C = A \cap B$ не пусто.

Для каждой пунктированной триады $(X; A, B)$ и любого $r \geq 0$ определен гомоморфизм

$$(4) \quad j_*: \pi_r(A, C) \rightarrow \pi_r(X, B), \quad C = A \cap B,$$

индуцированный вложением $j: (A, C) \rightarrow (X, B)$. Чтобы получить критерий того, что этот гомоморфизм является изоморфизмом, мы введем в рассмотрение группы

$$\pi_r(X; A, B) = \pi_{r-1}(\Omega(X, B), \Omega(A, C)), \quad r \geq 2.$$

Определение 2. Группа $\pi_r(X; A, B)$ называется *r -мерной гомотопической группой триады $(X; A, B)$* .

Конечно, эта «группа» при $r=2$ является лишь пунктированным множеством. При $r \geq 4$ группа $\pi_r(X; A, B)$ абелева.

В силу экспоненциального закона элементами группы $\pi_r(X; A, B)$ можно считать гомотопические классы (в категории $\text{TOP}_{[4]}$) отображений

$$(5) \quad (I^{r-1} \times I; \dot{I}^{r-1} \times I, I^{r-1} \times 1, \{\widetilde{0}\}) \rightarrow (X; A, B, x_0),$$

где $\{\widetilde{0}\} = (I^{n-1} \times 0) \cup (\{0\} \times I)$.

Ясно, что 4-ада $(I^{r-1} \times I; \dot{I}^{r-1} \times I, I^{r-1} \times 1, \{\widetilde{0}\})$ гомотопически эквивалентна (в категории $\text{TOP}_{[4]}$) пунктированной триаде $(E^r; E_+^{r-1}, E_-^{r-1}, s_0)$, где E_+^{r-1}, E_-^{r-1} — полу-

сферы, на которые разбивается граничная сфера S^{r-1} шара E^r гиперплоскостью $x_r = 0$. Поэтому элементами группы $\pi_r(X; A, B)$ мы можем также считать гомотопические классы (в категории $\text{TOP}_{[3]}$) отображений

$$(6) \quad (E^r; E_+^{r-1}, E_-^{r-1}) \rightarrow (X; A, B)$$

пунктированных триад.

Поскольку перестановка полусфер E_+^{r-1} и E_-^{r-1} переводит каждое отображение (6) в аналогичное отображение для триады $(X; B, A)$, отсюда немедленно следует, что для любого $r \geq 1$ имеет место изоморфизм

$$(7) \quad \pi_r(X; A, B) \approx \pi_r(X; B, A).$$

Так как

$$\pi_r(X, B) = \pi_{r-1}\Omega(X, B), \quad \pi_r(A, C) = \pi_{r-1}\Omega(A, C),$$

то гомотопическая последовательность пары $(\Omega(X, B), \Omega(A, C))$ дает нам точную последовательность

$$(8) \quad \dots \rightarrow \pi_r(A, C) \xrightarrow{j_*} \pi_r(X, B) \xrightarrow{k_*} \pi_r(X; A, B) \xrightarrow{\partial} \pi_{r-1}(A, C) \rightarrow \dots,$$

которая называется *гомотопической последовательностью триады* $(X; A, B)$. Гомоморфизм j_* этой последовательности является интересующим нас гомоморфизмом (4), гомоморфизм k_* составляет каждому отображению $(I^r, J^r, J^{r-1}) \rightarrow (X, B, x_0)$ это же отображение, но рассматриваемое как отображение вида (5), а гомоморфизм ∂ сопоставляет каждому отображению (6) его ограничение на полусфере E_+^{r-1} . (Для упрощения формулировки мы отождествляем здесь отображения и их гомотопические классы; эту вольность речи мы будем позволять себе и в дальнейшем.)

Последовательность (8) естественным образом является II-последовательностью. Прямое описание соответствующих действий мы предоставим инициативе читателя.

В силу точности последовательности (8) гомоморфизм (4) является изоморфизмом, если $\pi_{r+1}(X; A, B) = 0$ и $\pi_r(X; A, B) = 0$. Поэтому, если $\pi_r(X; A, B) = 0$ при $r \leq n$ (триада $(X; A, B)$, удовлетворяющая этому условию, называется *n-связной*), то гомоморфизм (4) будет изоморфизмом при $r < n$ и эпиморфизмом при $r = n$ (подобно тому как для *n-связной* пары (A, B) гомоморфизм (3) будет изоморфизмом при $r < n$ и эпиморфизмом при $r = n$).

При $A \supset B$ любое отображение (6) мы можем рассматривать как отображение $(E^r, S^{r-1}) \rightarrow (X, A)$, и тем самым получить некоторый гомоморфизм

$$(9) \quad \pi_r(X; A, B) \rightarrow \pi_r(X, A) \quad A \supset B.$$

Автоматическая проверка показывает, что вместе с тождественными изоморфизмами $\pi_r(X, B) \rightarrow \pi_r(X, B)$ и $\pi_r(A, C) \rightarrow \pi_r(A, B)$ (заметим, что $C = B$ при $A \supset B$) гомоморфизмы (9) составляют морфизм последовательности (8) в последовательность (2). Поэтому в силу леммы о пяти гомоморфизмах все гомоморфизмы (9) являются изоморфизмами.

Таким образом, при $A \supset B$ группа $\pi_r(X; A, B)$ не зависит от B .

Этот факт можно доказать и иначе, заметив, что если подпространство A пространства X стягиваемо ($A \cong pt$), то

$$(10) \quad \pi_r(X, A) = \pi_r X$$

для любого $r \geq 1$. Действительно, в точной гомотопической последовательности пары (X, A) все группы $\pi_r A$ равны нулю, и потому гомоморфизмы $\pi_r X \rightarrow \pi_r(X, A)$ являются изоморфизмами. $\square$

Это заново доказывает изоморфизм (9), потому что если для триады $(X; A, B)$ имеет место включение $A \supset B$ и, значит, $C = B$, то

$$\begin{aligned} \pi_r(X; A, B) &= \pi_r(X; B, A) = \pi_{r-1}(\Omega(X, A), \Omega(B, C)) = \\ &= \pi_{r-1}(\Omega(X, A), \Omega(B, B)) = \pi_{r-1}\Omega(X, A) = \\ &= \pi_r(X, A), \end{aligned}$$

поскольку пространство $\Omega(B, B) = PB$, как мы знаем, стягиваемо.

Изоморфизм (10) может быть легко обобщен.

Предложение 3. Если $(X, A) \subset (X', A')$, причем пространство X является деформационным ретрактом пространства X' , а пространство A — деформационным ретрактом пространства A' (т. е. $X' \cong X$ и $A' \cong A$), то вложение $(X, A) \rightarrow (X', A')$ индуцирует изоморфизм

$$\pi_r(X, A) = \pi_r(X', A'), \quad r \geq 1.$$

Доказательство. В коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \rightarrow & \pi_r A & \rightarrow & \pi_r X & \rightarrow & \pi_r(X, A) & \rightarrow & \pi_{r-1} A & \rightarrow & \pi_{r-1} X & \rightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \rightarrow & \pi_r A' & \rightarrow & \pi_r X' & \rightarrow & \pi_r(X', A') & \rightarrow & \pi_{r-1} A' & \rightarrow & \pi_{r-1} X' & \rightarrow & \dots \end{array}$$

вертикальные гомоморфизмы которой индуцированы вложениями, а строки являются гомотопическими последовательностями пар (X, A) и (X', A') , все вертикальные гомоморфизмы, кроме центрального гомоморфизма $\pi_r(X, A) \rightarrow \pi_r(X', A')$, являются изоморфизмами. Следовательно, согласно лемме о пяти гомоморфизмах, этот центральный гомоморфизм также будет изоморфизмом. $\square$

При $A' = \{x_0\}$ мы получаем изоморфизм (10).

Ясно, что аналогичное утверждение (с практически тем же доказательством) имеет место и для триад: если $(X; A, B) \subset (X'; A', B')$ и каждое из пространств X, A, B и $C = A \cap B$ является деформационным ретрактом соответственно пространства X', A', B' и $C' = A' \cap B'$, то

$$\pi_r(X; A, B) = \pi_r(X'; A', B')$$

для любого $r \geq 1$.

Можно ли по аналогии с гомотопическими группами триад определить гомотопические группы n -ад при $n \geq 4$? Например, кажется естественным определить гомотопические группы $\pi_r(X; A, B, Y)$ произвольной пунктированной 4-ады $(X; A, B, Y)$ формулой

$$\pi_r(X; A, B, Y) = \pi_{r-1}(\Omega(X, Y); \Omega(X, E), \Omega(A, D))$$

(имеющей смысл для любого $r \geq 2$), где $D = Y \cap A$ и $E = Y \cap B$. Для этих групп имеет место точная последовательность

$$\dots \rightarrow \pi_r(X; A, E) \rightarrow \pi_r(X; A, Y) \rightarrow \pi_r(X; A, B, Y) \rightarrow \pi_{r-1}(X; A, E) \rightarrow \dots,$$

являющаяся не чем иным, как последовательностью (8) для триады $(\Omega(X, Y); \Omega(X, E), \Omega(A, D))$ (подобно тому как сама последовательность (8) была не чем иным, как гомотопической последовательностью пары $(\Omega(X, B), \Omega(A, C))$. Однако, переставив $\Omega(X, E)$ и $\Omega(A, D)$ (отчего группа $\pi_r(X; A, B, Y)$ не изменится), мы аналогичным образом получим точную последовательность

$$\dots \rightarrow \pi_r(D; D \cap E) \rightarrow \pi_r(Y, E) \rightarrow \pi_{r+1}(X; A, B, Y) \rightarrow \pi_{r-1}(D; D \cap E) \rightarrow \dots,$$

из сравнения которой с гомотопической последовательностью триады $(Y; D, E)$ немедленно вытекает в силу леммы о пяти гомоморфизмах, что $\pi_{r+1}(X; A, B, Y) \approx$

$\approx \pi_r(Y; D, E)$. Таким образом, введенные группы сводятся к группам триад.

Тем не менее эта попытка оказалась нам все же полезной, поскольку мы теперь видим, что для любой пунктированной 4-ады $(X; A, B, Y)$ имеет место точная последовательность

$$(11) \quad \dots \rightarrow \pi_r(X; A, E) \xrightarrow{i_*} \pi_r(X; A, Y) \xrightarrow{\partial} \pi_{r-1}(Y; D, E) \xrightarrow{j_*} \pi_{r-1}(X; A, E) \rightarrow \dots,$$

где $D = Y \cap A$, $E = Y \cap B$. Автоматическая проверка показывает при этом, что — как следовало ожидать — гомоморфизмы i_* и j_* этой последовательности индуцируются вложениями

$$i: (X; A, E) \rightarrow (X; A, Y) \quad \text{и} \quad j: (Y; D, E) \rightarrow (X; A, E).$$

Что же касается связывающего гомоморфизма ∂ , то он представляет собой композицию изоморфизма перестановки $\pi_r(X; A, Y) \approx \pi_r(X; Y, A)$, связывающего гомоморфизма $\pi_r(X; Y, A) \rightarrow \pi_{r-1}(Y, D)$ из гомотопической последовательности триады $(X; Y, A)$, гомоморфизма $\pi_{r-1}(Y, D) \rightarrow \pi_{r-1}(Y; E, D)$ из гомотопической последовательности триады $(Y; E, D)$ и изоморфизма перестановки $\pi_{r-1}(Y; E, D) \approx \pi_{r-1}(Y; D, E)$.

Отметим частный случай последовательности (11), возникающий при $Y \supset B$, т. е. при $E = B$:

$$(12) \quad \dots \rightarrow \pi_r(X; A, B) \xrightarrow{i_*} \pi_r(X; A, Y) \xrightarrow{\partial} \pi_{r-1}(Y; D, B) \xrightarrow{j_*} \pi_{r-1}(X; A, B) \rightarrow \dots$$

Конечно, неудача нашей попытки сконструировать содержательные (не сводящиеся к группам триад) гомотопические группы n -ад при $n \geq 4$ еще не означает, что такие группы нельзя построить. Выяснение этого вопроса мы оставим читателю.

Слабые расслоения. — Аддиционная лемма. — Основная лемма. — Накрывающие гомотопии для слабых расслоений. — Доказательство теоремы Дольда — Тома. — Лемма Джеймса.

Ценность расслоений в теории гомотопических групп определяется главным образом наличием для них гомотопической последовательности. Поэтому целесообразно в общем виде изучить отображения, для которых эта последовательность может быть написана.

Определение 1. Отображение $p: E \rightarrow B$ называется *слабым расслоением*, если для любой точки $e_0 \in E$ и любого $n > 0$ оно индуцирует изоморфизм

$$p_*: \pi_n(E, F_{b_0}, e_0) \xrightarrow{\cong} \pi_n(B, b_0), \quad b_0 = p(e_0), \quad F_{b_0} = p^{-1}(b_0),$$

и если каждая компонента пространства E , переходящая в компоненту пространства B , содержащую точку b_0 , пересекается с F_{b_0} .

Заменив в гомотопической последовательности пары (E, F_{b_0}) группу $\pi_n(E, F_{b_0})$ изоморфной ей группой $\pi_n B$, мы получим точную последовательность

$$(1) \quad \dots \rightarrow \pi_n F_{b_0} \xrightarrow{i_*} \pi_n E \xrightarrow{p_*} \pi_n B \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1} F_{b_0} \rightarrow \dots,$$

называемую *гомотопической последовательностью слабого расслоения* $p: E \rightarrow B$ в точке e_0 . Поэтому для вычислений с гомотопическими группами слабые расслоения ничуть не хуже обычных расслоений (которые мы позволим себе называть теперь *сильными расслоениями*).

Замечание 1. Следует иметь в виду, что в литературе по топологии термин «слабое расслоение» используется во многих разных смыслах. Например, Спеньер (см. [12] стр. 482) слабыми расслоениями называет *расслоения в смысле Серра* (отображения, удовлетворяющие аксиоме НГ лишь по отношению к отображениям кубов). Напротив, слабые расслоения в смысле определения 1 Дольд и Том (которым принадлежит заслуга введения этого понятия) называют *квазирасслоениями*.

Конечно, любое расслоение является слабым расслоением. Обратное, вообще говоря, неверно.

Пример 1. Пусть E — подмножество плоскости, состоящее из двух горизонтальных отрезков, соединенных вертикальным отрезком, B — горизонтальный отрезок двойной длины и $p: E \rightarrow B$ — проекция (рис. 19). Непосредственно проверяется, что эта проекция является слабым расслоением. Однако расслоением (даже в смысле Серра) она не будет, поскольку путь $\text{id}: B \rightarrow B$ в B не накрывается никаким путем в E .

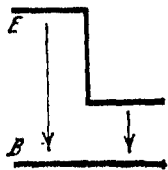


Рис. 19.

Как мы знаем, если отображение $p: E \rightarrow B$ является расслоением, то для любого подпространства $A \subset B$ индуцированное им отображение $p_A = p|_A: F_A \rightarrow A$, где $F_A = p^{-1}A$, также является расслоением (этот факт, в частности, существенно использовался в доказательстве предложения 1 из Дополнения к предыдущей лекции). Аналогичное утверждение для слабых расслоений, вообще говоря, неверно (и, значит, неверно более общее утверждение, что отображение, индуцированное слабым расслоением, является слабым расслоением).

Пример 2. Пусть B — полуплоскость $x > 0$ плоскости $\mathbb{R}^2$, а E — та же полуплоскость, но с разрезом $0 < x < 1, y = 0$, от которого оставлена лишь его верхняя сторона. Очевидно, что естественная проекция $p: E \rightarrow B$ является слабым расслоением (ибо все гомотопические группы пространств E, B и F_{b_0} , $b_0 \in B$, в размерностях > 0 равны нулю). Вместе с тем прообраз F_A окружности $A: (x-1)^2 + y^2 = 1/4$ является отрезком, и потому проекция $p_A: F_A \rightarrow A$ расслоением — даже слабым — быть не может (ибо $\pi_1(F_A) = 0$, тогда как $\pi_1 A \neq 0$).

Следуя Дольду и Тому, мы будем называть подпространство $A \subset B$ *отмеченным* (по отношению к данному надъективному отображению $p: E \rightarrow B$), если отображение $p_A: F_A \rightarrow A$ является слабым расслоением.

Теперь легко видеть, фактически дословно повторяя доказательство предложения 1 из Дополнения к предыдущей лекции, что при ограничении отмеченными множествами это предложение сохраняется и для слабых расслоений, т. е. для любого слабого расслоения $p: E \rightarrow B$ и любого отмеченного подпространства $A \subset B$ гомоморфизм

$$p_*: \pi_n(E, F_A) \rightarrow \pi_n(B, A), \quad n > 0,$$

индуцированный отображением $p: (E, F_A) \rightarrow (B, A)$, является изоморфизмом (при любом выборе отмеченных точек $e_0 \in F_A$ и $b_0 = p(e_0)$).

Естественно ожидать, что аналогичные оговорки нужны и при обобщении на слабые расслоения теоремы 1 из Дополнения к лекции 1 и, значит, что из существования для пространства B покрытия (даже нумерируемого), состоящего из открытых отмеченных множеств, еще не следует, вообще говоря, что отображение $p: E \rightarrow B$ является слабым расслоением (т. е. что пространство B отмечено).

Пример 3. Пусть B — плоскость $\mathbb{R}^2$, а E — та же плоскость, но с разрезом $0 < x < 1, y = 0$, от которого оставлена лишь его верхняя сторона. Согласно сказанному в примере 2 полуплоскость $x > 0$ отмечена по отношению к естественной проекции $p: E \rightarrow B$. По симметрии отмечена и полуплоскость $x < 1$, составляющая вместе с полуплоскостью $x > 0$ открытое покрытие плоскости B . Вместе с тем, если бы проекция p была слабым расслоением, то ввиду того, что все множества $p^{-1}(b_0)$, $b_0 \in B$, являются точками и потому асферичны, она индуцировала бы изоморфизм $\pi_1 E \approx \pi_1 B$. Но $\pi_1 B = 0$, а группа $\pi_1 E$ нетривиальна, так как петля, обходящая разрез, не гомотопна нулю (докажите!). Поэтому проекция $p: E \rightarrow B$ расслоением — даже слабым — быть не может.

Вместе с тем оказывается, что если для надъективного отображения $p: E \rightarrow B$ существует покрытие пространства B , состоящее из таких отмеченных открытых множеств U_α , что любые их конечные пересечения также отмечены, то отображение $p: E \rightarrow B$ будет слабым расслоением. Более того, справедлива следующая чуть более общая теорема, принадлежащая Дольду и Тому.

Теорема 1. Надъективное отображение $p: E \rightarrow B$ будет слабым расслоением, если для пространства B существует покрытие, состоящее из таких отмеченных открытых множеств U_α , что каждое пересечение $U_\alpha \cap U_\beta$ является объединением элементов покрытия.

Заметим, что покрытие $\{U_\alpha\}$ нумерируемым не предполагается.

Доказательству теоремы 1 мы предположим четыре леммы, первая из которых имеет и самостоятельный интерес.

Наряду со стандартными, описанными в лекциях 5 и 6 построениями суммы элементов гомотопических групп,

существует для этого много других конструкций, которые хотя и менее элегантны, но в определенных ситуациях более удобны. Описания этих конструкций известны под общим именем аддиционных лемм. Мы не будем глубоко погружаться в болото этих лемм и пока ограничимся только одной из них, необходимой для доказательства теоремы 1.

В этой лемме используется тот факт, что для любой пунктированной пары (X, A, x_0) элементами группы $\pi_n(X, A, x_0)$ мы можем считать гомотопические классы отображений $(I^n, \dot{I}^n, 0) \rightarrow (X, A, x_0)$.

Пусть K^n — подкуб куба I^n , состоящий из точек $t = (t_1, \dots, t_n)$, для которых

$$1/4 \leq t_1 \leq 1/2, \dots, 1/4 \leq t_{n-1} \leq 1/2, 0 \leq t_n \leq 1/4$$

(см. рис. 20). Ясно, что пара $(I^n, \dot{I}^n \cup K^n)$ является парой Борсука, причем $\dot{I}^n \cup K^n \cong \dot{I}^n$. Поэтому любое отображение $(I^n, \dot{I}^n, 0) \rightarrow (X, A, x_0)$, гомотопно (в категории TOP_2) отображению, переводящему куб K^n в A , и, значит, отображению, переводящему куб K^n в точку x_0 .

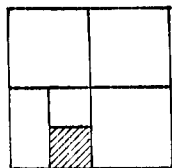


Рис. 20.

Пусть, далее, K^n — граница куба K^n , а L^{n-1} — объединение всех его граней, отличных от грани $K_1^{n-1} = K^n \cap \dot{I}^n$, задаваемой уравнением $t_n = 0$. Пусть, наконец, φ_n — линейное отображение

$$t_1 \mapsto 4t_1 - 1, \dots, t_{n-1} \mapsto 4t_{n-1} - 1, t_n \mapsto 4t_n$$

тройки $(K^n, \dot{K}^n, L^{n-1})$ на тройку $(I^n, \dot{I}^n, J^{n-1})$.

Нужная нам аддиционная лемма может быть теперь сформулирована следующим образом.

Лемма 1. Пусть элемент $\alpha \in \pi_n(X, A)$ задается отображением $f: (I^n, \dot{I}^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$, а элемент $\beta \in \pi_n(X, A)$ — таким отображением $g: (I^n, \dot{I}^n, 0) \rightarrow (X, A, x_0)$, что $g(K) = x_0$. Тогда отображение $h: (I^n, \dot{I}^n, 0) \rightarrow (X, A, x_0)$, определенное (очевидно, корректно) формулой

$$(2) \quad h(t) = \begin{cases} (f \circ \varphi_n)(t), & \text{если } t \in K^n, \\ g(t), & \text{если } t \notin K^n, \end{cases} \quad t \in I^n,$$

будет задавать элемент $\alpha + \beta \in \pi_n(X, A)$.

Доказательство. Ясно, что пары $(I^n, K_t^{n-1} \cup J^{n-1})$ и $(I^n, K^n \cup I^n)$ являются парами Борсука. Стандартное рассуждение показывает поэтому, что существует такая гомотопия

$$g_t: (I^n, I^n, 0) \rightarrow (X, A, x_0),$$

что

$$g_0 = g, \quad g_1(J^{n-1}) = x_0 \text{ и } g_1(K^n) = x_0$$

для любого $t \in I$. Заменяя в формуле (2) отображение g отображениями g_t , мы, очевидно, получим гомотопию $h_t: (I^n, I^n, 0) \rightarrow (X, A, x_0)$, связывающую отображение $h = h_0$ с отображением h_1 , построенным по отображению g_1 . Следовательно, без ограничения общности мы можем в лемме 1 предполагать, что отображение g обладает тем дополнительным свойством, что $g(J^{n-1}) = x_0$, т. е. является подобно отображению f отображением стандартного вида $(I^n, I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$ (и, конечно, по-прежнему удовлетворяет условию $g(K^n) = x_0$, обеспечивающему корректность формулы (2)). Более того, по аналогичным соображениям мы можем даже требовать, чтобы $g(t) = x_0$ при $0 \leq t_1 \leq 1/2$, т. е. чтобы отображение g было суммой $\text{const} + g'$ постоянного отображения const и отображения $g': (I^n, I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$, определенного формулой

$$g'(t_1, t_2, \dots, t_n) = g\left(\frac{1+t_1}{2}, t_2, \dots, t_n\right), \\ (t_1, t_2, \dots, t_n) = t \in I^n.$$

Но тогда отображение h будет, очевидно, суммой $f' + g'$ отображения $f': (I^n, I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$, определенного формулой

$$f'(t_1, t_2, \dots, t_n) = \\ = \begin{cases} (f \circ \varphi_n)\left(\frac{t_1}{2}, t_2, \dots, t_n\right), & \text{если } \left(\frac{t_1}{2}, t_2, \dots, t_n\right) \in K^n, \\ x_0, & \text{если } \left(\frac{t_1}{2}, t_2, \dots, t_n\right) \notin K^n, \end{cases}$$

и отображения g' . Поскольку $\beta = [g] = [\text{const} + g'] = [g']$, отсюда следует, что для доказательства леммы достаточно доказать, что $\alpha = [f']$, т. е. что существует гомотопия $f_t: (I^n, I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$, связывающая отображение f с отображением f' . Поскольку такую гомотопию можно

задать, например, формулами

$$f_t(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} f\left(\frac{t+2t_1+1}{1+t}, \frac{t+4t_2-1}{1+3t}, \dots, \frac{t+4t_{n-1}-1}{1+3t}, \frac{4t_n}{1+3t}\right), \\ \text{если } \frac{1-t}{2} \leq t_1 \leq 1, \frac{1-t}{4} \leq t_2 \leq \frac{1+t}{2}, \dots \\ \dots, \frac{1-t}{4} \leq t_{n-1} \leq \frac{1+t}{2}, \dots, 0 \leq t_n \leq \frac{1+3t}{4}, \\ x_0 \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

лемма 1 тем самым полностью доказана. $\square$

Мы будем говорить, что отображение h получается из отображения g *вклеиванием* отображения f .

Теперь мы можем доказать фундаментальную лемму Дольда и Тома, вскрывающую внутренние «гомотопические» пружины справедливости аксиомы РНГ для отображений кубов. В этой лемме указываются условия на отображение $p: E \rightarrow B$ и подпространство $A \subset B$, при выполнении которых для любого отображения $g: (I^{n+1}, I^n) \rightarrow (B, A)$, любой гомотопии $h_t: (J^n, I^n) \rightarrow (B, A)$, обладающей тем свойством, что $h_0 = g|_{J^n}$, и любого отображения $\bar{h}_1: (J^n, I^n) \rightarrow (E, F_A)$, $F_A = p^{-1}A$, накрывающего отображение h_1 (т. е. такого, что $\bar{h}_1 = p \circ h_1$), существует такая гомотопия $g_t: (I^{n+1}, I^n) \rightarrow (B, A)$ и такое отображение $\bar{g}: (I^{n+1}, I^n) \rightarrow (E, F_A)$, что

$$\bar{g}|_{J^n} = \bar{h}_1, \quad g_0 = g, \quad g_1 = p \circ \bar{g}$$

и $g_t|_{J^n} = h_t$ для любого $t \in I$.

Лемма 2. Если для каждой точки $e_0 \in F_A$ индуцированный отображением p гомоморфизм

$$p_n: \pi_n(E, F_A, e_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0), \quad b_0 = p(e_0),$$

является мономорфизмом, а гомоморфизм

$$p_{n+1}: \pi_{n+1}(E, F_A, e_0) \rightarrow \pi_{n+1}(B, b_0)$$

— эпиморфизмом, то для любых g , h_t и $\bar{h}_1$ существуют g_t и $\bar{g}$.

Прежде чем доказывать эту лемму, мы заметим, что пара (J^n, I^n) , очевидно, гомеоморфна паре (I^n, I^n) . Действительно, для любого гомеоморфизма $\varphi: (I^n, I^n) \rightarrow$

$\rightarrow (E^n, S^{n-1})$ формула

$$\psi(t, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \varphi(t), & \text{если } t = 1, \\ \frac{2-t}{2} \varphi(t), & \text{если } t \in I^n, \end{cases}$$

будет определять гомеоморфизм пары $(J^n, \dot{I}^n) = ((\dot{I}^n \times I) \cup (I^n \times 1), \dot{I}^n \times 0)$ на пару (E^n, S^{n-1}) . Значит, отображение $\psi^{-1} \circ \varphi$ будет гомеоморфизмом $(I^n, \dot{I}^n) \rightarrow (J^n, \dot{I}^n)$. Поэтому, если мы зафиксируем гомеоморфизм $(I^n, \dot{I}^n) \rightarrow (J^n, \dot{I}^n)$, то для любой пары (X, A) каждое пунктированное отображение $f: (J^n, \dot{I}^n) \rightarrow (X, A)$ будет определять некоторый элемент группы $\pi_n(X, A)$. Более того, гомеоморфизм $(I^n, \dot{I}^n) \rightarrow (J^n, \dot{I}^n)$ мы можем считать (почему?) ограничением некоторого гомеоморфизма $(I^{n+1}, J^n) \rightarrow (I^{n+1}, I^n)$, откуда следует, что каждое отображение $g: (I^{n+1}, I^n) \rightarrow (X, A)$ мы можем рассматривать как гомотопию из I^n в X , начальным отображением которой является отображение $g|_{J^n}$ (рассматриваемое как отображение $(I^n, \dot{I}^n) \rightarrow (X, A)$). Так как при отождествлении $I^{n+1} = I^n \times I$ подмножество J^n куба I^{n+1} отождествляется с подмножеством $(\dot{I}^n \times I) \cup (I^n \times 1)$ произведения $I^n \times I$, а по условию $g(I^n) \subset A$, то эта гомотопия будет гомотопией отображений пар $(I^n, \dot{I}^n) \rightarrow (X, A)$, и ее конечное отображение будет отображением, стянутым в A . Поэтому ее начальное отображение будет задавать нулевой элемент группы $\pi_n(X, A)$. Этим доказано, что *отображение $f: (J^n, \dot{I}^n) \rightarrow (X, A)$ тогда и только тогда задает нулевой элемент группы $\pi_n(X, A)$, когда существует такое отображение $g: (I^{n+1}, I^n) \rightarrow (X, A)$, что $f = g|_{J^n}$.*

Доказательство леммы 2. Пусть α — элемент группы $\pi_n(E, F_A)$, задаваемый отображением $\bar{h}_1: (J^n, \dot{I}^n) \rightarrow (E, F_A)$ (или, точнее, отображением $\bar{h}_1: (J^n, \dot{I}^n, 0) \rightarrow (E, F_A, e_0)$, где $e_0 = \bar{h}_1(0)$). Тогда элемент $p_n(\alpha) \in \pi_n(B, A)$ будет задаваться отображением $h_1: (J^n, \dot{I}^n) \rightarrow (B, A)$, а потому и гомотопным ему отображением $h_0: (J^n, \dot{I}^n) \rightarrow (B, A)$. Но по условию $h_0 = g|_{J^n}$, где $g: (I^{n+1}, I^n) \rightarrow (B, A)$, откуда, согласно только что сделанному замечанию, следует, что отображение h_0 задает нулевой элемент группы $\pi_n(X, A)$. Таким образом, $p_n(\alpha) = 0$, и зна-

чит, ввиду предположенной мономорфности гомоморфизма p_n , в группе $\pi_n(E, F_A)$ имеет место равенство $\alpha = 0$.

Следовательно, существует такое отображение $g': (I^{n+1}, I^n) \rightarrow (E, F_A)$, что $g'|_{J^n} = \bar{h}_1$. Ясно, что формула

$$G(t, t_{n+1}, t_{n+2}) = \begin{cases} g(t, t_{n+2}), & \text{если } t_{n+1} = 0, \\ h_{t_{n+1}}(t, t_{n+2}), & \text{если } t \in I^n \text{ или } t_{n+2} = 1, \\ (p \circ g')(t, t_{n+2}), & \text{если } t_{n+1} = 1, \end{cases}$$

где $t \in I^n$, а $t_{n+1}, t_{n+2} \in I$, корректно определяет некоторое отображение $G: (J^{n+1}, I^{n+1}) \rightarrow (B, A)$. Пусть β — соответствующий элемент группы $\pi_{n+1}(B, A)$. Поскольку гомоморфизм p_{n+1} является по условию эпиморфизмом, существует отображение $f: (I^{n+1}, I^{n+1}, J^{n+1}) \rightarrow (E, F_A, e_0)$, обладающее тем свойством, что отображение $p \circ f$ задает элемент $-\beta$ группы $\pi_{n+1}(B, A)$.

Пусть $\tilde{K}^{n+1}$ — образ подкуба K^{n+1} куба I^{n+1} при гомеоморфизме $\chi: (I^{n+1}, I^{n+1}) \rightarrow (J^{n+1}, I^{n+1})$, посредством которого отображение G мы трактуем как отображение $(I^{n+1}, I^{n+1}) \rightarrow (B, A)$. Ясно, что, выбрав соответствующим образом гомеоморфизм χ , мы без ограничения общности можем считать, что $\tilde{K}^{n+1}$ содержится в грани $t_{n+1} = 1$ куба I^{n+2} , т. е. после отождествления этой грани с кубом I^{n+1} — в кубе I^{n+1} (и не пересекается с J^n). При этом можно, кроме того, считать, что отображение g' переводит $\tilde{K}^{n+1}$ в точку e_0 . Тогда отображение G , рассматриваемое как отображение $(I^{n+1}, I^{n+1}) \rightarrow (B, A)$, будет переводить куб K^{n+1} в точку e_0 , и потому будет допускать вклеивание отображения f . Соответствующее отображение H будет, согласно лемме 1, задавать элемент $-\beta + \beta = 0$ группы $\pi_n(B, A)$, и потому будет существовать отображение $H': (I^{n+2}, I^{n+1}) \rightarrow (B, A)$, совпадающее на J^{n+1} с отображением H . В силу отождествления $I^{n+2} = I^{n+1} \times I$ мы это отображение можем рассматривать как гомотопию $g_t: I^{n+1} \rightarrow B$. При этом соотношение $H'|_{J^{n+1}} = H$ будет равносильно соотношениям $g_0 = g$, $g_t|_{J^n} = h_t$, $t \in I$, и $g_1 = p \circ \bar{g}$, где $\bar{g}$ — отображение $(I^{n+1}, I^n) \rightarrow (E, F_A)$, совпадающее вне $\tilde{K}^{n+1}$ с отображением g' , а на $\tilde{K}^{n+1}$ — с отображением f , рассматриваемым в силу гомеоморфизма $\tilde{K}^{n+1} \rightarrow K^{n+1} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} I^{n+1}$ как отображение $\tilde{K}^{n+1} \rightarrow E$.

Для завершения доказательства остается заметить, что поскольку $\bar{K}^{n+1}$ не пересекается с J^n , отображение $\bar{g}$ совпадает на J^n с отображением $\bar{g}$, а значит, с отображением $\bar{h}_1$. $\square$

Для вывода из леммы 2 теоремы 1 нам понадобится одна общетопологическая (или, лучше сказать, элементарно-геометрическая) лемма, касающаяся кубируемых (см. Дополнение к лекции 7) множеств.

Для сокращения формулировок будем называть открытое покрытие $\{U_\alpha, \alpha \in A\}$ топологического пространства X *аддитивно насыщенным покрытием*, если для любых индексов $\alpha, \beta \in A$ пересечение $U_\alpha \cap U_\beta$ является объединением элементов покрытия $\{U_\alpha\}$.

Лемма 3. Пусть Q — компактное кубируемое множество, X — топологическое пространство, $\{U_\alpha, \alpha \in A\}$ — аддитивно насыщенное открытое покрытие пространства X и $F: Q \rightarrow X$ — непрерывное отображение. Существует такой кубильяж K множества Q и такое отображение $\varphi: K \rightarrow A$, что:

(i) для любого кубика $\sigma \in K$ имеет место включение

$$F(\sigma) \subset U_{\varphi(\sigma)};$$

(ii) если кубик $\sigma \in K$ является гранью кубика $\tau \in K$, то $U_{\varphi(\sigma)} \subset U_{\varphi(\tau)}$.

Кроме того, если задано такое конечное семейство $\{C_\beta, \beta \in B \subset A\}$ замкнутых множеств $C_\beta \subset Q$, что $F(C_\beta) \subset U_\beta$ для любого $\beta \in B$, то отображение φ можно выбрать так, чтобы при $\sigma \cap C_\beta \neq \emptyset$ имело место включение

$$(iii) \quad U_{\varphi(\sigma)} \subset U_\beta, \quad \sigma \in K, \quad \beta \in B.$$

Доказательство. Назовем кубильяж K множества Q *удовлетворительным с размерности $n \geq 0$* , если на множестве $K^{(n)}$ всех его кубиков размерности, большей или равной n , задано такое отображение $\varphi: K^{(n)} \rightarrow A$, что условия (i), (ii) и (iii) выполнены для всех кубиков $\sigma \in K^{(n)}$. Утверждение леммы означает, что существует кубильяж удовлетворительный с размерности 0. Поскольку при n , большем размерности множества Q , любой кубильяж этого множества, очевидно, удовлетворителен с размерности n , для доказательства леммы достаточно поэтому доказать, что из существования удовлетворительного с размерности $n+1$ кубильяжа

следует существование кубильяжа, удовлетворительного с размерности n .

Имея это в виду, рассмотрим произвольный кубильяж K множества Q , удовлетворительный с размерности $n+1$. Пусть σ — произвольный n -мерный кубик этого кубильяжа, и пусть $x \in \sigma$. Ввиду условий, наложенных на покрытие $\{U_\alpha\}$, существует такой элемент $U_{\alpha(x)}$ этого покрытия, содержащий точку $f(x) \in X$, что $U_{\alpha(x)} \subset U_{\varphi(\tau)}$ для любого $(n+1)$ -мерного кубика $\tau \in K$, имеющего кубик σ своей гранью, и $U_{\alpha(x)} \subset U_\beta$ для любого индекса $\beta \in B$, обладающего тем свойством, что $x \in C_\beta$. В силу непрерывности отображения $F: Q \rightarrow X$ и компактности множеств C_β точка $x \in Q$ обладает в Q такой окрестностью $V(x)$, что $F(V(x)) \subset U_{\alpha(x)}$ и $V(x) \cap C_\beta = \emptyset$, если $x \notin C_\beta$. Окрестности $V(x)$, $x \in \sigma$, составляют открытое покрытие кубика σ , и потому существует настолько мелкий кубильяж K_σ этого кубика, что каждый кубик кубильяжа K_σ содержится хотя бы в одной окрестности вида $V(x)$. Поскольку любой более мелкий кубильяж кубика σ также обладает этим свойством, мы в силу конечности кубильяжа K можем считать, что для всех n -мерных кубиков $\sigma \in K$ кубильяжи K_σ имеют одну и ту же мелкость N .

Рассмотрим кубильяж K_1 мелкости N множества Q . Любой его кубик σ_1 размерности, большей или равной n , содержится в единственном кубике $\sigma \in K$ минимальной размерности $\geq n$. В случае, когда $\dim \sigma \geq n+1$ (и потому определен индекс $\varphi(\sigma)$), мы положим $\varphi_1(\sigma_1) = \varphi(\sigma)$. Если же $\dim \sigma = n$, то по построению $\sigma_1 \in K_\sigma$, и потому существует точка $x \in \sigma$, обладающая тем свойством, что $\sigma_1 \subset V(x)$. Произвольно выбрав такую точку x , мы положим $\varphi_1(\sigma_1) = \alpha(x)$. Непосредственная проверка показывает, что кубильяж K_1 по отношению к так построенному отображению $\varphi_1: K_1^{(n)} \rightarrow A$ является кубильяжем, удовлетворительным с размерности n . $\square$

Теперь мы можем рассмотреть вопрос о том, что остается от аксиомы НГ в случае, когда отображение $p: E \rightarrow B$ удовлетворяет условиям теоремы 1.

Лемма 4. Пусть для отображения $p: E \rightarrow B$ существует аддитивно насыщенное открытое покрытие $\{U_\alpha; \alpha \in A\}$ пространства B , состоящее из отмеченных множеств, и пусть для компактного кубируемого множества P и непрерывного отображения $\bar{F}: P \times I \rightarrow B$ задано такое конечное семейство $\{C_\beta, \beta \in B \subseteq A\}$ замкнутых

множеств $C_\beta \subset P \times I$, что $F(C_\beta) \subset U_\beta$ для каждого $\beta \in B$. Тогда для любой коммутативной диаграммы вида

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\bar{f}} & E \\ \sigma_0 \downarrow & & \downarrow p \\ P \times I & \xrightarrow{F} & B \end{array}$$

существует такое отображение $\bar{F}: P \times I \rightarrow E$, что $\bar{F} \circ \sigma_0 = \bar{f}$, и такая гомотопия $G_t: P \times I \rightarrow B$, что $G_0 = F$, $G_1 = p \circ \bar{F}$, $G_t \circ \sigma_0 = F \circ \sigma_0$, $G_t(C_\beta) \subset U_\beta$ для любых $t \in I$, $\beta \in B$.

Доказательство. Согласно лемме 3 (примененной к отображению F и кубируемому множеству $Q = P \times I$) существует кубильяж K множества $Q = P \times I$ и отображение $\varphi: K \rightarrow A$, обладающие свойствами (i), (ii) и (iii). Мы усилим лемму 4, потребовав, чтобы для любого кубика $\sigma \in K$ и любого $t \in I$ имело место включение $G_t(\sigma) \subset U_{\varphi(\sigma)}$. В силу свойства (iii) это, очевидно, обеспечит нам выполнение включения $G_t(C_\beta) \subset U_\beta$.

Каждый кубик $\sigma \in K$ имеет вид $\tau \times \rho$, где τ принадлежит некоторому кубильяжу множества P , а ρ — некоторому кубильяжу отрезка I , т. е. является либо одной из конечного числа точек вида $k2^{-N}$, $k = 0, 1, \dots, 2^N$, либо одним из отрезков $I_k = [k2^{-N}, (k+1)2^{-N}]$, $0 \leq k \leq 2^N - 1$. Сосредоточим наше внимание на кубиках вида $\tau \times I_k$. Мы упорядочим эти кубики, считая, что $\tau_1 \times I_{k_1} < \tau_2 \times I_{k_2}$, если $k_1 < k_2$, а при $k_1 = k_2$, если $\dim \tau_1 < \dim \tau_2$ (кубики с $k_1 = k_2$ и $\dim \tau_1 = \dim \tau_2$ упорядочим произвольным образом). Построение отображения F и гомотопии G_t мы проведем по отдельности на каждом кубике вида $\tau \times I_k$, считая, что на предыдущих кубиках они уже построены. На каждом шаге (в том числе и начальном) этого построения мы — после отождествления кубика $\tau \times I_k$ с кубом $I^n \times I = I^{n+1}$, $n = \dim \tau$, — будем иметь дело с ситуацией леммы 2, где роль пространства B будет играть множество $U = U_{\varphi(\tau \times I_k)}$, роль пространства E — его прообраз $F_U = p^{-1}U$, роль отображения p — ограничение p_U данного нам отображения p на этом прообразе и роль подпространства A — множество $V = U_{\varphi(\sigma_k)}$, $\sigma_k = \tau \times \{k2^{-N}\}$. Условия, наложенные в лемме 2 на гомоморфизмы p_n и p_{n+1} , будут выполнены в силу отмеченности множеств U и V (заметим, что если множество $V \subset U \subset B$ отмечено по

отношению к отображению $p: E \rightarrow B$, то оно будет отмечено и по отношению к отображению $p_U: F_U \rightarrow U$. Условие, что отображение $\bar{F}$ и гомотопия G_t построены для предыдущих кубиков кубильяжа K , даст нам отображения g, h_t и $\bar{k}_1$, а отображения g_t и $\bar{g}$ позволят распространить $\bar{F}$ и G_t на кубик $\tau \times I_k$. Тем самым отображение $\bar{F}$ и гомотопия G_t будут по индукции построены на всех кубиках $\tau \times I_k$, т. е. на всем множестве $Q = P \times I$. $\square$

Обратимся теперь непосредственно к доказательству теоремы 1.

Доказательство теоремы 1. Достаточно показать, что отображение $p: E \rightarrow B$, удовлетворяющее условиям теоремы 1, обладает тем свойством, что для любой точки $e_0 \in E$ и любого содержащего точку $b_0 = p(e_0)$ элемента U_{α_0} покрытия $\{U_{\alpha}\}$ индуцированный отображением $p: (E, F_{U_{\alpha_0}}, e_0) \rightarrow (B, U_{\alpha_0}, b_0)$ гомоморфизм

$$p_*: \pi_n(E, F_{U_{\alpha_0}}, e_0) \rightarrow \pi_n(B, U_{\alpha_0}, b_0), \quad n > 0,$$

является изоморфизмом. Действительно, тогда в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & \pi_{n+1}(E, F_{U_{\alpha_0}}) & \rightarrow & \pi_n(F_{U_{\alpha_0}}, F_{b_0}) & \rightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \rightarrow & \pi_{n+1}(B, U_{\alpha_0}) & \xrightarrow{\quad} & \pi_n U_{\alpha_0} & \rightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & \rightarrow & \pi_n(E, F_{b_0}) & \rightarrow & \pi_n(E, F_{U_{\alpha_0}}) & \rightarrow & \pi_{n-1}(F_{U_{\alpha_0}}, F_{b_0}) \rightarrow \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & \rightarrow & \pi_n B & \xrightarrow{\quad} & \pi_n(B, U_{\alpha_0}) & \xrightarrow{\quad} & \pi_{n-1} U_{\alpha_0} \rightarrow \dots \end{array}$$

строки которой являются гомотопическими последовательностями, соответственно, тройки $(E, F_{U_{\alpha_0}}, F_0)$ и пары (B, U_{α_0}) , а вертикальные гомоморфизмы индуцированы отображением p , все вертикальные гомоморфизмы, кроме центральных гомоморфизмов $\pi_n(E, F_{b_0}) \rightarrow \pi_n B$, будут изоморфизмами. Поэтому в силу леммы о пяти гомоморфизмах последние гомоморфизмы также будут изоморфизмами, т. е. отображение $p: E \rightarrow B$ будет слабым расслоением.

Мономорфность гомоморфизма p_* . Пусть ξ — такой элемент группы $\pi_n(E, F_{U_{\alpha_0}}, e_0)$, что $p_* \xi = 0$. Условие $p_* \xi = 0$ означает, что для отображения $f:$

$(I^n, \dot{I}^n, J^{n-1}) \rightarrow (E, F_{U_{\alpha_0}}, c_0)$, задающего элемент ξ , существует такая гомотопия $f_t: (I^n, \dot{I}^n) \rightarrow (B, U_{\alpha_0})$, что $f_0 = p \circ f$ и $f_1 = \text{const}$. Применим лемму 4, принимая за P куб I^n (и, значит, за Q — куб I^{n+1}), за $\bar{f}$ — отображение f , а за F — гомотопию $\bar{f}_t$ (трактуемую как отображение $I^n \times I \rightarrow B$). За семейство $\{C_\beta\}$ мы примем семейство, состоящее из единственного множества $C_{\alpha_0} = (\dot{I}^n \times I) \times \times (I^n \times 1) = J^n$ (так что $B = \{\alpha_0\}$). Ясно, что все условия леммы 4 выполнены, и потому существуют такое отображение $\bar{F}: I^{n+1} \rightarrow E$, что $\bar{F} \circ \sigma_0 = f$, и такая гомотопия $G_t: I^{n+1} \rightarrow B$, что $G_0 = F$, $G_1 = p \circ \bar{F}$, $G_t \circ \sigma_0 = f_0$ и $G_t(J^n) \subset U_{\alpha_0}$ для любого $t \in I$, где, как всегда, $\sigma_0: I^n \rightarrow I^{n+1}$ — вложение $t \mapsto (t, 0)$. Так как $G_1 = p \circ \bar{F}$ и $G_1(J^n) \subset U_{\alpha_0}$, то отображение $\bar{F}$, трактуемое как гомотопия из I^n в E , является на самом деле гомотопией (свободной) из $(I^n, \dot{I}^n)$ в (E, U_{α_0}) , связывающей отображение f со стянутым в U_{α_0} отображением. Поскольку из существования такой гомотопии вытекает, как мы знаем (см. лекцию 8), равенство $\xi = 0$, этим доказано, что гомоморфизм p_* является мономорфизмом.

Эпиморфность гомоморфизма p_* . Элементами группы $\pi_n(B, U_{\alpha_0})$ можно считать гомотопические классы отображений $F: (I^n, \dot{I}^n, I^{n-1}) \rightarrow (B, U_{\alpha_0}, b_0)$, т. е. таких отображений $F: I^n \rightarrow B$, что $F(J^{n-1}) \subset U_{\alpha_0}$ и $F(I^{n-1}) = b_0$. Каждое такое отображение F вместе с отображением $f = \text{const}_{e_0}: I^{n-1} \rightarrow E$ удовлетворяет (при $P = I^{n-1}$) условиям леммы 4 (с $B = \{\alpha_0\}$ и $C_{\alpha_0} = J^{n-1}$). Поэтому существует такое отображение $\bar{F}: I^n \rightarrow E$, что $\bar{F} \circ \sigma_0 = \text{const}_{e_0}$ (т. е. $\bar{F}(I^{n-1}) = e_0$), и такая гомотопия $G_t: I^n \rightarrow B$, что $G_0 = F$, $G_1 = p \circ \bar{F}$, $G_t \circ \sigma_0 = \text{const}_{b_0}$ и $G_t(J^{n-1}) \subset U_{\alpha_0}$ для любого $t \in I$. Условия, которым удовлетворяет гомотопия G_t , означают, что эта гомотопия представляет собой гомотопию отображений $(I^n, \dot{I}^n, I^{n-1}) \rightarrow (B, U_{\alpha_0}, b_0)$, связывающую отображение F с отображением $p \circ \bar{F}$. Следовательно, во-первых, $p \circ \bar{F}$ является отображением $(I^n, \dot{I}^n, I^{n-1}) \rightarrow (B, U_{\alpha_0}, b_0)$ и потому задает некоторый элемент группы $\pi_n(B, U_{\alpha_0})$, а во-вторых, этот элемент совпадает с элементом $\xi \in \pi_n(B, U_{\alpha_0})$, задаваемым отображением F . Поэтому отображение $\bar{F}$ будет

отображением $(I^n, \dot{I}^n, I^{n-1}) \rightarrow (E, F_{U_{\alpha_0}}, e_0)$, и задаваемый этим отображением элемент $\bar{\xi}$ группы $\pi_n(E, F_{U_{\alpha_0}})$ будет обладать тем свойством, что $p_*(\bar{\xi}) = \xi$.

Тем самым теорема 1 полностью доказана. $\square$

Мы применим теорему 1 к доказательству одной полезной леммы, впервые установленной Джеймсом. В этой лемме участвуют два пунктированных пространства X и Y , приведенный конус C^*X над пространством X , пунктированное отображение $f: X \times Y \rightarrow Y$ и пространство $E = (C^*X \times Y) \cup Y$, получающееся приклеиванием произведения $C^*X \times Y$ к пространству Y посредством отображения f (так как $X \subset C^*X$, то $X \times Y \subset C^*X \times Y$). Мы будем говорить, что пространство E получено применением конструкции Джеймса к отображению f .

Пусть $p: E \rightarrow S^*X$ — отображение, определенное (очевидно, корректно) формулами

$$p([x, t]^c, y) = [x, t]^s, p(y) = x_0, \quad x \in X, \quad y \in Y, \quad t \in I.$$

Предложение 1 (лемма Джеймса). Если отмеченная точка $x_0 \in X$ обладает стягиваемой $\text{rel } x_0$ окрестностью U_0 и для любой точки $x \in X$ отображение $y \mapsto f(x, y)$, $y \in Y$, из Y в Y является гомотопической эквивалентностью, то отображение p представляет собой слабое расслоение.

Докажем сначала следующую лемму.

Лемма 5. В условиях предложения 1 для основания X конуса C^*X существует окрестность U , строгим деформационным ретрактом которой оно является.

Доказательство. Пусть U — подмножество (очевидно, открытое) конуса C^*X , состоящее из таких точек $[x, t]$, что либо $x \in U_0$, либо $t \notin [1/3, 2/3]$. Ясно, что формула

$$g_\tau[x, t] = [x, p(t, \tau)], \quad [x, t] \in U,$$

где

$$p(t, \tau) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq t \leq \frac{\tau}{3}, \\ \frac{3t - \tau}{3 - 2\tau}, & \text{если } \frac{\tau}{3} \leq t \leq \frac{3 - \tau}{3}, \\ 1, & \text{если } \frac{3 - \tau}{3} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

определяет неподвижную на X гомотопию, связывающую тождественное отображение $g_0 = \text{id}: U \rightarrow U$ с отображе-

нием $g_1: U \rightarrow U$, являющимся отображением на объединение $X \cup C^*U_0$, где C^*U_0 — содержащийся в C^*X конус над окрестностью U_0 . С другой стороны, поскольку окрестность U_0 по условию стягиваема $\text{rel } x_0$, она является строгим деформационным ретрактом конуса C^*U_0 , т. е. существует такая неподвижная на U_0 гомотопия $h_\tau: C^*U_0 \rightarrow C^*U_0$, что $h_0 = \text{id}$ и $h^1(C^*U_0) = U_0$. Доопределив эту гомотопию на X , считая, что $h_\tau = \text{id}$ на X , и положив

$$f_\tau = \begin{cases} g_{2\tau}, & \text{если } 0 \leq \tau \leq 1/2, \\ h_{2\tau-1} \circ g_1, & \text{если } 1/2 \leq \tau \leq 1, \end{cases}$$

мы, очевидно, корректно определим неподвижную на X гомотопию, связывающую тождественное отображение $U \rightarrow U$ с отображением $i \circ r$, где $i: X \rightarrow U$ — вложение, а $r: U \rightarrow X$ — некоторая ретракция (представляющая собой отображение $h_1 \circ g_1$, рассматриваемое как отображение в X). Следовательно, $U \searrow X$. $\square$

Пусть V — образ окрестности U при отображении факторизации $C^*X \rightarrow S^*X$. Поскольку рассматриваемое как отображение $(C^*X, X) \rightarrow (S^*X, x_0)$ это отображение является относительным гомеоморфизмом, ретракция $r: U \rightarrow X$ определяет строгую деформационную ретракцию $V \rightarrow x_0$. Таким образом, окрестность V стягиваема $\text{rel } x_0$.

Рассмотрим множество $F_V = p^{-1}V$.

Лемма 6. Для любой точки $v \in V$ множество $F_v = p^{-1}(v)$ является деформационным ретрактом множества F_V .

Доказательство. В силу стандартных отождествлений $F_V = ((U \setminus X) \times Y) \cup Y$, причем

$$p(u, y) = u^S, \quad p(y) = x_0,$$

для любых точек $u \in U \setminus X$ и $y \in Y$, где u^S — образ точки u в V (т. е. $u^S = [x, t]^S$, если $u = [x, t]^C$), а x_0 — отмеченная точка надстройки S^*X . При этом построенная выше гомотопия $f_\tau: U \rightarrow U$ очевидным образом определяет неподвижную на Y гомотопию $F_V \rightarrow F_V$, связывающую тождественное отображение с отображением $\bar{i} \circ \bar{r}$, где $\bar{i}: Y \rightarrow F_V$ — вложение, а $\bar{r}: F_V \rightarrow Y$, определенная (очевидно, корректно) формулами

$$\bar{r}(u, y) = f(ru, y), \quad \bar{r}(y) = y, \quad u \in U \setminus X, \quad y \in Y.$$

Поскольку $F_{x_0} = Y$, это доказывает лемму 6 при $v = x_0$.

Пусть $v \neq x_0$. Тогда $F_v = u \times Y$, где $u \in U$ — такая (очевидно, единственная) точка, что $u^S = v$. Ограничение

$\bar{r}_v$ ретракции $\bar{r}$ на F_v лишь гомеоморфизмом $(u, y) \mapsto y$ отличается от гомотопической эквивалентности $y \mapsto \bar{f}(x, y)$, где $x = r(u)$, и потому само является гомотопической эквивалентностью. Пусть $g: Y \rightarrow F_v$ — обратная гомотопическая эквивалентность, а $j: F_v \rightarrow F_V$ — вложение. Тогда $(g \circ \bar{r}) \circ j = g \circ \bar{r}_v \sim \text{id}$ и $j \circ (g \circ \bar{r}) \sim \bar{i} \circ \bar{r} \circ j \circ g \circ \bar{r} = \bar{i} \circ \bar{r}_v \circ g \circ \bar{r} \sim \bar{i} \circ \bar{r} \sim \text{id}$, и, значит, отображение j является гомотопической эквивалентностью. Поскольку пара (F_V, F_v) является, очевидно, замкнутой парой Борсука, это возможно (следствие 1 предложения 4 лекции 2) только тогда, когда $F_V \cong F_v$. $\square$

Доказательство предложения 1. Пусть W — дополнение в S^*X точки x_0 (или, что равносильно, дополнение в C^*X пространства X). Множество W открыто, его прообраз $p^{-1}W \subset E$ является произведением $W \times Y$, а отображение p на $F_W = p^{-1}W$ — проекцией $W \times Y \rightarrow Y$. Аналогичными свойствами обладает, конечно, и пересечение $V \cap W$. Это означает, что множества $V \cap W$ и W открыты и отмечены. Поэтому в силу теоремы 1 для доказательства предложения 1 достаточно доказать, что отмечено множество V , т. е. что для любой точки $v \in V$ и любого $n \geq 0$ отображение p индуцирует изоморфизм p_* группы $\pi_n(F_V, F_v)$ на группу $\pi_n(V, v)$. Но в силу стягиваемости окрестности V и только что доказанной (см. лемму 6) деформационной ретрагируемости множества F_V на слой F_v , обе эти группы равны нулю. Следовательно, отображение p_* автоматически является изоморфизмом. $\square$

Джеймс нашел замечательное применение предложения 1 к теории гомотопических групп. Мы займемся им в следующей лекции.

ДОПОЛНЕНИЕ

Аксиома о накрытии замедленных гомотопий. — Аксиома о сверхмягком распространении накрывающей гомотопии. — Теорема Дольда для гомотопических расслоений.

Для расслоений справедлива теорема 1 из Дополнения к лекции 1, а для слабых расслоений — теорема 1 лекции 9. Естественен вопрос: имеет ли место аналогичная теорема для гомотопических расслоений?

Мы покажем, что ответ на этот вопрос утвердителен, более того, что в этом отношении гомотопические рас-

слоения ведут себя в точности так же, как сильные рас-
слоения.

Предварительно нам будет нужно доказать еще одно
характеристическое свойство гомотопических расслоений.

Гомотопию $F: X \times I \rightarrow B$ мы назовем *замедленной*,
если существует такое число $t_0 > 0$, что при $0 \leq t \leq t_0$
для любой точки $x \in X$ справедливо равенство $F(x, t) =$
 $= F(x, 0)$.

Определение 1. Говорят, что отображение $p: E \rightarrow B$
удовлетворяет аксиоме о накрытии замедленных гомото-
пий (коротко, аксиоме НЗГ), если для любой диаграммы
вида

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & E \\ \sigma_0 \downarrow & \nearrow F & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{F} & B \end{array}$$

в которой гомотопия F является замедленной гомото-
пией, существует накрывающая гомотопия $\bar{F}$.

Справедливо следующее — несколько неожиданное —
предложение, по новому освещающее понятие гомотопи-
ческого расслоения.

Предложение 1. Отображение $p: E \rightarrow B$ тогда и
только тогда является гомотопическим расслоением,
когда оно удовлетворяет аксиоме о накрытии замедлен-
ных гомотопий.

Доказательство. Вместе с диаграммой (1) ком-
мутативна и диаграмма, в которой гомотопия F заменена
гомотопией $F': X \times I \rightarrow B$, определенной формулой

$$F'(x, t) = F(x, (1 - t_0)t + t_0), \quad x \in X, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Поэтому в случае, когда отображение $p: E \rightarrow B$ явля-
ется гомотопическим расслоением, для так видоизмененной
диаграммы (1) существует накрывающая гомотопия
 $\bar{F}': X \times I \rightarrow E$, обладающая тем свойством, что $\bar{F}' \circ \sigma_0 \bar{f}$.
Обозначив через $G: X \times I \rightarrow E$ гомотопию над B , связы-
вающую отображение $\bar{f}$ с отображением $\bar{F}' \circ \sigma_0$, мы

положим

$$\begin{aligned}\bar{F}(x, t) = \\ = \begin{cases} G\left(x, \frac{t}{t_0}\right), & \text{если } 0 \leq t \leq t_0, \\ \bar{F}'\left(x, \frac{t-t_0}{1-t_0}\right), & \text{если } t_0 \leq t \leq 1, \end{cases} \quad x \in X, 0 \leq t \leq 1.\end{aligned}$$

Автоматическая проверка показывает, что тем самым мы получаем гомотопию $\bar{F}: X \times I \rightarrow E$, замыкающую диаграмму (1). Таким образом, гомотопическое расслоение $p: E \rightarrow B$ удовлетворяет аксиоме НЗГ.

Обратно, предположив, что отображение $p: E \rightarrow B$ удовлетворяет аксиоме НЗГ, рассмотрим произвольную диаграмму (1) (с, вообще говоря, незамедленной гомотопией F). Ясно, что формула

$$\begin{aligned}F^*(x, t) = \\ = \begin{cases} F(x, 0), & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ F(x, 2t-1), & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases} \quad x \in X, 0 \leq t \leq 1,\end{aligned}$$

определяет замедленную гомотопию $F^*: X \times I \rightarrow B$ (с $t_0 = 1/2$), для которой также имеет место коммутативная диаграмма (1) (с заменой F на F^*). Поэтому для гомотопии F^* существует накрывающая гомотопия $\bar{F}^*: X \times I \rightarrow E$. Положив

$$(2) \quad \begin{aligned}G(x, t) &= \bar{F}^*\left(x, \frac{t}{2}\right), \quad x \in X, 0 \leq t \leq 1, \\ \bar{F}(x, t) &= \bar{F}^*\left(x, \frac{1+t}{2}\right), \quad x \in X, 0 \leq t \leq 1,\end{aligned}$$

мы, очевидно, получим такие гомотопии $G: X \times I \rightarrow E$ и $\bar{F}: X \times I \rightarrow E$, что G является гомотопией над B , связывающей отображение $\bar{f}$ с отображением $\bar{F} \circ \sigma_0$, а гомотопия $\bar{F}$ накрывает гомотопию F . Следовательно, отображение $p: E \rightarrow B$ является гомотопическим расслоением. $\square$

Пусть $\text{Cocyl}(F, \bar{f})$ — подпространство коцилиндра $\text{Cocyl } \bar{f}$, состоящее из таких точек (x, u) , $x \in X, u: I \rightarrow E$, что

$$(p \circ u)(t) = F(x, t)$$

для любой точки $(x, t) \in X \times I$ (и, конечно, $u(0) = \bar{f}(x)$).

Следствие. *Отображение $p: E \rightarrow B$ тогда и только тогда является гомотопическим расслоением, когда для любой диаграммы (1) с замедленной гомотопией F проекция*

$$\text{Cosyl}(F, \bar{f}) \rightarrow X$$

обладает сечением. $\square$

Аналогичным образом может быть перенесена на случай гомотопических расслоений и аксиома МРНГ.

Определение 2. Пусть для диаграммы

$$(3) \quad \begin{array}{ccc} \tilde{A} & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ \downarrow \tilde{\sigma}_0 & \nearrow \tilde{F} & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{F} & B \end{array}$$

где $A \subset X$, $\tilde{A} = X \times 0 \cup A \times I$ и $\tilde{\sigma}_0$ — вложение, существует отображение $\tilde{F}': (\widetilde{U \times I})_{t_0} \rightarrow E$, замыкающее диаграмму

$$(4) \quad \begin{array}{ccc} \tilde{A} & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ \downarrow \tilde{\sigma}_0 & \nearrow \tilde{F}' & \downarrow p \\ (\widetilde{U \times I})_{t_0} & \xrightarrow{F'} & B \end{array}$$

в которой $t_0 > 0$, U — некоторая замкнутая функциональная окрестность A в X , $(\widetilde{U \times I})_{t_0} = (X \times [0, t_0]) \cup (U \times I)$ и F' — ограничение отображения F на $(\widetilde{U \times I})_{t_0}$. Тогда, если существует гомотопия $\tilde{F}: X \times I \rightarrow E$, замыкающая диаграмму (3), то говорят, что отображение $p: E \rightarrow B$ удовлетворяет аксиоме о сверхмягком распространении накрывающей гомотопии (короче, аксиоме СМРНГ).

Предложение 2. *Отображение $p: E \rightarrow B$ тогда и только тогда является гомотопическим расслоением, когда оно удовлетворяет аксиоме о сверхмягком распространении накрывающей гомотопии.*

Доказательство. Пусть для гомотопического расслоения $p: E \rightarrow B$ задана диаграмма (3), для которой существует диаграмма (4) с замыкающим отображением $\tilde{F}'$.

Ясно, что без ограничения общности можно положить $t_0 = 1/2$. Обозначив через φ функцию $X \rightarrow I$, обладаю-

щую тем свойством, что $\varphi = 1$ на A и $\varphi = 0$ вне U , мы рассмотрим — очевидно, коммутативную — диаграмму

$$(5) \quad \begin{array}{ccc} X \times [0, 1/2] & \xrightarrow{\bar{F}} & E \\ \sigma_0 \downarrow & \searrow \bar{g} & \downarrow p \\ X \times [0, 1/2] \times I & \xrightarrow{a} & B \end{array}$$

отображения $\bar{g}$ и G которой определены формулами

$$\begin{aligned} \bar{g}(x, \tau) &= \bar{F}'(x, \min(\tau + \varphi(x), 1)), \quad x \in X, \quad 0 \leq \tau \leq 1/2, \\ G(x, \tau, t) &= F(x, \min(t + \tau - t\tau + \varphi(x), 1)), \\ &\quad x \in X, \quad 0 \leq \tau \leq 1/2, \quad 0 \leq t \leq 1 \end{aligned}$$

(формула для $\bar{g}$ имеет смысл, так как $\varphi(x) = 0$ при $x \notin U$). Поскольку отображение p является гомотопическим расслоением, существует такое отображение $\bar{G}: (X \times [0, 1/2]) \times I \rightarrow E$, что $p \circ \bar{G} = G$ и $\bar{G} \circ \sigma_0 = \bar{g}$.

Пусть $H: X \times [0, 1/2] \times I \rightarrow E$ — гомотопия над B (т. е. такая, что точка $(p \circ H)(x, \tau, t)$ не зависит от t), связывающая отображение $\bar{g}$ с отображением $\bar{G} \circ \sigma_0$. Тогда формула

$$\bar{F}(x, t) = \begin{cases} \bar{F}'(x, t), & \text{если } 0 \leq t \leq \varphi(x), \\ H(x, t - \varphi(x), 2(t - \varphi(x))), & \text{если } 0 \leq t - \varphi(x) \leq 1/2, \\ \bar{G}\left(x, \frac{1}{2}, 2(t - \varphi(x)) - 1\right), & \text{если } 1/2 \leq t - \varphi(x) \leq 1, \end{cases}$$

будет (см. рис. 21) определять гомотопию $F: X \times I \rightarrow E$, замыкающую диаграмму (3). Этим доказано, что любое гомотопическое расслоение удовлетворяет аксиоме **СМРНГ**.

Обратно, так как любая диаграмма вида (1) является диаграммой (3) с $A = \emptyset$ и так как — в предположении, что гомотопия F замедленна — для соответствующей диаграммы (4) (с $U = \emptyset$) отображение $\bar{F}'$ может быть задано формулой

$$\bar{F}'(x, t) = \bar{f}(x), \quad x \in X, \quad 0 \leq t \leq t_0,$$

то любое отображение $p: E \rightarrow B$, удовлетворяющее аксиоме **СМРНГ** будет удовлетворять аксиоме **НЗГ** и, значит, будет гомотопическим расслоением. $\square$

гомотопии F , рассматриваемой как отображение $X \rightarrow B'$ покрытия $\{V_\beta; \beta \in B\}$ пространства B' , отвечающего в силу следствия 2 леммы 3 из Дополнения к лекции 1 покрытию $\{U_\alpha\}$ пространства B .

Согласно описанному в Дополнении к лекции 1 отождествлениям для любой точки $x \in W_\beta$ путь $F(x) \in V_\beta \subset B'$ можно рассматривать как последовательность $(u_1^x, \dots, u_{n_\beta}^x)$ путей $u_1^x: I \rightarrow U_{\alpha_1}, \dots, u_{n_\beta}^x: I \rightarrow U_{\alpha_{n_\beta}}$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_{n_\beta}$ — некоторые индексы из A (зависящие только от индекса $\beta \in B$), причем $u_i^x(0) = u_{i-1}^x(1)$ для любого $i > 1$. В соответствии с этим любой путь $v: I \rightarrow E$, для которого $p \circ v = F(x)$, можно отождествить с последовательностью $(v_1, \dots, v_{n_\beta})$ таких путей $v_1: I \rightarrow p^{-1}(U_{\alpha_1}), \dots, v_{n_\beta}: I \rightarrow p^{-1}(U_{\alpha_{n_\beta}})$, что $p \circ v_1 = u_1^x, \dots, p \circ v_{n_\beta} = u_{n_\beta}^x$ и $v_i(0) = v_{i-1}(1)$ при $i > 1$, и, значит, точки из $q^{-1}(W_\beta)$ — с последовательностями вида $(x, v_1, \dots, v_{n_\beta})$, где $x \in W_\beta$ и $v_1(0) = \bar{f}(x)$ (заметим, что если $x \in W_\beta$, то $p\bar{f}(x) = F(x, 0) = u_1^x(0) = U_{\alpha_1}$, и значит, $\bar{f}(x) \in p^{-1}(U_{\alpha_1})$). Поэтому каждое сечение $s: W_\beta \rightarrow \text{Cosyl}(F, \bar{f})$ отображения q над подпространством W_β будет задаваться n_β непрерывными отображениями

$$s_i: W_\beta \rightarrow p^{-1}(U_{\alpha_i}), \quad i = 1, \dots, n_\beta,$$

удовлетворяющими для любой точки $x \in W_\beta$ соотношениям

$$(6) \quad \begin{aligned} s_1(x)(0) &= \bar{f}(x), \\ s_i(x)(0) &= s_{i-1}(x)(1) \text{ при } i > 1, \\ p \circ s_i(x) &= u_i^x \text{ для любого } i = 1, \dots, n_\beta. \end{aligned}$$

Впрочем, здесь удобно отображения s_i рассматривать как гомотопии $u_\beta \times I \rightarrow p^{-1}(U_{\alpha_i})$ и соответственно этому отображения $F_i: x \mapsto u_i^x$ — как гомотопии $U_\beta \times I \rightarrow U_{\alpha_i}$. Тогда соотношения (6) будут расносильны коммутативности для каждого $i = 1, \dots, n_\beta$ диаграммы

$$(7) \quad \begin{array}{ccc} W_\beta & \xrightarrow{s_{i-1} \circ s_1} & p^{-1}(U_{\alpha_i}) \\ \downarrow \sigma_0 & \nearrow s_i & \downarrow p_i \\ W_\beta \times I & \xrightarrow{F_i} & U_{\alpha_i} \end{array} \quad p_i = p_{\alpha_i},$$

в которой при $i=1$ под отображением $s_{i-1} \circ \sigma_1$ следует понимать отображение $\bar{f}$.

Если сечение s задано только на подпространстве $A \subset W_\beta$, то, естественно, будут иметь место коммутативные диаграммы, получающиеся из диаграмм (7) заменой W_β на A .

Мы видим, следовательно, что для доказательства мягкости отображения q_β нам нужно для произвольного подпространства $A \subset W_\beta$ доказать, что из существования для некоторой его функциональной окрестности U (в W_β) таких гомотопий $\bar{s}_i: U \times I \rightarrow p^{-1}(U_{\alpha_i})$, $i=1, \dots, n_\beta$, что имеют место коммутативные диаграммы

$$(8) \quad \begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\bar{s}_{i-1} \circ \sigma_1} & p^{-1}(U_{\alpha_i}) \\ \sigma_0 \downarrow & \nearrow \bar{s}_i & \downarrow p_i \\ U \times I & \xrightarrow{F_i} & U_{\alpha_i} \end{array}$$

где при $i=1$ под $\bar{s}_{i-1} \circ \sigma_1$ понимается отображение $\bar{f}|_U$, вытекает существование таких гомотопий $s_i: W_\beta \times I \rightarrow p^{-1}(U_{\alpha_i})$, $i=1, \dots, n_\beta$, что имеют место коммутативные диаграммы (7) и

$$s_i|_A = \bar{s}_i|_A \quad \text{для любого } i=1, \dots, n_\beta.$$

С этой целью, обозначив через φ функцию $W_\beta \rightarrow I$, обладающую тем свойством, что $\varphi=0$ на A и $\varphi=1$ вне U , мы введем в рассмотрение множества

$$U_i = \varphi^{-1} \left(\left[0, 1 - \frac{i}{n_\beta} \right] \right), \quad i=1, \dots, n_\beta.$$

Ясно, что

$$A \subset U_{n_\beta} \subset \dots \subset U_{i+1} \subset U_i \subset \dots \subset U_1 \subset U$$

и множество U_i для любого $i < n_\beta$ является функциональной окрестностью множества U_{i+1} , а множество U — функциональной окрестностью множества U_1 . Мы построим гомотопии s_i индукцией по i , требуя дополнительно, чтобы для каждого $i=1, \dots, n_\beta$ имело место равенство

$$s_i|_{U_i \times I} = \bar{s}_i|_{U_i \times I},$$

т. е. чтобы имела место коммутативная диаграмма

$$(9) \quad \begin{array}{ccc} \tilde{U}_i & \xrightarrow{\bar{f}_i} & p^{-1}(U_{\alpha_i}) \\ \tilde{\sigma}_0 \downarrow & \searrow \bar{s}_i & \downarrow p_i \\ W_\beta \times I & \xrightarrow{f_i} & U_{\alpha_i} \end{array}$$

где $\tilde{U}_i = (W_\beta \times 0) \cup (U_i \times I)$, $\tilde{\sigma}_0$ — вложение, а $\bar{f}_i$ — отображение, определенное формулами

$$\bar{f}_i(x, t) = \begin{cases} s_{i-1}(x, 1), & \text{если } t=0, \\ \bar{s}_i(x, t), & \text{если } x \in U_i \end{cases}$$

(при $i=1$ вместо $s_{i-1}(x, 1)$ нужно, конечно, писать $\bar{f}(x)$).

Если бы отображения p_i были расслоениями, то гомотопии s_i немедленно строились бы на основе аксиомы **МРНГ** (см. аналогичные рассуждения в Дополнении к лекции 1), что, кстати сказать, дало бы нам новое доказательство теоремы 1 из Дополнения к лекции 1. Однако в теперешней ситуации мы можем пользоваться лишь аксиомой **СМРНГ**, и потому наша конструкция должна быть несколько тоньше.

Заметим в первую очередь, что, вдвое увеличивая, если надо, число n_β , мы можем считать, что для каждого индекса $i > 1$ и любой точки $x \in W_\beta$ имеет место не только включение $u_i^x(I) \subset U_{\alpha_i}$, но и включение $u_i^x(I) \subset U_{\alpha_{i-1}}$. Другими словами, без ограничения общности мы каждую гомотопию F_i можем считать также гомотопией из W_β в $U_{\alpha_{i-1}}$ (и, значит, отображения $\bar{s}_i$, s_i и $\bar{f}_i$ из диаграмм (8) и (9) — отображениями в $p^{-1}(U_{\alpha_{i-1}})$).

Имея это в виду и предположив, что для некоторого $i > 1$ гомотопия s_{i-1} уже построена, рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U}_i & \xrightarrow{\bar{g}_i} & p^{-1}(U_{\alpha_{i-1}}) \\ \tilde{\sigma}_0 \downarrow & \searrow \bar{g}'_i & \downarrow p_{i-1} \\ (\widetilde{U_{i-1} \times I})_{1/2} & \xrightarrow{g'_i} & U_{\alpha_{i-1}} \end{array}$$

в которой $\tilde{U}_i = (W_\beta \times 0) \cup (U_i \times I)$, $(\widetilde{U_{i-1} \times I})_{1/2} = (W_\beta \times [0, 1/2]) \cup (U_{i-1} \times I)$, а $\bar{g}_i$ — отображение, определенное

формулой

$$\bar{g}_i(x, t) = \begin{cases} \bar{f}_i(x, 2t), & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ \bar{f}_{i+1}(x, 2t-1), & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases} (x, t) \in \tilde{U}_i,$$

и G_i — ограничение на $(U_{i-1} \times I)_{1/2}$ гомотопии $G_i: W_\beta \times I \rightarrow U_{\alpha_{i-1}}$, задаваемой формулой

$$G_i(x, t) = \begin{cases} F_i(x, 2t), & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ F_{i+1}(x, 2t-1), & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases} (x, t) \in W_\beta \times I.$$

Непосредственно проверяется, что отображение $\bar{G}'_i$, замыкающее эту диаграмму, может быть задано формулами

$$\bar{G}'_i(x, t) = \begin{cases} s_i(x, 2t), & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ \bar{s}_{i+1}(x, 2t-1), & \text{если } x \in U_i. \end{cases}$$

Следовательно, согласно аксиоме **СМРНГ** (при $X = W_\beta$, $A = U_i$, $U = U_{i-1}$ и $p = p_{i-1}$) для диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U}_i & \xrightarrow{\bar{g}_i} & p^{-1}(U_{\alpha_{i-1}}) \\ \tilde{s}_i \downarrow & \nearrow \bar{g}_i & \downarrow p_{i-1} \\ W_\beta \times I & \xrightarrow{G_i} & U_{\alpha_{i-1}} \end{array}$$

существует замыкающая гомотопия $\bar{G}_i: W_\beta \times I \rightarrow p^{-1}(U_{\alpha_{i-1}})$, и ясно, что гомотопия

$$s_i(x, t) = \bar{G}_i\left(x_i, \frac{t+1}{2}\right), \quad (x, t) \in W_\beta \times I,$$

где точка $s_i(x, t)$ рассматривается как точка из $p^{-1}(U_{\alpha_i})$, замыкает диаграмму (9):

Таким образом, для завершения доказательства теоремы 2 осталось обосновать лишь начальный шаг индукции, т. е. построить отображение s_1 .

Если для любого $t \in I$ имеет место равенство

$$(10) \quad \bar{s}_1(x, t) = \bar{f}(x) \quad \text{при} \quad \varphi(x) = 1,$$

то отображение s_1 может быть задано формулой

$$s_1(x, t) = \begin{cases} \bar{s}_1(x, t), & \text{если } x \in U, \\ \bar{f}(x), & \text{если } x \notin U. \end{cases}$$

Поэтому теорема 1 будет доказана, если мы покажем, что выполнения условия (10) всегда можно добиться, соответствующим образом преобразовав гомотопии $\bar{s}_i$ (не меняя, конечно, их на $A \times I$). Поскольку в этом преобразовании множества U_{α_i} мы использовать не будем, для его выполнения целесообразно перейти от гомотопий $\bar{s}_i$ к составленной из них полной гомотопии $\bar{F}: U \times I \rightarrow E$. Условия, наложенные выше на гомотопии $\bar{s}_i$ (коммутативность диаграмм (8)) для гомотопии $\bar{F}$ означают, что ее начальным отображением $\bar{F} \circ \sigma_0$ служит ограничение на U отображения $\bar{f}$ и что эта гомотопия накрывает над U гомотопию $F: X \times I \rightarrow B$. Что же касается условия (10), то для гомотопии $\bar{F}$ оно имеет вид

$$(11) \quad \bar{F}(x, t) = \bar{f}(x) \quad \text{при} \quad \varphi(x) = 1 \quad \text{и} \quad 0 \leq t \leq 1/n_\beta.$$

Таким образом, от гомотопии $\bar{F}: U \times I \rightarrow E$, удовлетворяющей соотношениям $\bar{F} \circ \sigma_0 = \bar{f}|_U$ и $\rho \circ \bar{F} = F|_{U \times I}$, мы должны, сохраняя эти соотношения, перейти к гомотопии, удовлетворяющей, кроме того, и условию (11).

Мы зададим новую гомотопию соответствием

$$(x, t) \mapsto \bar{F}(x, \alpha(x, t)), \quad (x, t) \in U \times I,$$

где α — такая непрерывная функция $U \times I \rightarrow I$, что:

а) $\alpha(x, 0) = 0$ для любой точки $x \in U$ (это обеспечивает сохранение соотношения $\bar{F} \circ \sigma_0 = \bar{f}|_U$);

б) если $t_0 > 0$ — число, предусмотренное условием замедленности гомотопии F (т. е. такое, что $F(x, t) = F(x, 0)$ при $0 \leq t \leq t_0$; заметим, что мы впервые пользуемся этим условием), то функция $\alpha_x: t \mapsto \alpha(x, t)$ отображает отрезок $[0, t_0]$ в себя, а на отрезке $[t_0, 1]$ является тождественным отображением (это требование обеспечивает сохранение отношения $\rho \circ \bar{F} = F|_{U \times I}$);

в) $\alpha(x, t) = t$ при $\varphi(x) = 0$ и любым t (обеспечивает неизменность на A);

г) $\alpha(x, t) = 0$, если $\varphi(x) = 1$ и $0 \leq t \leq 1/n_\beta$ (обеспечивает выполнение условия (11)).

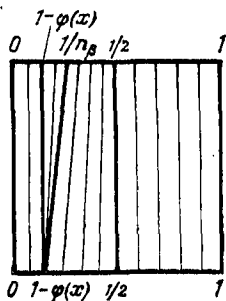


Рис. 22.

Считая для простоты, что $t_0 = 1/2$, и предполагая, что $n_\beta > 2$ (оба предположения общности, очевидно, не ограничивают), мы при $\varphi(x) \leq \frac{n_\beta - 1}{n_\beta}$ примем за функцию α_x

тождественное отображение $I \rightarrow I$, а при $\varphi(x) \geq \frac{n_\beta - 1}{n_\beta}$ — функцию, линейную на каждом интервале с концами в точках $0, 1 - \varphi(x), 1/n_\beta, 1/2, 1$ и переводящую эти точки в соответственно точки $0, 1 - \varphi(x), 1 - \varphi(x), 1/2, 1$ (см. рис. 22). Легко видеть, что все условия а) — г) будут при этом выполнены.

Тем самым теорема 1 полностью доказана. $\square$

Надстроечный гомоморфизм и надстроечная последовательность.—Универсальный моноид пунктированного пространства.—Фильтрация универсального моноида.—Случай гладко пунктированного пространства.—Меридианное отображение.—Теорема Джеймса и преобразование надстроечной последовательности.—Муровский вариант серровского расслоения.—Доказательство теоремы Джеймса.

Пунктированное отображение $S^*f: S^*A \rightarrow S^*X$, получающееся применением функтора S^* к пунктированному отображению $f: A \rightarrow X$, обозначается также символом Ef , а его гомотопический класс $S^*[f]^* = [S^*f]^*$ —символом $E[f]^*$ (ср. с замечанием 5 лекции 3). Это обозначение особенно удобно при $A = S^n$, когда гомотопические классы $[f]^*$ являются элементами α группы $\pi_n X$. В этом случае мы в силу отождествления $S^*S^n = S^{n+1}$ можем отображение Ef считать отображением $S^{n+1} \rightarrow S^*X$ и, значит, гомотопический класс $E\alpha$ —элементом группы $\pi_{n+1} S^*X$. Получающееся отображение

$$E: \pi_n X \rightarrow \pi_{n+1} S^*X, \quad \alpha \mapsto E\alpha,$$

называется *надстроечным отображением* гомотопических групп.

Замечание 1. В литературе для обозначения отображения E используется также символ S или его варианты (скажем, S^* или Σ).

В интерпретации элементов группы $\pi_n X$ как классов отображений $f: (I^n, \dot{I}^n) \rightarrow (X, x_0)$ отображение E задается соответствием $f \mapsto Ef$, где Ef —отображение $(I^{n+1}, \dot{I}^{n+1}) \rightarrow (S^*X, x_0)$, определенное формулой

$$(Ef)(t, t) = [f(t), t], \quad t \in I, t \in I^n$$

(куб I^{n+1} отождествлен здесь с произведением $I \times I^n$).

Автоматическая проверка показывает, что формула $i(x) = u_x$, где $u_x(t) = [x, t]$, $t \in I$, $x \in X$, определяет монееморфное отображение (вложение) пространства X в пространство ΩS^*X (являющееся не чем иным, как отображением, отвечающим по сопряженности тождественному отображению $S^*X \rightarrow S^*X$). Индуцированный этим отобра-

жением гомоморфизм $i_*: \pi_r X \rightarrow \pi_r \Omega S^* X$ определяется формулой $i_*[f]^* = [g]^*$, где отображение $g: S^r \rightarrow \Omega S^* X$ сопоставляет точке $x \in S^r$ путь $t \mapsto [fx, t]$ пространства $S^* X$. С другой стороны, как мы знаем, имеет место изоморфизм $h: \pi_r \Omega S^* X \rightarrow \pi_{r+1} S^* X$, который классу $[g]^*$ сопоставляет класс $[\bar{g}]^*$ отображения $\bar{g}: S^{r+1} = S^* S^r \rightarrow S^* X$, определенного формулой $\bar{g}[x, t] = g(x)(t)$. Поэтому составной гомоморфизм $h \circ i_*: \pi_r X \rightarrow \pi_{r+1} S^* X$ сопоставляет классу $[f]^*$ класс $[\bar{f}]^*$ отображения $\bar{f}: [x, t] \mapsto [fx, t]$, т. е. отображения $S^* \bar{f}$. Этим доказано, что

$$E = h \circ i_*.$$

В частности, отсюда следует, что *надстроечное отображение E является гомоморфизмом* (что, конечно, легко проверяется и непосредственно). Кроме того, введя в рассмотрение точную гомотопическую последовательность

$$\dots \rightarrow \pi_r X \xrightarrow{i_*} \pi_r \Omega S^* X \xrightarrow{j_*} \pi_r (\Omega S^* X, X) \xrightarrow{\partial} \pi_{r-1} X \rightarrow \dots$$

пары $(\Omega S^* X, X)$ и заменив в ней группу $\pi_r \Omega S^* X$ изоморфной группой $\pi_{r+1} S^* X$, мы получим точную последовательность

(1)

$$\dots \rightarrow \pi_n X \xrightarrow{E} \pi_{n+1} S^* X \xrightarrow{H} \pi_n (\Omega S^* X, X) \xrightarrow{P} \pi_{n-1} X \rightarrow \dots,$$

где $H = j_* \circ h^{-1}$ и $P = \partial$. Эта последовательность называется *надстроечной последовательностью* (или *ЕНР-последовательностью*) пространства X и служит мощным средством изучения гомоморфизма E .

Конечно, для конкретных вычислений необходимо получить достаточно полную информацию о довольно-таки таинственных гомоморфизмах H и P и, в частности, о группе $\pi_r (\Omega S^* X, X)$.

Первый шаг в этом направлении основывается на перенесении в категорию TOP^* известного из алгебры понятия свободного моноида.

Пусть X — произвольное пунктированное множество. *Словом над X* мы будем называть каждое выражение вида

$$(2) \quad x_1 x_2 \dots x_n,$$

где $x_1, \dots, x_n \in X$. Слово мы назовем *приведенным*, если ни одна из точек $x_1, \dots, x_n$ не является отмеченной

точкой x_0 пространства X . *Пустое слово*, по определению, является приведенным словом. Множество всех приведенных слов мы будем обозначать символом JX . Оно, очевидно, является моноидом относительно операции приписывания слов друг к другу. Единицей этого моноида является пустое слово $\emptyset$.

Впрочем, удобнее определить моноид JX несколькими иным способом, заметив, что при выбрасывании из произвольного слова всех входящих в него отмеченных точек получается однозначно определенное приведенное слово. Поэтому множество JX можно рассматривать как фактор-множество множества

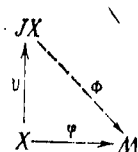
$$X^\infty = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} X^n, \quad X^n = \underbrace{X \times \dots \times X}_{n \text{ раз}},$$

всех слов (2) по отношению эквивалентности, в котором $u \sim v$, если после выбрасывания из слов u и v отмеченных точек получается одно и то же приведенное слово.

(На языке алгебры это означает, что JX получается из свободного моноида над X наложением соотношения $x_0 = 1$.)

Отождествление множества X с множеством X^1 вкладывает, очевидно, X в JX . По отношению к этому вложению моноид JX обладает свойством универсальности, т. е. для любого моноида M и любого пунктированного отображения $\varphi: X \rightarrow M$ (имеется в виду, что в M отмечена его единица) существует единственный гомоморфизм моноидов $\Phi: JX \rightarrow M$, совпадающий на X с отображением φ :

(3)



В другой терминологии это означает, что моноид JX является свободным моноидом, порожденным множеством X (в категории моноидов, морфизмами которой являются гомоморфизмы моноидов, переводящие единицу в единицу).

Предположим теперь, что множество X является топологическим (пунктированным) пространством. Тогда топологическим пространством будет и множество X^∞ всех слов (как дизъюнктивное объединение топологических пространств X^n , $n \geq 0$), а значит, и его факторпространство

JX (по отношению к фактортопологии). При этом пространство X будет, очевидно, подпространством пространства JX , и в случае, когда в диаграмме (3) моноид M является топологическим моноидом, а отображение φ непрерывным отображением, отображение Φ также будет непрерывно. Тем не менее утверждать, что JX является свободным топологическим моноидом, порожденным пространством X , нельзя по той простой причине, что, вообще говоря, — например, в случае, когда X является полем рациональных чисел, — умножение

$$(4) \quad JX \times JX \rightarrow JX$$

в моноиде JX не непрерывно, и потому этот моноид просто не будет топологическим моноидом. (Здесь мы опять сталкиваемся с уже известным нам на примере экспоненциального закона общим дефектом категории TOP . Как и в случае экспоненциального закона, для его устранения нужно перейти либо к каонным пространствам, либо к каонным отображениям.)

Мы будем называть моноид JX *универсальным моноидом* пунктированного пространства X .

Легко видеть, что для любого непрерывного отображения $f: X \rightarrow Y$ отображение $f^\infty: X^\infty \rightarrow Y^\infty$, определенное формулой $x_1 \dots x_n \mapsto y_1 \dots y_n$, где $y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n)$, непрерывно и согласовано с отображениями факторизации $X^\infty \rightarrow JX$ и $Y^\infty \rightarrow JY$. Поэтому это отображение индуцирует некоторое непрерывное отображение

$$Jf: JX \rightarrow JY,$$

и очевидно, что соответствия $X \mapsto JX$, $f \mapsto Jf$ составляют функтор J из категории TOP^* в категорию пунктированных топологических пространств, являющихся одновременно моноидами.

При этом ясно, что функтор J , рассматриваемый как функтор $\text{TOP}^* \rightarrow \text{TOP}^*$, является *гомотопическим функтором* (для любой гомотопии $f_t: X \rightarrow Y$ отображения Jf_t составляют гомотопию из JX в JY), и потому определена его гомотопизация $[\text{TOP}^*] \rightarrow [\text{TOP}^*]$, которую мы будем обозначать тем же символом J .

Пусть $n \geq 0$, и пусть $J_n X$ — множество всех приведенных слов $a = x_1 \dots x_k$, для которых $k \leq n$. Это множество является фактормножеством множества X^n , и мы снабдим его соответствующей фактортопологией.

Пусть $U_1, \dots, U_k$, $k \leq n$, — открытые множества пространства X , не содержащие его отмеченной точки x_0 , и пусть U_0 — произвольная (открытая) окрестность точки x_0 . Для любого монотонного отображения

$$(5) \quad \lambda: [1, \dots, k] \rightarrow [1, \dots, n]$$

мы введем в рассмотрение открытое множество $V_n^\lambda = V_n^\lambda(U_0; U_1, \dots, U_k)$ пространства X^n , определенное формулой

$$V_n^\lambda = U_1^\lambda \times \dots \times U_n^\lambda,$$

где

$$U_i^\lambda = \begin{cases} U_i, & \text{если } i = \lambda(j), \\ U_0, & \text{если } i \notin \text{Im } \lambda, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n.$$

Пусть $V_n = V_n(U_0; U_1, \dots, U_k)$ — объединение всевозможных множеств V_n^λ , а $W_n = W_n(U_0; U_1, \dots, U_k)$ — его образ при отображении факторизации $X^n \rightarrow J_n X$. Ясно, что прообразом множества W_n при отображении $X^n \rightarrow J_n X$ является как раз множество V_n . Поэтому *все множества $W_n = W_n(U_0; U_1, \dots, U_k)$ открыты в $J_n X$* .

Пусть теперь Y — произвольное топологическое пространство, и W — такое подмножество произведения $J_n X \times Y$, что его полный прообраз V в $X^n \times Y$ при естественном отображении

$$(6) \quad X^n \times Y \rightarrow J_n X \times Y$$

открыт в $X^n \times Y$. Покажем, что *если точка x_0 замкнута в X , то для любой точки $(a, y) \in J_n X \times Y$ существуют такое множество $W_n = W_n(U_0; U_1, \dots, U_k)$ и такое открытое множество $U \subset Y$, что*

$$(7) \quad (a, y) \in W_n \times U \subset W.$$

Действительно, пусть $a = x_1 \dots x_k$, где $x_1, \dots, x_k \neq x_0$. Для любого монотонного отображения (5) определим точку $a^\lambda = (x_1^\lambda, \dots, x_n^\lambda)$ пространства X^n формулами

$$x_j^\lambda = \begin{cases} x_i, & \text{если } j = \lambda(i), \\ x_0, & \text{если } j \notin \text{Im } \lambda, \end{cases} \quad j = 1, \dots, n.$$

Ясно, что $(a^\lambda, y) \in V$, и потому у точек $x_1^\lambda, \dots, x_n^\lambda$ и y существуют такие окрестности $V_1^\lambda, \dots, V_n^\lambda$ и U^λ , что окрестность $V_1^\lambda \times \dots \times V_n^\lambda \times U^\lambda$ точки (a^λ, y) содержится в V .

Мы положим

$$U_0 = \bigcap_{\lambda} \bigcap_{j \in I_m} V_j^\lambda, \quad U_i = (X \setminus x_0) \cap \bigcap_{\lambda} V_{\lambda(i)}^\lambda, \quad i = 1, \dots, k,$$

и

$$U = \bigcap_{\lambda} U^\lambda,$$

где $\bigcap_{\lambda}$ означает пересечение по всем отображениям (5).

Тогда ясно, что множество $W_n = W_n(U_0; U_1, \dots, U_k)$ определено и $(a, y) \in W \times U \subset W$. $\square$

Доказанное утверждение влечет за собой два простых, но важных следствия.

Во первых, поскольку все множества вида $W_n(U_0; U_1, \dots, U_k)$ открыты в $J_n X$, включение (7) означает, что точка (a, y) является внутренней точкой множества W . Следовательно, в силу произвольности этой точки множество W открыто. По определению это значит, что *отображение (6) является эпиморфизмом*.

В частности, для любых $n, m \geq 0$ эпиморфизмами будут отображения $X^n \times X^m \rightarrow J_n X \times X^m$ и $J_n X \times X^m \rightarrow J_n X \times J_m X$, а потому эпиморфизмом будет и их композиция

$$X^n \times X^m \rightarrow J_n X \times J_m X.$$

Таким образом, в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} X^n \times X^m & \rightarrow & X^{n+m} \\ \downarrow & & \downarrow \\ J_n X \times J_m X & \rightarrow & J_{n+m} X \end{array}$$

горизонтальные стрелки которой представляют собой отображения приписывания слов, обе вертикальные стрелки являются эпиморфизмами. Поскольку верхняя стрелка представляет собой непрерывное отображение, отсюда следует, что нижняя стрелка также является непрерывным отображением. Тем самым доказано, что для любых $n, m \geq 0$ отображение

$$J_n X \times J_m X \rightarrow J_{n+m} X,$$

индуцированное умножением в JX , непрерывно.

Во-вторых, при $Y = \text{pt}$, т. е. для естественного эпиморфизма $X^n \rightarrow J_n X$, мы получаем, что для любого открытого в $J_n X$ множества W и любой его точки $a \in W$ существует такое множество вида W_n , что $a \in W_n \subset W$.

По определению это означает, что множества $W_n = W_n(U_0; U_1, \dots, U_k)$ составляют базу топологии пространства $J_n X$.

Аналогом множеств $W_n(U_0; U_1, \dots, U_k)$ в пространстве JX являются множества $W(U_0; U_1, \dots, U_k)$ — образы при отображении факторизации $X^\infty \rightarrow JX$ множеств

$$V = \bigcup_{n=k}^{\infty} \bigcup_{\lambda} V_n^{\lambda}(U_0; U_1, \dots, U_k), \quad x_0 \in U_0; U_1, \dots, U_k \subset X \setminus x_0,$$

где λ пробегает всевозможные монотонные отображения (5). Ясно, что прообразом множества W в X^∞ является как раз множество V . Поскольку множество V , очевидно, открыто в X^∞ , отсюда следует, что все множества $W(U_0; U_1, \dots, U_k)$ открыты в JX .

Но легко видеть, что

$$\begin{aligned} J_n X \cap W(U_0; U_1, \dots, U_k) &= \\ &= \begin{cases} W_n(U_0; U_1, \dots, U_k), & \text{если } n \geq k, \\ \emptyset, & \text{если } n < k. \end{cases} \end{aligned}$$

Поэтому (в прежнем предположении замкнутости точки x_0 в пространстве X) топология пространства $J_n X$ совпадает с топологией, индуцированной в $J_n X$ топологией пространства JX , т. е. для любого $n \geq 0$ пространство $J_n X$ является подпространством пространства JX .

(На самом деле это верно без каких-либо условий на точку x_0 , но из-за нашей общей установки избегать общетопологических патологий мы этого доказывать не будем.)

Кроме того, легко видеть (в том же — теперь существенном — предположении замкнутости точки x_0), что для любого $n \geq 0$ подпространство $J_n X$ замкнуто в пространстве JX . Действительно, если точка $a \in JX$ не лежит в $J_n X$, т. е. имеет вид $a = x_1 \dots x_k$, где $k > n$ и $x_1, \dots, x_k \neq x_0$, то ее окрестность $W(U_0; U_1 \dots U_k)$, где $U_0 = X$, а $U_1 = \dots = U_k = X \setminus x_0$, не пересекается с $J_n X$. $\square$

Более того, пространство JX является свободным объединением (прямым пределом) своих подпространств $J_n X$, $n \geq 0$, т. е. множество $W \subset JX$ тогда и только тогда открыто в JX , когда для любого $n \geq 0$ пересечение $W \cap J_n X$ открыто в $J_n X$. Действительно, если W открыто в JX , то $W \cap J_n X$ открыто в $J_n X$, потому что $J_n X$ является подпространством пространства JX . Обратно, пусть $W \cap J_n X$ открыто в $J_n X$ для любого $n \geq 0$, и пусть V — полный прообраз множества W при отображении факто-

ризации $X^\infty \rightarrow JX$, а W_n — полный прообраз множества $W \cap J_n X$ при отображении факторизации $X^n \rightarrow J_n X$. По условию все множества V_n открыты в X^n . Но ясно, что $V = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n$, а так как $X^\infty = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} X^n$, то, следовательно, множество V открыто в X^∞ . Поэтому W открыто в JX . $\square$

Возрастающая последовательность

$$Y_0 \subset Y_1 \subset \dots \subset Y_n \subset \dots$$

подпространств пространства Y называется *фильтрацией пространства Y* , если все подпространства Y_n замкнуты, а пространство Y является их свободным объединением. Таким образом, подытоживая все доказанное, мы можем сказать, что *пространства $J_n X$ составляют фильтрацию пространства JX* .

Если $\{Y_n\}$ — фильтрация пространства Y , то отображение $f: Y \rightarrow B$ непрерывно, если непрерывны все его ограничения $f|_{Y_n}$. Имея это в виду, рассмотрим для любой точки $a \in JX$ отображения

$$L_a: JX \rightarrow JX, u \mapsto au$$

и

$$R_a: JX \rightarrow JX, u \mapsto ua.$$

Если $a \in J_m X$, то для любого $n \geq 0$ отображение $L_a|_{J_n X}$ разлагается в композицию непрерывных отображений

$$\begin{aligned} J_n X &\rightarrow J_m X \times J_n X \rightarrow J_{m+n} X \subset JX, \\ u &\mapsto (a, u) \mapsto au \end{aligned}$$

и поэтому непрерывно. По аналогичным соображениям непрерывно и отображение $R_a|_{J_n X}$. Следовательно, *отображения $L_a, R_a: JX \rightarrow JX$ непрерывны*.

Для любого $n \geq 1$ отображение факторизации $X^n \rightarrow J_n X$ является, очевидно, относительным гомеоморфизмом $(X^n, X_{n-1}^n) \rightarrow (J_n X, J_{n-1} X)$, где, как и в Дополнении к лекции 5, через X_{n-1}^n обозначено подпространство пространства X^n , состоящее из точек, хотя бы одна координата которых является отмеченной точкой x_0 (и для которого поэтому соответствующий кослой X^n/X_{n-1}^n является n -кратной смеш-степенью

$$X^{\wedge n} = X \wedge \underbrace{\dots \wedge X}_{n \text{ раз}}$$

пунктированного пространства X). Являясь относительным гомеоморфизмом, отображение $X^n \rightarrow J_n X$ индуцирует гомеоморфизм кослоев. Таким образом, для любого $n \geq 1$ пространство $J_n X / J_{n-1} X$ гомеоморфно пространству $X^{\wedge n}$.

Определение 1. Фильтрация $\{Y_n\}$ пространства Y называется *фильтрацией Борсука*, если для каждого $n \geq 1$ пара (Y_n, Y_{n-1}) является парой Борсука.

Легко видеть, что для любого гладко пунктированного пространства X фильтрация $\{J_n X\}$ пространства JX является фильтрацией Борсука. Действительно, так как отображение факторизации $X^n \rightarrow J_n X$ представляет собой относительный гомеоморфизм $(X^n, X_{n-1}^n) \rightarrow (J_n X, J_{n-1} X)$, то в случае, когда пространство X гладко пунктировано (и потому пара $(X^n, X_{n-1}^n) = (X, x_0)^n$ является парой Борсука), каждая пара $(J_n X, J_{n-1} X)$ в силу леммы 5 лекции 4 будет парой Борсука. $\square$

Лемма 1. Для любой фильтрации Борсука $\{Y_n\}$ пространства Y все пары (Y_m, Y_n) , $m \geq n \geq 0$, а также все пары (Y, Y_n) , $n \geq 0$, являются парами Борсука.

Доказательство. Для каждой пары (Y_m, Y_n) , $m \geq n \geq 0$, вложение $Y_n \rightarrow Y_m$ является композицией вложений $Y_n \rightarrow Y_{n+1} \rightarrow Y_{n+2} \rightarrow \dots \rightarrow Y_m$, каждое из которых является по условию корасслоением. Поэтому корасслоением будет и вложение $Y_n \rightarrow Y_m$. Это доказывает лемму 1 для пар (Y_m, Y_n) .

Менее формально это рассуждение можно изложить следующим образом. Утверждение, что пара (Y_m, Y_n) является парой Борсука, означает, что гомотопия $f_t: Y_n \rightarrow Z$ распространяется на Y_m , если на Y_m распространяется ее начальное отображение f_0 . Но если отображение f_0 распространено на Y_m , то оно тем самым распространено и на Y_{n+1} (если $n+1 \leq m$). Поэтому, поскольку пара (Y_{n+1}, Y_n) является по условию парой Борсука, гомотопию f_t можно распространить на Y_{n+1} . Применив то же рассуждение к этому распространению, мы получим распространение гомотопии f_t на Y_{n+2} и т. д., пока не достигнем до Y_m .

Если теперь отображение f_0 распространено на все Y , то эта конструкция даст нам распространение гомотопии f_t на каждое подпространство Y_m , $m \geq n$, и тем самым даст нам требуемую гомотопию $\bar{f}_t: Y \rightarrow Z$ (непрерывность которой обеспечивается тем, что пространство Y является

свободным объединением пространств Y_m , на каждом из которых гомотопия $\bar{f}_t$ непрерывна).

Этим лемма 1 доказана и для пар (Y, Y_n) . $\square$

Применительно к фильтрации $\{J_n X\}$ мы получаем отсюда, что если пространство X гладко пунктировано, то все пары $(J_m X, J_n X)$, $m \geq n \geq 0$, а также все пары $(JX, J_n X)$, $n \geq 0$, являются парами Борсука.

Поскольку $J_0 X = \{\emptyset\}$, мы видим, в частности, что для любого гладко пунктированного пространства X пространство JX также гладко пунктировано (по отношению к отмеченной точке $\emptyset$).

Вернемся теперь к пространству $\Omega S^* X$. Будем пока лишь предполагать, что отмеченная точка x_0 пространства X функционально выделяема, т. е. что существует такая непрерывная функция $\varphi: X \rightarrow I$, что $\varphi(x_0) = 0$ и $\varphi(x) \neq 0$, если $x \neq x_0$. (В частности, это условие выполнено, если пространство X гладко пунктировано.)

Пользуясь функцией φ , мы каждой точке $x \in X$ сопоставим муровскую петлю u_x пространства $S^* X$ длины $\varphi(x)$, определенную формулой

$$u_x(t) = \left[x, \frac{t}{\varphi(x)} \right], \quad \text{где } 0 \leq t \leq \varphi(x).$$

Таким образом, точка $u_x(t)$ при изменении t от 0 до $\varphi(x)$ пробегает меридиан надстройки $S^* X$, проходящий через точку x . На этом основании мы будем называть отображение $x \mapsto u_x$ из X в $\Omega^M S^* X$ меридианным отображением.

Композиция меридианного отображения $X \rightarrow \Omega^M S^* X$ с вложением $\Omega^M S^* X \rightarrow \Omega S^* X \times \mathbb{R}^+$, $u \mapsto (u^*, a)$ (см. лекцию 3) задается, очевидно, формулой $x \mapsto (u_x^{(0)}, \varphi(x))$, где $u_x^{(0)}$ — петля $t \mapsto [x, t]$. Поскольку отображение $x \mapsto u_x^{(0)}$ из X в $\Omega S^* X \subset (S^* X)^I$ ассоциировано с отображением факторизации $X \times I \rightarrow S^* X$, $(x, t) \mapsto [x, t]$, и потому непрерывно, отсюда следует, что отображение $x \mapsto (u_x^{(0)}, \varphi(x))$ непрерывно. Следовательно, меридианное отображение $X \rightarrow \Omega^M S^* X$ непрерывно.

Поэтому ввиду универсальности моноида JX это отображение единственным образом распространяется до некоторого непрерывного отображения

$$i: JX \rightarrow \Omega^M S^* X,$$

которое мы также будем называть *меридианным отображением*. По определению оно является алгебраическим гомоморфизмом моноидов.

Пусть теперь (X, x_0) и (Y, y_0) — два пунктированных пространства с функционально выделяемыми отмеченными точками, и пусть $\varphi: X \rightarrow I$, $\psi: Y \rightarrow I$ — такие функции, что $\varphi(x_0) = \psi(y_0) = 0$ и $\varphi(x) \neq 0$, $\psi(y) \neq 0$, если $x \neq x_0$, $y \neq y_0$. Отображение $JX \rightarrow \Omega^M S^* X$, построенное с помощью функции φ , мы обозначим через i_φ , а отображение $JY \rightarrow \Omega^M S^* Y$, построенное с помощью функции ψ — через i_ψ . Тогда легко видеть, что для любого пунктированного отображения $f: X \rightarrow Y$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} JX & \xrightarrow{Jf} & JY \\ i_\varphi \downarrow & \Omega^M S^* f & \downarrow i_\psi \\ \Omega^M S^* X & \xrightarrow{\quad} & \Omega^M S^* Y \end{array}$$

гомотопически коммутативна. Действительно, сопоставив каждой точке $(x, t) \in X \times I$ муравьевскую петлю $F(x, t) \in \Omega^M S^* Y$ длины $a(x, t) = (1-t)\varphi(x) + t\psi(f(x))$, определенную формулой

$$F(x, t)(\tau) = \left[f(x), \frac{\tau}{a(x, t)} \right], \quad 0 \leq \tau \leq a(x, t),$$

мы получим (как легко видеть, непрерывное) отображение $F: X \times I \rightarrow \Omega^M S^* Y$, обладающее тем свойством, что $F(x, 0) = S^* f \circ u_x$ и $F(x, 1) = u_{f(x)}$. Распространение этого отображения на JX будет, поэтому, гомотопией из JX в $\Omega^M S^* Y$, связывающей отображение $\Omega^M S^* f \circ i_\varphi$ с отображением $i_\psi \circ Jf$. $\square$

При $X=Y$ и $f=\text{id}$ мы получаем, в частности, что с точностью до гомотопии отображение $i=i_\varphi$ не зависит от выбора функции φ , а переходя к гомотопическим классам (т. е. в категорию $[\text{TOP}^*]$), — что гомотопический класс $[i]^*$ представляет собой морфизм (естественное преобразование) функтора J в функтор $\Omega^M S^*$ (рассматриваемых как функторы из $[\text{TOP}^*]$ в $[\text{TOP}^*]$).

Замечание 2. На первый взгляд кажется, что от зависимости отображения i от φ можно избавиться, перейдя от пространства $\Omega^M S^* X$ к пространству $\Omega S^* X$, т. е. скомпоновав отображение i с ретракцией $r: \Omega^M S^* X \rightarrow \Omega S^* X$, $u \mapsto u^\#$, поскольку композиция $X \rightarrow \Omega S^* X$ отображения $X \rightarrow \Omega^M S^* X$ с ретракцией r задается соответствием $x \mapsto u_x^{(0)}$, и потому от выбора функции φ не за-

висит (и является рассмотренным в начале этой лекции отображением i). Однако ввиду неассоциативности умножения в ΩS^*X результирующее отображение $JX \rightarrow \Omega S^*X$ от выбора функции φ все же зависит (хотя, конечно, только с точностью до гомотопии), и потому переход от $\Omega^M S^*X$ к ΩS^*X никаких преимуществ не дает.

Значение меридианного отображения для теории гомотопических групп определяется следующей замечательной теоремой Джеймса.

Теорема 1. Для каждого связного гладко пунктированного пространства X гомоморфизм

$$i_*: \pi_n JX \rightarrow \pi_n \Omega^M S^*X,$$

индуцированный отображением $i: JX \rightarrow \Omega^M S^*X$, является при любом $n \geq 0$ изоморфизмом.

Замечание 3. Если пространство X нумерируемо локально стягиваемо, то, как показал Пуппе, отображение i является даже гомотопической эквивалентностью. Однако доказательство этого утверждения несколько хлопотливо. Общую технику, на которой основаны рассуждения Пуппе, мы изложим в Дополнении к этой лекции, но детали оставим читателю (см. в Дополнении замечание 3).

Меридианное отображение является, конечно, (тождественным на X) отображением пары (JX, X) в пару $(\Omega^M S^*X, X)$ и потому индуцирует гомоморфизм соответствующих гомотопических последовательностей. В силу теоремы 1 и леммы о пяти гомоморфизмах этот гомоморфизм будет изоморфизмом, т. е. изоморфизмами будут все гомоморфизмы

$$i_*: \pi_n(JX, X) \rightarrow \pi_n(\Omega^M S^*X, X), \quad n \geq 0.$$

Поскольку группы $\pi_n(\Omega^M S^*X, X)$ изоморфны, очевидно, группам $\pi_n(\Omega S^*X, X)$, мы видим, что теорема 1 позволяет надстроечную последовательность пространства X переписать в следующем существенно более простом виде:

$$(8) \quad \dots \rightarrow \pi_n X \xrightarrow{E} \pi_{n+1} S^*X \xrightarrow{H} \pi_n(JX, X) \xrightarrow{P} \pi_{n-1} X \rightarrow \dots$$

(здесь гомоморфизмы H и P отличаются, конечно, от гомоморфизмов H и P из последовательности (1) на соответствующие изоморфизмы). Дальнейшего (и окончательного) упрощения этой последовательности мы достигнем в лекции 18.

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится «муровский» вариант пространства PX .

Для любого пунктированного пространства X мы обозначим через P^MX пространство всех муровских путей пространства X , начинающихся в отмеченной точке x_0 . Операция умножения муровских путей определяет, очевидно, действие моноида Ω^MX на пространстве P^MX , т. е. непрерывное отображение

$$\Omega^MX \times P^MX \rightarrow P^MX, \quad (u, v) \mapsto uv,$$

обладающее тем свойством, что для любого муровского пути $v \in P^MX$ имеет место, во-первых, равенство $u_1(u_2v) = (u_1u_2)v$, где u_1, u_2 — произвольные муровские петли из Ω^MX , а во-вторых, равенство $ev = v$, где e — единица моноида Ω^MX .

Мы будем считать пространство P^MX пунктированным пространством с отмеченной точкой e .

Ясно, что формула $\omega_1^M(v) = v(a)$, где $v(a)$ — конец муровского пути v , определяет непрерывное пунктированное отображение

$$\omega_1^M: P^MX \rightarrow X,$$

и легко видеть, что, подобно отображению $\omega_1: PX \rightarrow X$, отображение ω_1^M является расслоением. Действительно, для любой коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} Y & \xleftarrow{\bar{f}} & P^MX \\ \sigma_0 \downarrow & \nearrow \bar{F} & \downarrow \omega_1^M \\ Y \times I & \xrightarrow{F} & X \end{array}$$

накрывающая гомотопия $\bar{F}$ может быть определена формулой

$$\bar{F}(y, t) = \bar{f}(y) \cdot F_{y, t}, \quad y \in Y, \quad t \in I,$$

где $F_{y, t}$ — ограничение пути $\tau \mapsto F(y, \tau)$, $\tau \in Y$, на отрезке $[0, t]$ (так что длина пути $\bar{F}(y, t)$ равна $a_y + t$, где a_y — длина пути $\bar{f}(y)$). $\square$

Слоем расслоения ω_1^M является, очевидно, пространство Ω^MX муровских петель.

Подобно пространству PX , пространство P^MX стягиваемо. Действительно, положив

$$f_t(v) = v|_{[0, t]}, \quad v \in P^MX, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

где a — длина пути v , мы, очевидно, получим гомотопию $f_t: P^M X \rightarrow P^M X$, для которой $f_0 = \text{const}$ и $f_1 = \text{id}$. $\square$

Ясно, что если теорема 1 справедлива для пространства X , то она справедлива и для любого гомотопически эквивалентного ему пространства. С другой стороны, легко видеть, что каждое пространство гомотопически эквивалентно пространству, отмеченная точка x_0 которого обладает стягиваемой $\text{rel } x_0$ окрестностью (достаточно приклеить вибриссу и применить предложение 2 лекции 2). Следовательно, при доказательстве теоремы 1 можно без ограничения общности предполагать, что в пространстве X отмеченная точка обладает стягиваемой окрестностью U_0 , т. е. что это пространство удовлетворяет наложенному в лемме Джеймса предложению 1 лекции 9) условию.

Имея это в виду, рассмотрим пространство E , получающееся применением конструкции Джеймса к (как мы знаем, непрерывному) отображению левого сдвига $L: X \times X \rightarrow X$, $(x, u) \mapsto xu$, и соответствующее отображение $p: E \rightarrow S^*X$. Поскольку пространство X по условию связно, каждое отображение $L_x: u \mapsto xu$ гомотопно тождественному отображению, и, значит, является гомотопической эквивалентностью. Таким образом, все условия леммы Джеймса выполнены, и потому, согласно этой лемме, *отображение $p: E \rightarrow S^*X$ является слабым расслоением*.

Поскольку отображение L надъективно, пространство $E = (C^*X \times JX) \cup_L JX$ является факторпространством произведения $C^*X \times JX$ по минимальному отношению эквивалентности, в котором $(x, u) \sim (x_0, xu)$. Пусть E_n — образ в E подпространства $C^*X \times J_n X \subseteq C^*X \times JX$ при отображении факторизации $C^*X \times JX \rightarrow E$.

Ясно, что подпространство E_0 естественно гомеоморфно конусу C^*X . Кроме того, для любого $n > 1$ прообразом подпространства $E_{n-1} \subseteq E_n$ при отображении факторизации $C^*X \times J_n X \rightarrow E_n$ является, очевидно, подпространство $(C^*X \times J_{n+1} X) \cup (x_0 \times J_n X)$, откуда непосредственно вытекает, что это отображение представляет собой относительный гомеоморфизм пары

$$(C^*X \times J_n X, (C^*X \times J_{n-1} X) \cup (x_0 \times J_n X)) = \\ = (C^*X, x_0) \times (J_n X, J_{n-1} X)$$

на пару (E_n, E_{n-1}) . Следовательно, для любого $n \geq 1$ пара (E_n, E_{n-1}) является парой Борсука, а ее кослой

E_n/E_{n-1} гомеоморфен кослою $(C^*X \times J_n X)/(C^*X \times J_{n-1} X) \cup \cup (x_0 \times J_n X)$.

С другой стороны, ясно, что для любых двух пар (X, A) и (Y, B) имеет место естественный гомеоморфизм

$$(X \times Y)/(X \times B) \cup (A \times Y) = X/A \wedge Y/B$$

(кослой прямого произведения двух пар является произведением их кослоев). Поэтому, в частности, кослой E_n/E_{n-1} гомеоморфен произведению

$$C^*X' \wedge (J_n X/J_{n-1}) = C^*X \wedge X^{\wedge n}.$$

Но легко видеть, что если пунктированное пространство X стягиваемо, то для любого пунктированного пространства Y смеш-произведение $X \wedge Y$ также стягиваемо. (Действительно, если $\text{id}_X \sim \text{const}$, то $\text{id}_{X \wedge Y} = \text{id}_X \wedge \text{id}_Y \sim \text{const} \wedge \text{id}_Y$. Из определений же непосредственно вытекает, что $\text{const} \wedge g = \text{const}$ для любого отображения g . Значит, $\text{id}_{X \wedge Y} \sim \text{const}$, т. е. пространство $X \wedge Y$ стягиваемо).

Поскольку конус C^*X стягиваем, это утверждение применимо, в частности, к произведению $C^*X \wedge X^{\wedge n}$. Этим доказано, что для любого $n \geq 1$ кослой E_n/E_{n-2} стягиваем.

Но очевидно, что если для пары Борсука (X, A) подпространство A и кослой X/A стягиваемы, то пространство X также стягиваемо (поскольку—см. лемму 7 лекции 4—оно гомотопически эквивалентно пространству X/A).

Поскольку пространство $E_0 = C^*X$ стягиваемо, отсюда очевидной индукцией получается, что для любого $n \geq 0$ пространство E_n стягиваемо.

Далее, из того, что пространства $J_n X$ составляют фильтрацию пространства JX , непосредственно вытекает, что пространства E_n составляют фильтрацию пространства E . Поэтому для любого компактного множества $C \subseteq E$ существует такое $n \geq 0$, что $C \subseteq E_n$ (в противном случае все множества $(E_n/E_{n-1}) \cap C$ были бы не пустыми, выбрав в каждом из них по точке, мы получили бы в C бесконечное дискретное подмножество, что в силу компактности C невозможно). Поскольку каждая сфера S^r компактна, отсюда следует, что для любого отображения $f: S^r \rightarrow E$ существует такое $n \geq 0$, что $f(S^r) \subseteq E_n$.

Следовательно, поскольку пространство E_n стягиваемо, отображение f гомотопно нулю (как отображение в E_n , а значит, и как отображение в E). Этим доказано, что $\pi_r E = 0$ для любого $r \geq 0$, т. е. что пространство E асферично во всех размерностях (∞ -связно).

Теперь мы уже можем непосредственно приступить к доказательству теоремы 1.

Доказательство теоремы 1. Сравним слабое расслоение $p: E \rightarrow S^*X$ с сильным расслоением $\omega_1^M: P^M(S^*X) \rightarrow S^*X$. Естественным образом обобщая меридианное отображение, мы каждой точке $a = [x, t]^c \in C^*X$ сопоставим муравьевский путь $u_a \in P^M(S^*X)$ длины $t\varphi(x)$ (где, как и выше, φ — произвольная функция $X \rightarrow I$, равная нулю только в отмеченной точке $x_0 \in X$), положив

$$u_a(\tau) = \left[x, \frac{\tau}{\varphi(x)} \right]^s, \quad 0 \leq \tau \leq t\varphi(x).$$

Ясно, что соответствие $(a, u) \mapsto i(u)u_a$ корректно определяет отображение $h: E \rightarrow P^M(S^*X)$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{h} & P^M(S^*X) \\ & \searrow p & \swarrow \omega_1^M \\ & SX & \end{array}$$

и которое поэтому индуцирует гомоморфизм гомотопической последовательности слабого расслоения p в гомотопическую последовательность расслоения ω_1^M , являющийся тождественным отображением на группах $\pi_n S^*X$. Так как на группах $\pi_n E$ этот гомоморфизм является изоморфизмом (поскольку группы $\pi_n P^M(S^*X)$, подобно группам $\pi_n E$, равны нулю), отсюда в силу леммы о пяти гомоморфизмах следует, что отображение h индуцирует изоморфизм гомотопических групп слоев.

Для завершения доказательства теоремы остается заметить, что над точкой x_0 слоем слабого расслоения p является пространство JX , слоем расслоения ω_1^M — пространство $\Omega^M S^*X$ и что на JX отображение h совпадает с отображением i . $\square$

ДОПОЛНЕНИЕ

Телескопная нормализация фильтраций.— Гомотопическая эквивалентность гомотопических пределов.— Теорема Милнора.— Гомотопическая правильность фильтраций Борсука.

В связи с изложенным доказательством теоремы Джеймса естественно возникает вопрос, не будет ли участвующее в нем пространство E не только асферичным во всех размерностях, но и стягиваемым. В этом дополнении мы изложим общую теорию Милнора, предназначенную для ответа на такого рода вопросы.

Пусть X — произвольное топологическое пространство и

$$X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n \subset \dots$$

— некоторая его фильтрация. *Телескопом T над $\{X_n\}$* называется подпространство произведения $X \times \mathbb{R}^+$ (где $\mathbb{R}^+$ — множество всех неотрицательных действительных чисел),

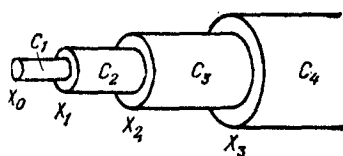


Рис. 23.

состоящее из таких точек (x, r) , $x \in X$, $r \in \mathbb{R}^+$, что $x \in X_n$, если $n \leq r < n+1$. Наглядно телескоп T может быть изображен рисунком 23. Его можно также представить себе как результат склейки обращенных цилиндров

$C_{n+1} = \text{Cyl}(i_n)$ вложений $i_n: X_n \rightarrow X_{n+1}$ по содержащимся в них пространствам X_n .

Легко видеть, что подпространства T_n телескопа T , состоящие из точек (x, r) , для которых $r \leq n$, составляют его фильтрацию

$$T_0 \subset T_1 \subset \dots \subset T_n \subset \dots$$

Об этой фильтрации говорят, что она является *телескопной нормализацией* фильтрации $\{X_n\}$. Очевидно, что эта фильтрация является фильтрацией Борсука.

Заметим, что

$$T_n = C_0 \cup \dots \cup C_{n-1} \text{ при } n \geq 1$$

(тогда как $T_0 = X_0$).

Проекция $p: (x, r) \rightarrow x$ переводит, очевидно, каждое подпространство T_n в соответствующее подпространство X_n (т. е., как говорят, *сохраняет фильтрации* пространств T и X). Это означает, что имеет место коммутативная диа-

грамма

$$\begin{array}{ccccccc} T_0 & \rightarrow & T_1 & \rightarrow & \dots & \rightarrow & T_n \rightarrow T_{n+1} \rightarrow \dots \\ \downarrow p_0 & & \downarrow p_1 & & & & \downarrow p_n \quad \downarrow p_{n+1} \\ X_0 & \rightarrow & X_1 & \rightarrow & \dots & \rightarrow & X_n \rightarrow X_{n+1} \rightarrow \dots \end{array}$$

горизонтальные стрелки которой являются вложениями, а вертикальные индуцированы отображением p .

Мы вложим X_n в T_n , отождествив каждую точку $x \in X_n$ с точкой $(x, n) \in T_n$ (это вложение согласовано, очевидно, с вложениями $X_n \subset C_{n-1}$ и $C_{n-1} \subset T_n$). Тогда отображение $p_n: T_n \rightarrow X_n$ будет ретракцией. Более того, легко видеть, что отображение $p_n: T_n \rightarrow X_n$ является строгой деформационной ретракцией. Действительно, отображения $f_t: (x, r) \mapsto (x, (n-r)t + r)$ составляют неподвижную на X_n гомотопию из T_n в T_n , связывающую тождественное отображение $\text{id}: T_n \rightarrow T_n$ с отображением $(x, r) \mapsto (x, n)$, являющимся композицией отображения p_n и вложения $X_n \rightarrow T_n$. $\square$

Таким образом, мы видим, что все отображения $p_n: X_n \rightarrow T_n$ являются гомотопическими эквивалентностями.

Тем не менее полное отображение $p: X \rightarrow T$ гомотопической эквивалентностью, вообще говоря, не будет.

Определение 1. Фiltrация $\{X_n\}$ называется гомотопически правильной, если отображение $p: X \rightarrow T$ является гомотопической эквивалентностью. В этом случае говорят также, что пространство X является гомотопическим пределом подпространств X_n .

Пусть X и Y — два пространства с соответственно фильтрациями $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$, а TX и TY — соответствующие телескопы. Тогда для любого сохраняющего фильтрации отображения $f: X \rightarrow Y$ формула

$$(Tf)(x, r) = (fx, r), \quad (x, r) \in TX,$$

будет, очевидно, определять некоторое сохраняющее телескопные фильтрации отображение $Tf: TX \rightarrow TY$.

С другой стороны, поскольку отображение $f: X \rightarrow Y$ сохраняет фильтрации, оно для любого $n \geq 0$ определяет некоторое отображение

$$f_n: X_n \rightarrow Y_n.$$

Рассмотрим сначала частный случай, когда $X=Y$ и $X_n=Y_n$.

Предложение 1 (Милнор). Если сохраняющее фильтрацию $\{X_n\}$ отображение $f: X \rightarrow X$ обладает тем свойством, что для любого $n \geq 0$ отображение $f_n: X_n \rightarrow X_n$ гомотопно тождественному отображению, то отображение

$$Tf: TX \rightarrow TY$$

является гомотопической эквивалентностью.

Доказательство. Пусть $f_n, t: X_n \rightarrow X_n$ — гомотопия, связывающая отображение id_{X_n} с отображением f_n . Тогда формула

$$h_t(x, r) = \begin{cases} (f(x), n + s(2t + 1)), & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, 0 \leq s \leq 1/2, \\ (f(x), n + 2(1-s)t + s), & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, 1/2 \leq s \leq 1, \\ (f_{n, 2-2t}(x), n + 2s), & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1, 0 \leq s \leq 1/2, \\ (f_{n, 1-(3-4s)(2t-1)}(x), n + 1), & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1, 1/2 \leq s \leq 3/4, \\ (f_{n+1, 1-(4s-3)(2t-1)}(x), n + 1), & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1, 3/4 \leq s \leq 1, \end{cases}$$

где $n = [r]$ (и, значит, $x \in X_n$), а $s = r - n$, будет корректно (см. рис. 24) определять гомотопию $h_t: TX \rightarrow TX$, свя-

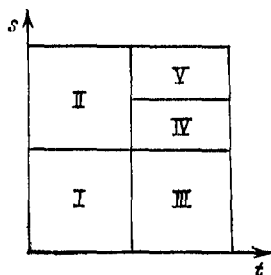


Рис. 24.

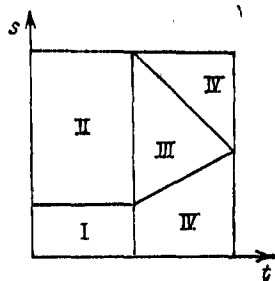


Рис. 25.

зывающую отображение Tf с отображением $h = h_1$, определенным формулой

$$h(x, r) = \begin{cases} (x, n + 2s), & \text{если } 0 \leq s \leq 1/2, \\ (f_{n, 4s-2}(x), n + 1), & \text{если } 1/2 \leq s \leq 3/4, \\ (f_{n+1, 4-4s}(x), n + 1), & \text{если } 3/4 \leq s \leq 1, \end{cases}$$

где по-прежнему $n = [r]$ и $s = r - n$. Поэтому достаточно доказать, что гомотопической эквивалентностью является отображение h .

Имея это в виду, мы заметим, что в силу равенств

$$h\left(x, n + \frac{1}{2}\right) = h(x, n+1) = (x, n+1)$$

формула

$$g(x, r) = \begin{cases} (x, n+2s), & \text{если } 0 \leq s \leq 1/2, \\ h\left(x, n + \frac{3-2s}{2}\right), & \text{если } 1/2 \leq s \leq 1, \end{cases}$$

корректно определяет некоторое непрерывное отображение

$$g: TX \rightarrow TX.$$

Пусть

$$\varphi_t(x, r) = \begin{cases} (x, n + (1+6t)s), & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, 0 \leq s \leq 1/4, \\ (x, n + 2(1-s)(t+s)), & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, 1/4 \leq s \leq 1, \\ h(x, n+t), & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1, t/2 \leq s \leq (3-2t)/2, \\ (h \circ g)(x, r), & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1 \text{ и либо } 0 \leq s \leq t/2, \\ & \text{либо } (3-2t)/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Автоматически проверяется (см. рис. 25), что эта формула корректно определяет такую гомотопию $\varphi_t: TX \rightarrow TX$, что $\varphi_0 = \text{id}$ и $\varphi_1 = h \circ g$. Аналогично, формула

$$\psi_t(x, r) = \begin{cases} (x, n + (1+6t)s), & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, 0 \leq s \leq 1/4, \\ (x, n + 2(1-s)t + s), & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, 1/4 \leq s \leq 1, \\ g(x, n+t), & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1, t/2 \leq s \leq (3-2t)/2, \\ (g \circ h)(x, r), & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1 \text{ и либо } 0 \leq s \leq t/2, \\ & \text{либо } (3-2t)/2 \leq s \leq 1, \end{cases}$$

корректно определяет такую гомотопию $\psi_t: TX \rightarrow TX$, что $\psi_0 = \text{id}$ и $\psi_1 = g \circ h$.

Таким образом, отображение h действительно является гомотопической эквивалентностью (с обратной гомотопической эквивалентностью g). $\square$

Следствие 1. Если

а) фильтрация $\{X_n\}$ пространства X гомотопически правильна;

б) сохраняющее фильтрацию отображение $f: X \rightarrow X$ обладает тем свойством, что для любого $n \geq 0$ отображение $f_n: X_n \rightarrow X_n$ гомотопно тождественному отображению,

то отображение $f: X \rightarrow X$ является гомотопической эквивалентностью.

Доказательство. В (очевидно, коммутативной) диаграмме

$$\begin{array}{ccc} & Tf & \\ TX & \longrightarrow & TX \\ \rho \downarrow & f & \downarrow \rho \\ X & \longrightarrow & X \end{array}$$

все стрелки, кроме нижней, являются гомотопическими эквивалентностями. Поэтому гомотопической эквивалентностью будет и нижняя стрелка. $\square$

Замечание 1. В условиях следствия 1 отображение f не будет, вообще говоря, гомотопно тождественному отображению.

Следствие 2. Пусть X и Y — топологические пространства с фильтрациями $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$ соответственно, и пусть $f: X \rightarrow Y$ — сохраняющее фильтрации непрерывное отображение. Если

а) фильтрации $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$ гомотопически правильны;

б) для любого $n \geq 0$ отображение $f_n: X_n \rightarrow Y_n$ является гомотопической эквивалентностью;

в) существует такое сохраняющее фильтрации отображение $g: Y \rightarrow X$, что для каждого $n \geq 0$ отображение $g_n: Y_n \rightarrow X_n$ является гомотопической эквивалентностью, обратной к гомотопической эквивалентности $f_n: X_n \rightarrow Y_n$,

то отображение $f: X \rightarrow Y$ является гомотопической эквивалентностью.

Доказательство. Отображение $g \circ f: X \rightarrow Y$ удовлетворяет условиям следствия 1. Поэтому оно является гомотопической эквивалентностью. Аналогично, гомотопической эквивалентностью является отображение $f \circ g: Y \rightarrow Y$. Следовательно, гомотопической эквивалентностью будет и отображение f (с обратной гомотопической эквивалентностью

$h \circ g: Y \rightarrow X$, где $h: X \rightarrow X$ — гомотопическая эквивалентность, обратная к гомотопической эквивалентности $g \circ f: X \rightarrow X$). $\square$

Замечание 2. Отображение g (также являющееся гомотопической эквивалентностью) не будет, вообще говоря, гомотопической эквивалентностью, обратной к гомотопической эквивалентности f .

Следствие 3. Если пространство X обладает такой гомотопически правильной фильтрацией $\{X_n\}$, что для каждого $n \geq 0$ пространство X_n стягиваемо, то пространство X также стягиваемо.

Доказательство. Это следствие является частным случаем следствия 2, отвечающим случаю, когда $Y = pt$ (и $Y_n = pt$ для любого $n \geq 0$). $\square$

Интересно, что заключение следствия 2 вытекает лишь из условий а) и б), так что условие в) фактически излишне. Чтобы доказать это, нам понадобится следующая лемма, объясняющая, кстати, почему фильтрацию $\{T_n\}$ мы называем нормализацией фильтрации $\{X_n\}$.

Лемма 1. Телескопная нормализация $\{T_n\}$ произвольной фильтрации $\{X_n\}$ гомотопически правильна.

Доказательство. Телескоп $T(T)$ телескопа $T = T(X)$ состоит из точек вида (x, r, s) , где $x \in X$, а $r, s \in \mathbb{R}^+$, обладающих тем свойством, что $x \in X_{[r]}$ и $r \leq [s]$. Поэтому формула

$$q(x, r) = (x, r, r+1), \quad (x, r) \in T,$$

определяет некоторое отображение $q: T \rightarrow T(T)$, являющееся сечением проекции $p: T(T) \rightarrow T$, $(k, r, s) \mapsto (k, r)$, т. е. такое, что $p \circ q = \text{id}$. Кроме того, соответствие $(x, r, s) \mapsto (x, r, (1-t)s + t(r+1))$, $0 \leq t \leq 1$, будет определять гомотопию из $T(T)$ в $T(T)$, связывающую тождественное отображение с отображением $q \circ p$. Этим доказано, что проекция p является гомотопической эквивалентностью, и, значит, фильтрация $\{T_n\}$ гомотопически правильна. $\square$

Теорема 1 (Милнор). Пусть X и Y — топологические пространства с фильтрациями $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$ соответственно, и пусть $f: X \rightarrow Y$ — сохраняющее фильтрации непрерывное отображение. Если

- а) фильтрации $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$ гомотопически правильны;
- б) для каждого $n \geq 0$ отображение $f_n: X_n \rightarrow Y_n$ является гомотопической эквивалентностью,

то отображение f также является гомотопической эквивалентностью.

Доказательство. Пусть $g_n: Y_n \rightarrow X_n$ — гомотопическая эквивалентность, обратная к гомотопической эквивалентности $f_n: X_n \rightarrow Y_n$, и пусть $i_n: X_n \rightarrow X_{n+1}$ и $j_n: Y_n \rightarrow Y_{n+1}$ — вложения. Тогда

$$i_n \circ g_n \sim g_{n+1} \circ f_{n+1} \circ i_n \circ g = g_{n+1} \circ j_n \circ f_n \circ g_n \sim g_{n+1} \circ j_n,$$

т. е. диаграмма

$$\begin{array}{ccc} Y_n & \longrightarrow & Y_{n+1} \\ g_n \downarrow & & \downarrow g_{n+1} \\ X_n & \longrightarrow & X_{n+1} \end{array}$$

горизонтальные стрелки которой являются вложениями, гомотопически коммутативна. Пусть $F_n: Y_n \times I \rightarrow X_{n+1}$ — гомотопия, связывающая отображение $i_n \circ g_n$ с отображением $g_{n+1} \circ j_n$. Положив

$$h(y, r) = \begin{cases} (g_n(y), n + 2s), & \text{если } 0 \leq s \leq 1/2, \\ (F_n(y, 2s - 1), n + 1), & \text{если } 1/2 \leq s \leq 1, \end{cases}$$

где $n = [r]$ и $s = r - n$, мы корректно определим сохраняющее фильтрацию непрерывное отображение $h: TY \rightarrow TX$, обладающее тем свойством, что для отображения $h \circ Tf: TX \rightarrow TX$ при любом $n \geq 0$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X_n & \longrightarrow & T_n X \\ g_n \circ f_n \downarrow & & \downarrow (h \circ Tf)_n \\ X_n & \longrightarrow & T_n X \end{array}$$

горизонтальные стрелки которой обозначают вложение $x \mapsto (x, n)$, $x \in X_n$. Поскольку это вложение, как мы знаем, представляет собой гомотопическую эквивалентность, а отображение $g_n \circ f_n$ гомотопно тождественному отображению, отсюда следует, что каждое отображение $(h \circ Tf)_n: T_n X \rightarrow T_n Y$ гомотопно тождественному отображению, а так как в силу леммы 1 фильтрация $\{T_n(X)\}$ гомотопически правильна, то, согласно следствию 1, отображение $h \circ Tf$ будет гомотопической эквивалентностью.

По аналогичным соображениям гомотопической эквивалентностью будет и отображение $Tf \circ h$. Следовательно, отображение Tf также представляет собой гомотопическую эквивалентность (с обратной гомотопической эквивалентностью $h \circ k$, где k — гомотопическая эквивалентность,

обратная гомотопической эквивалентности $Tf \circ h$). В силу условия а) это доказывает теорему (ср. с доказательством следствия 1). $\square$

Существует несколько различных критериев гомотопической правильности фильтрации. Мы докажем следующий критерий, впервые указанный по-видимому, Пуппе.

Предложение 2. Любая фильтрация Борсука $\{X_n\}$ гомотопически правильна.

Доказательство. В первую очередь мы построим некоторое сохраняющее фильтрации отображение $q: X \rightarrow TX$, а затем докажем, что оно является гомотопической эквивалентностью с обратной гомотопической эквивалентностью $p: TX \rightarrow X$.

Чтобы построить отображение q , достаточно для всех $n \geq 0$ построить непрерывные отображения $q_n: X_n \rightarrow T_n$, обладающие тем свойством, что для каждого $n \geq 0$ диаграмма

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} X_n & \rightarrow & X_{n+1} \\ q_n \downarrow & & \downarrow q_{n+1} \\ T_n & \rightarrow & T_{n+1} \end{array}$$

горизонтальные стрелки которой являются вложениями, коммутативна. Действительно, положив $q(x) = q_n(x)$, если $x \in X_n$, мы однозначно определим тогда отображение $q: X \rightarrow T$, которое будет непрерывно, потому что отображения q_n непрерывны, а пространство X является свободным объединением пространств X_n .

Мы построим отображения $q_n: X_n \rightarrow T_n$ индукцией по n , принимая за q_0 тождественное отображение пространства $X_0 = T_0$.

Для проведения индукции мы дополнительно потребуем, чтобы для любого $n \geq 0$ существовала гомотопия $q_n, t: X_n \rightarrow T_n$, связывающая отображение $X_n \rightarrow T_n$, $x \mapsto (x, n)$, с отображением $q_n: X_n \rightarrow T_n$. Чтобы удовлетворить этому условию при $n=0$, достаточно для любого $t \in I$ положить $q_{0,t} = \text{id}$.

Пусть для некоторого $n \geq 0$ отображение $q_n: X_n \rightarrow T_n$ и гомотопия $q_n, t: X_n \rightarrow T_n$ уже построены. Пусть $q_n, t(x) = (\bar{q}_n, t(x), r_n, t(x))$, где $\bar{q}_n, t(x) \in X_n$ и $0 \leq r_n, t(x) \leq n$ для каждой точки $x \in X_n$ (причем, конечно, $\bar{q}_n, t(x) \in X_k$, если $k \leq r_n, t(x) < k+1$). Мы определим гомотопию $Q_n, \tau: X_n \times I \rightarrow T_{n+1}$ отображения $Q_n: (x, t) \mapsto q_n, t(x)$, рассматри-

ваемого как отображение в T_{n+1} , положив

$$Q_{n,\tau}(x, t) = (\bar{q}_{n,\tau}(x), r_{n,\tau}(x) + \tau)$$

для любых $x \in X_n$ и $t, \tau \in I$. Пусть $Q_{n,\tau}^{(0)}$ — гомотопия из X_n в T_{n+1} , определенная формулой $Q_{n,\tau}^{(0)}(x) = Q_{n,\tau}(x, 0)$. Так как по условию $\bar{q}_{n,0}(x) = x$ и $r_{n,0}(x) = n$, то $Q_{n,\tau}^{(0)}(x) = (x, n + \tau)$ и, в частности, $Q_{n,1}^{(0)}(x) = (x, n + 1)$. Это означает, что отображение $Q_{n,1}^{(0)}(x)$ представляет собой ограничение на X_n отображения $j_{n+1}: X_{n+1} \rightarrow T_{n+1}$. Поскольку пара (X_{n+1}, X_n) является по условию парой Борсука, отсюда вытекает, что гомотопия $Q_{n,\tau}^{(0)}$ является ограничением на X_n такой гомотопии $\bar{Q}_{n,\tau}: X_{n+1} \rightarrow T_{n+1}$, что $\bar{Q}_{n,1} = j_{n+1}$. Для гомотопии $H_t: (x, \tau) \mapsto Q_{n,\tau}(x, t)$ из $X_n \times I$ в T_{n+1} это означает, что ее начальное отображение $H_0: (x, \tau) \mapsto Q_{n,\tau}(x, 0) = Q_{n,\tau}^{(0)}(x)$ является ограничением

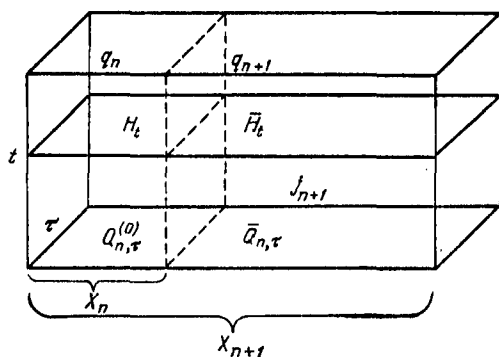


Рис. 26.

на $X_n \times I$ отображения $X_{n+1} \times I \rightarrow T_{n+1}$, определенного формулой $(x, \tau) \mapsto \bar{Q}_{n,\tau}(x)$. Следовательно, поскольку пара $(X_{n+1} \times I, X_n \times I)$ также представляет собой пару Борсука, эта гомотопия является ограничением на $X_n \times I$ некоторой гомотопии $\bar{H}_t: (x, \tau) \mapsto \bar{H}_t(x, \tau)$, $x \in X_{n+1}$, $t, \tau \in I$, обладающей тем свойством, что $\bar{H}_0(x, \tau) = \bar{Q}_{n,\tau}(x)$ для любой точки $(x, \tau) \in X_{n+1} \times I$ (см. рис. 26). Так как при $x \in X_n$ имеет место равенство $\bar{H}_1(x, 0) = H_1(x, 0) = Q_{n,0}(x, 1) = Q_n(x, 1) = q_n(x)$, то для отображения $q_{n+1}: x \mapsto \bar{H}_1(x, 0)$ диаграмма (1) коммутативна. Кроме того, положив для

любой точки $(x, t) \in X_{n+1} \times I$

$$(2) \quad Q_{n+1}(x, t) = \begin{cases} \bar{Q}_{n, 1-2t}(x), & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ \bar{H}_{2t-1}(x, 0), & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

мы получим гомотопию $Q_{n+1}: X_{n+1} \times I \rightarrow T_{n+1}$, связывающую отображение $x \mapsto Q_{n+1}(x, 0) = \bar{Q}_{n, 1}(x) = j_{n+1}(x)$ с отображением $q_{n+1}: x \mapsto \bar{H}_1(x, 0)$.

Тем самым все отображения q_n по индукции полностью построены. Следовательно, построено и отображение q .

Теперь нам надо показать, что $p \circ q \sim \text{id}$ и $q \circ p \sim \text{id}$. Для этого снова достаточно построить такие гомотопии $f_{n,t}: X_n \rightarrow X_n$ и $g_{n,t}: T_n \rightarrow T_n$, связывающие тождественные отображения id_{X_n} и id_{T_n} с соответственно отображениями $p_n \circ q_n: X_n \rightarrow X_n$ и $q_n \circ p_n: T_n \rightarrow T_n$, что для любого $t \in I$ и каждого $n \geq 0$ имеют место коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{\quad} & X_{n+1} \\ f_{n,t} \downarrow & & \downarrow f_{n+1,t} \\ X_n & \xrightarrow{\quad} & X_{n+1} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} T_n & \xrightarrow{\quad} & T_{n+1} \\ g_{n,t} \downarrow & & \downarrow g_{n+1,t} \\ T_n & \xrightarrow{\quad} & T_{n+1} \end{array}$$

горизонтальные стрелки которых являются вложениями.

Рассмотрим сначала гомотопии $f_{n,t}: \text{id} \sim p_n \circ q_n$. По построению, отображения $p_n \circ q_{n,t}: X_n \rightarrow X_n$ также составляют гомотопию из X_n в X_n , связывающую отображение $p_n \circ q_{n,0} = p_n \circ j_n = \text{id}$ с отображением $p_n \circ q_{n,1} = p_n \circ q_n$. Это означает, что отображение $F_n: X_n \times I \rightarrow X_n$, $(x, t) \mapsto f_{n,t}(x)$, совпадает на $(X_n \times 0) \cup (X_n \times 1)$ с отображением $p_n \circ Q_n: X_n \times I \rightarrow X_n$, $(x, t) \mapsto (p_n \circ q_{n,t})(x)$. В качестве дополнительного условия, облегчающего построение по индукции гомотопий $f_{n,t}$, мы потребуем, чтобы для любого $n \geq 0$ существовала неподвижная на $(X \times 0) \cup (X \times 1)$ гомотопия $\Phi_n: X \times I \times I \rightarrow X_n$, связывающая отображение $p \circ Q_n$ с отображением F_n .

Предполагая теперь гомотопии F_n и Φ_n уже построенными, рассмотрим гомотопию $p_{n+1} \circ Q_{n+1}$, где Q_{n+1} — гомотопия, заданная формулами (2). Так как при $x \in X_n$ гомотопия $p_{n+1} \circ Q_{n+1}$ задается формулами

$$(p_{n+1} \circ Q_{n+1})(x, t) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ (p_n \circ Q_n)(x, 2t-1), & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

то формула

$$\bar{\Phi}_n(x, t, \tau) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 \leq t \leq \frac{1-\tau}{2}, \\ \Phi\left(x, \frac{2t+\tau-1}{1+\tau}, \tau\right), & \text{если } \frac{1-\tau}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

где $x \in X_n$, $t, \tau \in I$, определяет (ввиду тождества $\Phi(x, 0, \tau) = x$ корректно) неподвижную на $(X_n \times 0) \cup (X_n \times 1)$ гомотопию $\bar{\Phi}_n: X_n \times I \times I \rightarrow X_n$, связывающую гомотопию $p_{n+1} \circ Q_{n+1}$ на $X_n \times I$ с гомотопией F_n . Следовательно, — поскольку пара $(X_{n+1} \times I, \tilde{X}_n)$, где $\tilde{X}_n = (X_{n+1} \times 0) \cup (X_n \times I) \cup (X_{n+1} \times 1)$, представляет собой, согласно предложению 3 лекции 3, пару Борсука, — гомотопия $\bar{\Phi}_n$ является ограничением неподвижной на $(X_{n+1} \times 0) \cup (X_{n+1} \times 1)$ гомотопии $\Phi_{n+1}: X_{n+1} \times I \times I \rightarrow X_n$, связывающей гомотопию $p_{n+1} \circ Q_{n+1}$ с некоторой гомотопией F_{n+1} , совпадающей на $X_n \times I$ с гомотопией F_n .

Тем самым гомотопии F_n построены для всех $n \geq 0$.

Построение гомотопий $G_n: (z, t) \mapsto g_{n,t}(z)$, $z \in T_n$, $t \in I$, осуществляется аналогично. В качестве дополнительного условия мы потребуем, чтобы для любого $n \geq 0$ существовала неподвижная на $(T_n \times 0) \cup (T_n \times 1)$ гомотопия $\Psi_n: T_n \times I \times I \rightarrow T_n$, связывающая с гомотопией $G_n: T_n \times I \rightarrow T_n$ гомотопию $\hat{Q}_n: T_n \times I \rightarrow T_n$, определенную для любого $z = (x, r) \in T_n$ и каждого $t \in I$ формулой

$$\hat{Q}_n(z, t) = \begin{cases} (x, 2(n-r)t + r), & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ Q_n(x, 2t-1), & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

и также связывающую отображения id_{T_n} и $q_n \circ p_n$.

Положив для любой точки $(z, t, \tau) \in T_n \times I \times I$, $z = (x, r)$,

$$\bar{\Psi}_n(z, t, \tau) = \begin{cases} (x, 2(n-r+1-2\tau)t + r), & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, 0 \leq \tau \leq 1/2, \\ (x, n+3-4t-2\tau), & \text{если } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3-2\tau}{4}, 0 \leq \tau \leq \frac{1}{2}, \\ Q_n\left(x, \frac{4t+2\tau-3}{2\tau+1}\right), & \text{если } \frac{3-2\tau}{4} \leq t \leq 1, 0 \leq \tau \leq \frac{1}{2}, \\ \Psi_n(z, t, 2\tau-1), & \text{если } 1/2 \leq \tau \leq 1, \end{cases}$$

мы получим неподвижную на $(T_n \times 0) \cup (T_n \times 1)$ гомотопию

$\bar{\Psi}_n: T_n \times I \times I \rightarrow T_n$, связывающую гомотопию $\hat{Q}_{n+1}$ на $T_n \times I$ с гомотопией G_n . Поскольку пара (T_{n+1}, T_n) , а потому и пара $(T_{n+1} \times I, \bar{T}_n)$, где $\bar{T}_n = (T_{n+1} \times 0) \cup (T_n \times I) \cup (T_n \times 1)$, представляет собой пару Борсука, гомотопия $\bar{\Psi}_n$ является ограничением на $T_n \times I \times I$ некоторой неподвижной на $(T_{n+1} \times 0) \cup (T_{n+1} \times 1)$ гомотопии $\Psi_{n+1}: T_{n+1} \times I \times I \rightarrow T_{n+1}$, связывающей гомотопию $\hat{Q}_{n+1}$ с такой гомотопией G_{n+1} , что $G_{n+1}|_{T_n \times I} = G_n$.

Предложение 2 тем самым полностью доказано. $\square$

Замечание 3. Согласно предложению 2 и следствию 3 предложения 1 участвующее в доказательстве теоремы Джеймса пространство E стягиваемо. Поэтому отображение $h: E \rightarrow P^M_j(S^*X)$ является гомотопической эквивалентностью и, значит, согласно предложению 1 из Дополнения к лекции 2—в предположении, что p представляет собой (хотя бы гомотопическое) расслоение,—будет послойной гомотопической эквивалентностью. В частности, гомотопической эквивалентностью будет ограничение этого отображения на слое JX расслоения p , т. е. меридианное отображение i . Таким образом, для доказательства теоремы Пуппе (см. замечание 3 лекции 9) достаточно доказать, что отображение $p: E \rightarrow S^*X$ является не слабым, а сильным расслоением. Вспоминая доказательство леммы 5 лекции 8 и теорему 1 из Дополнения к лекции 8, мы видим, что для этого в свою очередь достаточно доказать, что в условиях этой леммы индуцированное отображением p отображение $p_V: p^{-1}V \rightarrow V$ является гомотопическим расслоением (двухэлементное покрытие $\{V, W\}$, очевидно, нумерируемо). Пуппе показывает, что для нумерируемо локально стягиваемого пространства X отображение p_V гомотопически эквивалентно (над V) некоторому гомотопическому расслоению $q: \tilde{V} \rightarrow V$ и, значит (лемма 1 из Дополнения к лекции 2), само является гомотопическим расслоением. При этом за $\tilde{V}$ можно принять пространство $(p^{-1}V \times I) \cup_f (V \times Y)$, получающееся приклеиванием произведения $p^{-1}V \times I$ к пространству $V \times Y$ посредством отображения $f: (u, 1) \mapsto (p(u), \bar{r}(u))$, $u \in p^{-1}V$, где $\bar{r}: p^{-1}V \rightarrow Y$ —построенная при доказательстве леммы 5 лекции 8 ретракция, а расслоение $q: \tilde{V} \rightarrow V$ задать соответствием $(v, y) \mapsto v$, $u \in p^{-1}V$, $t \in I$, $v \in V$.

Подробное проведение соответствующих рассуждений мы оставим читателю.

Список содержит только книги. Из литературы на иностранных языках указаны лишь три книги, существенно использованные в настоящих «Лекциях».

1. Введение в топологию (колл. авторов).— М.: Высшая школа, 1980. Элементарный учебник, предназначенный для студентов 1—3 курсов университетов. В гл. 3 кратко рассмотрены гомотопические группы вообще и фундаментальная группа в частности.
2. Зейферт Г., Трельфалль В. Топология.— М.; Л. ГОНТИ, 1938.
В основном книга посвящена теории гомологий, но рассмотрены также фундаментальная группа и накрывающие пространства. В общетеоретической части книга безнадежно устарела, но содержащийся в ней обширный геометрический материал делает ее все еще интересной. Часть этого материала использована нами в Дополнении к лекции 19.
3. Кроуэлл Р., Фокс Р. Введение в теорию узлов.— М.: Мир, 1967.
Книга отличается исключительной аккуратностью и подробностью изложения. Кроме собственно теории узлов, изложены алгебраическая теория копредставлений групп, фундаментальная группа и теорема Зейферта — ван Кампена (называемая авторами теоремой ван Кампена).
4. Масси У., Столлингс Д. Алгебраическая топология. Введение.— М.: Мир, 1977.
Книга написана выдающимся американским топологом Масси (имя Столлингса попало на титул из-за того, что к русскому переводу книги Масси приложен перевод небольшого сочинения Столлингса по теории трехмерных многообразий). Является превосходным, рассчитанным на начинающих элементарным введением в теорию фундаментальных групп и накрывающих пространств (а также двумерных поверхностей).
5. Милнор Дж. Топология с дифференциальной точки зрения.— В кн. Милнор Дж., Уоллес А. Дифференциальная топология. Начальный курс.— М.: Мир, 1972.
Изложены простейшие применения гладкой топологии к алгебро-топологическим задачам. См. лекцию 7.
6. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии.— М.: Изд-во МГУ, 1980.
Изложение топологических вопросов ориентировано в сторону гладких многообразий. Доказана теорема классификации двумерных поверхностей. Приведенное на стр. 351 «доказательство» триангулируемости двумерных поверхностей нуждается в обосновании.
7. Понтрягин Л. С. Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий.— М.: Наука, 1976.
Детальное изложение знаменитых результатов Л. С. Понтрягина о связях гомотопических групп сфер с группами классов оснащенных подмногообразий.
8. Постников М. М. Введение в теорию Морса.— М.: Наука, 1971.
В гл. 2 изложены основные факты, связанные с понятием гомотопической эквивалентности, а гл. 3 посвящена теории клеточных пространств.
9. Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр V. Группы и алгебры Ли.— М.: Наука, 1981.
В лекции 8 дано альтернативное изложение теории накрывающих пространств.
10. Рохлин В. А., Фуks Д. Б. Начальный курс топологии. Геометрические главы.— М.: Наука, 1977.
Обстоятельнейшее изложение начальных понятий и теорем, касающихся клеточных пространств, гладких многообразий, расслоений и гомотопиче-

ских групп. Более глубокие теоремы специального характера в книге не рассматриваются. Для первоначального изучения топологии книга мало пригодна, но как бесценный источник разнообразной (и, как правило, точной) информации должна быть под рукой у каждого тополога. Указанные на стр. 48, 49, 55 и 57 «очевидные канонические гомеоморфизмы» являются, вообще говоря, лишь гомотопическими эквивалентностями (см. Дополнение к лекции 4 и лекцию 15).

11. Стирод Н., Эйленберг С. Основания алгебраической топологии.— М.: Физматгиз, 1958.
Классическое — и до сих пор оставшееся, по существу, непревзойденным — изложение аксиоматической теории гомологий. С материалом настоящих «Лекций» пересекается фактически не связанная с предыдущими главами заключительная гл. XI «Приложения к евклидовым пространствам», в которой излагаются разнообразные следствия теоремы о барабане (см. Дополнение к лекции 7).
12. Спеньер Э. Алгебраическая топология.— М.: Мир, 1971.
Фактически единственный на русском языке учебник по алгебраической топологии, охватывающий все ее основные разделы. В нем подытожены результаты «классического периода» в развитии алгебраической топологии, и потому, несмотря на почти двадцать лет, прошедшие со дня выхода в свет английского оригинала, эта книга сохранила определенную свежесть до сего времени. Гл. 1 посвящена гомотопиям вообще и фундаментальной группе в частности, а гл. 2 — покрывающим пространствам и расслоениям. Высшие гомотопические группы и клеточные пространства рассматриваются в гл. 7 после теории гомологий.
13. Хилтон П., Уайли С. Теория гомологий. Введение в алгебраическую топологию.— М.: Мир, 1966.
С настоящими «Лекциями» пересекается гл. 6 «Фундаментальная группа и покрывающие пространства» и Введение к части II (в котором кратко изложены абсолютные и относительные гомотопические группы, пространства петель, расслоения и т. п.).
14. Хирш М. Дифференциальная топология.— М.: Мир, 1979.
Превосходное, очень наглядное и вместе с тем вполне аккуратное изложение начальных сведений по теории гладких многообразий. В гл. 5 содержится теория степени (см. лекцию 7).— Это единственное на русском языке изложение этой теории, отличающееся как полнотой, так и аккуратностью.
15. Ху Сы-цзян, Теория гомотопий.— М.: Мир, 1964.
В первых главах (основные задачи и их частные случаи, расслоенные пространства и гомотопические группы) теория гомологий не используется. Изложение очень обстоятельное и подробное.
16. Фукс Д. Б., Фоменко А. Т., Гутеинмахер В. Л. Гомотопическая топология.— М.: Изд-во МГУ, 1970.
Запись лекционного курса Д. В. Фукса. Гл. I посвящена теории гомотопий.
17. tom Dieck T., Kamps K. H., Puppe D. Homotopietheorie.— Lect. Notes Math., 157.— Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1970.
Основные понятия теории гомотопий изложены с общекатегорной точки зрения и с особым вниманием к двойственностям. Дополнения к лекциям 1, 2, 3, 9 и 10 заимствованы из этой книги.
18. Switzer R. M. Algebraic topology. Homotopy and homology.— Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1975. [Готовится русский перевод.]
Посвященная в основном обобщенным теориям когомологий, книга открывается главами, в которых разъясняются понятия N -группы и N -когруппы, вводятся гомотопические группы и клеточные пространства и доказываются основные теоремы гомотопической теории клеточных пространств.
19. Whitehead G. W. Elements of homotopy theory.— Graduate Texts Math., 61.— New York; Heidelberg; Berlin: Springer-Verlag, 1978.
Обстоятельное изложение почти всех вопросов классической теории гомотопий. Владение теорией гомологий предполагается. Из этой книги заимствован материал Дополнений к лекциям 4 и 16 (Результаты лекции 16 и 18, хотя и принадлежат в основном Дж. Уайтхеду, но в его книге доказываются иначе — с использованием гомологических методов.)

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Акслома МРНГ 63

— МРС 64

— НГ 50

— НЗГ 373

— НП 50

— РГ 27

— РНГ 97

— РНО 97

— СМРНГ 375

Аксномы гомотопических групп 227

Амальгама 41

Апсамбль 178

— гомотопических групп 214

— — слоев 333

Атлас ориентирующий 303

Бунет 141

Ветвь 293

Вибрисса 164

Вклеивание 362

Гомоморфизм расщепляющий 231

— связывающий 219

Гомотопия 26

— в категории 29

— замедленная 373

— над B 105

— послонная 105

— пунктированная 142.

— свободная 143

— связанная 89

Гомотопность нулю 166

Граф 289

— конечный 290

— ориентированный 291

— связный 293

Группа Вейля 257

— гомотопическая 203

— — относительная 338

— — пары 338

— категории 132

— иньпотентная 197

— свободная 262

— фундаментальная 173

Группоид 178

— фундаментальный 178

Действие 174

— вполне разрывное 259

Деформация ретрагирующая 84

Диаграмма 270

— диаграммная схема 270

Дуга вложенная 308

Единица гомотопическая 135

Изоморфизм Хопфа 225

Инъекция 232

Категория гомотопическая 28

— с гомотопиями 29

— фа-замкнутая 137

— фм-замкнутая 132

Квадрат декартов 41

— кодекартов 52

— коуниверсальный 41

— универсальный 52

Квазирасслоение 228, 357

Класс гомотопический 27.

Коамальгама 52

Когруппа категории 138

Коединца гомотопическая 144

Коммутатор 197

Комоноид категории 139

Компонента 38

Конгруэнция 272

Конус 40, 87, 270

— обратный 51

— отображения 244

— приведенный 165

— прямой 41

Копредставление 275

Копроизведение 137

Корасслоение 27, 106

Кослой 181.

Коумножение 144

Коунитоид категории 139

Коцилиндр 55, 107

Критическая точка 301

Кубоид 209

Лемма Джеймса 370

— Лебега 71

— о пяти гомоморфизмах 345

— Урысона 30

Маршрут 291

Многообразие 299

— замкнутое 299

— ориентируемое 303

— топологическое 324

Монеоморфизм 14

Моноид категории 132

— универсальный 387

Морфизм алгебраический 136, 144

— гомотопический 136, 144

— копостоянный 138

— постоянный 132

- Надстройка 145
- приведенная 147
- Накрытие 223
- Галуа 258
- конечнолистное 255
- регулярное 258
- транзитивное 256
- универсальное 268
- Нормализация телескопной фильтрации 400
- Образующая 274
- Объект инцидальный 137
- терминальный 132
- Орбита 174
- Ориентация 303
- ОСДР 93
- Отображение гладкое 299
- индуцированное 53
- каонное 33
- классифицирующее 241
- коиндуцированное 42
- коллапсирующее 116
- коммутаторное 198
- меридианное 393
- мигкое 64
- надстроечное 384
- несущественное 324
- послойное 104
- пунктированное 140
- стянутое 342
- существенное 323
- схлопывания 180
- трансверсальное 307
- Хопфа 20, 224
- Отображения гомотопные 26
- Пара асферичная 343
- Борсука 27
- — классифицированная 247
- — над B 106
- гомотопически простая 344
- пунктированная 336
- λ -связная 343
- Петля 149
- муровская 151
- , подчиненная покрытию 284
- элементарная 284
- λ -кратная 209
- Поднятия задача 15
- Покрытие аддитивно насыщенное 365
- насыщенное 283
- нумерируемое 68
- Поле векторное 22
- Последовательность гомотопическая пары 340
- — расслоения 219
- — слабого расслоения 357
- — триады 353
- — тройки 348
- короткая 222
- — корасцепляющаяся 234
- — расцепляющаяся 231
- коточная 233
- надстроечная 385
- Пуппе коточная 247
- — точная 238, 240
- — удлинённая 243
- — точная 219, 228
- Предел гомотопический 401
- диаграммы 271
- Преобразования Титце 277
- Приклеивание 20
- Проекция 232
- Произведение косое 80
- пар 48
- петель 149
- полупрямое 231
- прямое 131
- путей 152
- свободное 277
- Пространство абелево 211
- асферичное 216
- гомотопически простое 211
- каонное 33
- липзовое 303
- локально связное 251
- , нумерируемо полулокально стягиваемое 125
- односвязное 173
- полулокально односвязное 268
- пунктированное 140
- — гладко 163
- связное 38
- стягиваемое 87, 165
- λ -связное 216
- Путь 38
- муровский 151
- Разбиение единицы 68
- Распространения задача 13
- Расслоение 49
- в смысле Серра 357
- в смысле Стиррода 80
- гомотопическое 109
- классифицированное 241
- локально тривиальное 79
- над B 107
- серровское 60
- —, муровский вариант 396
- сильное 357
- слабое 357
- со структурной группой 80
- тривиальное 79
- Хопфа 224
- Расширение 222
- Ребро графа петлеобразное 290
- — простое 290
- Регулярное значение 301
- Ретракт 14
- деформационный 84
- — над B 106
- — строгий 89
- — — над B 106
- — окрестностный 93
- над B 106
- Ретракция 14
- деформационная 84
- — строгая 89
- Сечение 15
- продолжаемое 64
- Система локальная 178
- Скольжение 256
- Скращенный модуль 342
- Слово групповое 262
- Слой 104
- гомотопический 235
- Смеш-произведение 160
- Соответствие Галуа 268
- Соотношения определяющие 274
- Степень отображения 312

Степень отображения mod 2 319
 Стигматизация 87
 Сумма объектов 137
 Сфера топологическая 205
 Сфероид 209
 Схема диаграммная 270

 Телескоп 395
 Теорема Борсука 324
 — Брауера 18
 — Джеймса 395
 — Дольда 78, 117
 — Дольда — Тома 359
 — Зейферта — ван Кампена 283
 — Милнора 405
 — Нильсена — Шрайера 297
 — о барабане 18
 — об инвариантности области 328
 — о воронке 300
 — Сарда 301
 — — обобщенная 310
 — Титце 30, 277
 Тип гомотопический 81
 Топология компактно открытая 30
 Точка отмеченная 140
 — — невырожденная 163
 Триада 352

 Унитар 133

 Фильтрация 391
 — Борсука 392
 — гомотопически правильная 401
 ФОСДР 93
 Функтор гомотопически инвариантный
 127, 151

Функтор гомотопических групп 201
 — игнорирования отмеченных точек
 140
 — надстройки 146
 — петель 149, 151
 — представимый 129
 — приведенной надстройки 147
 — сопряженный 149
 Функция Урысона 30

Цилиндр отображения 44, 82

Число Лебега 72
 — листов накрытия 255
 — Морса 299

Эквивалентность гомотопическая 81,
 169, 229
 — — над B 105
 — — послойная 105
 Экспоненциальный закон 33, 37, 161
 Эпиморфизм 14

ENP-последовательность 385
 H-группа 135
 H-когруппа 144
 H-компоид 144
 H-коунитоид 144
 H-моноид 135
 H-пространство 135
 n -ада 351
 n -ка 336
 H-последовательность 330
 — точная 331